Construções de reticulados via polinômios

Antonio Aparecido de Andrade

***Resumo*— Neste trabalho, apresentamos um novo método de construções de reticulados de dimensões 2, 3, 4 e 5 utilizando raízes de polinômios de graus 2, 3, 4 e 5, respectivamente. A matriz geradora é uma matriz circulante com entradas sendo as raíz de polinômio.**

***Palavras-Chave*— Reticulados, densidade de centro e empacotamento esférico.**

I. INTRODUÇÃO

O problema clássico do empacotamento esférico consiste em encontrar um arranjo de esferas idênticas no espaço euclidiano n-dimensional de forma que a fração do espaço coberto por essas esferas seja a maior possível.

Os empacotamentos interessantes são aqueles associados a um reticulado $\mathcal{H}_\beta$ em que as esferas tenham raio máximo. Para a determinação deste raio, observe que fixado $k > 0$, a intersecção do conjunto compacto $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq k\}$ com o reticulado $\mathcal{H}_\beta$ é um conjunto finito, de onde segue que o número $\mathcal{H}_{\beta_{min}} = min\{|\lambda|; \lambda \in \mathcal{H}_\beta, \lambda \neq 0\}$ está bem definido e $(\mathcal{H}_{\beta_{min}})^2$ é chamado de norma mínima. Note que $\rho = \mathcal{H}_{\beta_{min}}/2$ é o maior raio para o qual é possível distribuir esferas centradas nos pontos de $\mathcal{H}_\beta$ e obter um empacotamento. O parâmetro ρ é chamado raio de empacotamento do reticulado. Dessa forma, estudar os empacotamentos reticulados equivale ao estudo dos reticulados.

Denotando por $\mathcal{B}(\rho)$ a esfera com centro na origem e raio ρ, temos que a densidade de empacotamento de $\mathcal{H}_\beta$ é igual a

$$\Delta(\mathcal{H}_\beta) = \frac{\mathcal{V}ol(\mathcal{B}(\rho))}{\mathcal{V}ol(\mathcal{H}_\beta)} = \frac{\mathcal{V}ol(\mathcal{B}(1))\rho^n}{\mathcal{V}ol(\mathcal{H}_\beta)}.$$

Portanto, o problema se reduz ao estudo de um outro parâmetro, chamado de densidade de centro, que é dado por

$$\delta(\mathcal{H}_\beta) = \frac{\rho^n}{\mathcal{V}ol(\mathcal{H}_\beta)}. \tag{1}$$

II. RETICULADOS

Sejam $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$. Um reticulado com base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é definido como o conjunto dos elementos de $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\Lambda = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \text{ com } a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in})$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, a matriz

$$M = (v_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

é chamada matriz geradora do reticulado.

Definição 1: Seja $\Lambda_B \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado, com base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$. O conjunto

$$\mathcal{P}_B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \, 0 \leq \lambda_i < 1 \right\}, \tag{2}$$

é chamado de região fundamental de Λ_B com relação a base $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Se $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in})$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, a matriz $M = (v_{ij})_{i,j=1}^n$ é chamada matriz geradora do reticulado.

Definição 2: Seja $\Lambda_B \subseteq \mathbb{R}^n$ um reticulado com base $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. O volume do reticulado Λ_B é definido como

$$\mathcal{V}ol(\Lambda_B) = \mathcal{V}ol(\mathcal{P}_B) = \mid \det(M) \mid . \tag{3}$$

III. MÉTODO DE CONSTRUÇÃO

Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau n com raízes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Assim,

1) As raízes são reais.
2) As raízes são totalmente complexas.
3) As raízes são reais e totalmente complexas. Neste caso, se $\alpha \in \mathbb{C}$ é um raiz, então $\overline{\alpha}$ também é uma raiz.
4) Precisamos analisar as multiplicidades das raízes.

Para a construção de um reticulado, precisamos definir a sua matriz geradora. Uma sugestão de matriz geradora é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

chamada matriz circulante.

IV. CONSTRUÇÕES DE RETICULADOS DE DIMENSÃO 2

Nesta seção, apresentamos construções do reticulado Λ_2 via polinômios $p(x) = x^2 + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ de grau 2. Os reticulados obtidos possuem a mesma densidade de centro do reticulado Λ_2, ou seja, é a densidade de centro ótima para a dimensão 2.

A. Com uma raiz real dupla

Sejam $p(x) = x^2 + a_1 x + a_0$, onde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma raiz dupla de $p(x)$. Assim, $p(x) = (x - \alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$, e desse modo, $2\alpha = -a_1$ e $\alpha^2 = a_0$. Como $p(x)$ tem uma raiz real dupla, devemos ter que

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 = 0.$$

A equação $p(x) = x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ tem raiz dupla $\alpha = -\frac{a_1}{2}$ se, e somente se, $a_1^2 = 4a_0$.

Antonio Aparecido de Andrade, Departamento de Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Ibilce), Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho"(Unesp), São José do Rio Preto - SP, e-mail: antonio.andrade@unesp.br.

Seja $\Lambda_p \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado gerado pela base $\{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (\alpha\sqrt{3}, \alpha)$ e $v_2 = (\alpha\sqrt{3}, -\alpha)$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{3} & \alpha \\ \alpha\sqrt{3} & -\alpha \end{pmatrix}. \quad (4)$$

O determinante da matriz M é dado por

$$\det(M) = -2\alpha^2\sqrt{3} = -2a_0\sqrt{3}.$$

Se $v = x_1v_1 + x_2v_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, então $v = x_1(\alpha\sqrt{3}, \alpha) + x_2(\alpha\sqrt{3}, -\alpha)$, ou seja, $v = ((\alpha\sqrt{3}(x_1 + x_2), (x_1 - x_2)\alpha)$. Assim

$$\begin{array}{rcl} \| v \|^2 & = & (\alpha\sqrt{3}(x_1 + x_2))^2 + (\alpha(x_1 - x_2))^2 \\ & = & 3\alpha^2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + \alpha^2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\ & = & 4\alpha^2(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = 4a_0(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2), \end{array}$$

que assume o valor mínimo $4a_0$, quando $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$. Assim, $\rho = \frac{\sqrt{4a_0}}{2} = \sqrt{a_0}$, e portanto,

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^2}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{\sqrt{4a_0}}{2})^2}{|-2a_0\sqrt{3}|} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 2.

B. Com duas raízes reais distintas

Sejam $p(x) = x^2 + a_1x + a_0$, onde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ as raízes reais de $p(x)$. Assim, $p(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, e desse modo, como α e β são reais, segue que

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0,$$

$\alpha + \beta = -a_1$ e $\alpha\beta = a_0$

Seja $\Lambda_p \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado gerado pela base $\{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (\alpha, \beta)$ e $v_2 = (\beta, \alpha)$. Neste caso, a matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Sendo ρ o raio de empacotamento do reticulado Λ_p, segue que a densidade de centro de Λ_p é dada por

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^2}{\mathcal{V}ol(\Lambda_p)} = \frac{\rho^2}{|\det(M)|}.$$

Assim, para calcularmos a densidade de centro de Λ_p precisamos encontrar expressões para o cálculo de ρ e de $\det(M)$.

Proposição 1: [5] O determinante da matriz M é $\det(M) = -a_1\sqrt{\Delta}$.

Demonstração: Neste caso,

$$\det(M) = \alpha^2 - \beta^2 = (-a_1 - \beta)^2 - \beta^2 = -a_1\sqrt{\Delta},$$

o que prova o resultado. ∎

Corolário 1: ([5]) Se $v = x_1v_1 + x_2v_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, então

$$\| v \|^2 = a_1^2({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2a_0(x_1 - x_2)^2.$$

Demonstração: A norma do vetor $v = x_1v_1 + x_2v_2 = (x_1\alpha + x_2\beta, x_1\beta + x_2\alpha)$ é dada por

$$\begin{array}{rcl} \| v \|^2 & = & (x_1\alpha + x_2\beta)^2 + (x_1\beta + x_2\alpha)^2 \\ & = & a_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2a_0(x_1 - x_2)^2, \end{array}$$

o que mostra o resultado. ∎

Teorema 1: [5] Se $a_1^2 = 6a_0$, então o reticulado Λ_p possui densidade de centro ótima.

Demonstração: Sejam $a_1^2 = 6a_0$ e $v = x_1v_1 + x_2v_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ um vetor de Λ_p. Pelo Corolário 1, segue que

$$\| v \|^2 = 6a_0({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2a_0(x_1 - x_2)^2.$$

Como a forma quadrática assume valor mínimo $4a_0$ quando $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$, segue que

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{4a_0}}{2} = \sqrt{a_0}. \quad (6)$$

Agora, pela Proposição (1), segue que

$$\det(M) = -a_1\sqrt{a_1^2 - 4a_0} = \pm\sqrt{6a_0}\sqrt{2a_0} = \pm 2\sqrt{3}a_0. \quad (7)$$

Assim, a densidade de centro de Λ_p é dada por

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\sqrt{a_0}^2}{2\sqrt{3}a_0} = \frac{a_0}{2\sqrt{3}a_0} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 2. ∎

C. Com duas raízes complexas

Sejam $p(x) = x^2 + a_1x + a_0$, onde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ e $\gamma_1 = \alpha + i\beta, \gamma_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ as raízes de $p(x)$. Neste caso,

$$\Delta = a_1^2 - a_0a_1 < 0,\ \alpha = -\frac{a_1}{2},\ \alpha^2 + \beta^2 = a_0 \text{ e } \beta = \pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Seja $\Lambda_p \subset \mathbb{R}^2$ um reticulado gerado pela base $\{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (\alpha, \beta)$ e $v_2 = (\beta, \alpha)$, onde $\alpha \neq \beta$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

e a densidade de centro de Λ_p é dada por

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^2}{\mathcal{V}ol(\Lambda_p)} = \frac{\rho^2}{|\det(M)|},$$

onde ρ é o raio de empacotamento de Λ_p. Da mesma forma, queremos encontrar expressões para o calcular ρ e $\det(M)$. No resultado a seguir veremos uma expressão para o cálculo de $\det(M)$.

Proposição 2: [5] O determinante da matriz M é dado por

$$\det(M) = \frac{a_1^2}{2} - a_0.$$

Demonstração: O determinante da matriz M é dado por

$$\det(M) = \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 - (a_0 - \alpha^2) = 2\alpha^2 - a_0 = \frac{a_1^2}{2} - a_0,$$

o que prova a proposição. ∎

Proposição 3: [5] Se $\beta > 0$ e $v \in \Lambda_p$, onde $v = x_1v_1 + x_2v_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, então

$$\| v \|^2 = a_0(x_1^2 + {x_2}^2) - a_1\sqrt{-\Delta}x_1x_2.$$

Demonstração: Sejam $v = x_1v_1 + x_2v_2$, com $v_1 = (\alpha, \beta)$, $v_2 = (\beta, \alpha)$ e $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$v = x_1(\alpha, \beta) + x_2(\beta, \alpha) = (x_1\alpha + x_2\beta, x_1\beta + x_2\alpha).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \| v \|^2 &= (x_1\alpha + x_2\beta)^2 + (x_1\beta(+x_2\alpha)^2 \\ &= x_1^2\alpha^2 + x_2^2\beta^2 + x_1^2\beta^2 + x_2^2\alpha^2 + 4x_1x_2\alpha\beta \\ &= (\alpha^2+\beta^2)(x_1^2+x_2^2) + 4x_1x_2\alpha\beta. \end{aligned}$$

Como $\alpha^2 + \beta^2 = a_0$ e $\alpha\beta = \frac{-a_1\sqrt{-\Delta}}{4}$, segue que $\| v \|^2 = a_0(x_1^2 + x_2^2) - a_1\sqrt{-\Delta}x_1x_2$, o que prova a proposição. ∎

Teorema 2: [5] Se $a_0 = a_1\sqrt{-\Delta}$, então o reticulado Λ_p possui densidade de centro ótima em dimensão 2.

Demonstração: Seja $v = x_1v_1 + x_2v_2$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ um vetor de Λ_p. Pela Proposição (3), segue que $\| v \|^2 = a_0(x_1^2 + {x_2}^2) - a_1\sqrt{-\Delta}x_1x_2$. Como $a_0 = a_1\sqrt{-\Delta}$, segue que a forma quadrática $\| v \|^2 = a_1(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2)$ assume o valor mínimo a_0 quando $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$. Logo,

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{a_0}}{2}. \tag{9}$$

Agora,

$$|\det(M)| = \frac{a_1^2}{2} - a_0 = \frac{a_1^2}{2} - a_1\sqrt{-\Delta}. \tag{10}$$

Assim, a densidade de centro de Λ_p é dada por

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^2}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{\sqrt{a_0}}{2})^2}{\frac{a_1^2}{2} - a_0} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2(a_1 - 2\sqrt{-\Delta})} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 2. ∎

V. CONSTRUÇÕES DE RETICULADOS DE DIMENSÃO 3

Sejam $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ as raízes de $p(x)$. O discriminante de $p(x)$ é dado por $\Delta = 18a_0a_1a_2 - 4a_2^3a_0 + a_2^2a_1^2 - 4a_1^3 - 27a_0^2$. Para que as raízes de $p(x)$ sejam reais é necessário e suficiente que $\Delta \geq 0$.

A. Com uma raiz real tripla

Seja $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ com uma raiz tripla $\alpha \in \mathbb{R}$. Neste caso, $p(x) = (x-\alpha)^3 = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3$, e assim, $a_2 = -3\alpha$, $a_1 = 3\alpha^2$ e $a_0 = -\alpha^3$.

Um polinômio $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, com $a_2 \neq 0$, tem raiz tripla $\alpha = -\frac{a_2}{2} \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $a_2^2 = 3a_1$ e $a_2^3 = 27a_0$.

Seja o reticulado Λ_p do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (\alpha, 0, \alpha)$, $v_2 = (\alpha, \alpha, 0)$ e $v_3 = (0, \alpha, \alpha)$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{11}$$

e $\det(M) = 2\alpha^3$. Se $v \in \Lambda_p$, então $v = x_1(\alpha, \alpha, 0) + x_2(0, \alpha, \alpha) + x_3(\alpha, 0, \alpha)$, onde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$. Assim, $v = ((x_1+x_3)\alpha, (x_1+x_2)\alpha, (x_2+x_3)\alpha$ e $\| v \|^2 = (x_1+x_3)^2\alpha^2 + (x_1+x_2)^2\alpha^2 + (x_2+x_3)^2\alpha^2 = \alpha^2[(x_1+x_3)^2 + (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2]$. Essa forma quadrática assume valor mínimo $2\alpha^2$ quando $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$. Como

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{2} = \frac{|\alpha|\sqrt{2}}{2}, \tag{12}$$

segue que

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^3}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{|\alpha|\sqrt{2}}{2})^3}{|2\alpha^3|} = \frac{\frac{2\sqrt{2}|\alpha|^3}{2^3}}{|2\alpha^3|^3} = \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 3.

B. Com raízes reais distintas ou somente uma raiz real dupla

Consideramos quando as 3 raízes são reais e distintas ou quando possui somente 2 raízes iguais e uma distinta. Neste caso, segue que $a_2^2 \neq 3a_1$ ou $a_2^3 \neq 27a_0$.

Seja $\Lambda_p \subset \mathbb{R}^3$ o reticulado gerado pela base $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$, $v_2 = (\gamma, \alpha, \beta)$ e $v_3 = (\beta, \gamma, \alpha)$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Proposição 4: [5] O determinante de M é dado por

$$\det(M) = -a_2(a_2^2 - 3a_1).$$

Demonstração: O determinante da matriz M é dado por

$$\det(M) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma.$$

Pelas relações de Girard, segue que

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a_2 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = a_1 \\ \alpha\beta\gamma = -a_0. \end{cases}$$

Assim,

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma - 3a_2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma),$$

e desse modo,

$$\begin{aligned} \det(M) &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)^3 + 3a_2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= -a_2^3 + 3a_1a_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Portanto, $\det(M) = -a_2(a_2^2 - 3a_1)$. ∎

Proposição 5: [5] Se $v \in \Lambda_p$ é tal que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, então

$$\| v \|^2 = (a_2^2 - 2a_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2a_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Demonstração: Como $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$, segue que $v = x_1(\alpha, \beta, \gamma) + x_2(\gamma, \alpha, \beta) + x_3(\beta, \gamma, \alpha) = (\alpha x_1 + \gamma x_2 + \beta x_3, \beta x_1 + \alpha x_2 + \gamma x_3, \gamma x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3)$. Como $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$, segue que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = a_2^2 - 2a_1$. Assim,

$$\begin{aligned} \| v \|^2 &= (\alpha x_1 + \gamma x_2 + \beta x_3)^2 + (\beta x_1 + \alpha x_2 + \gamma x_3)^2 \\ &\quad + (\gamma x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3)^2 \\ &= (a_2^2 - 2a_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad + 2a_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \end{aligned}$$

o que prova a proposição. ∎

Teorema 3: [5] Se

$$a_2^2 = 4a_1 \quad \text{e} \quad a_0(18a_1a_2 - 4a_2^3 - 27a_0) \geq 0,$$

então o reticulado Λ_p possui densidade de centro ótima.

Demonstração: Pela Proposição 5, segue que

$$\begin{aligned} \| v \|^2 &= (a_2^2 - 2a_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad +2a_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= 2a_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3). \end{aligned}$$

Essa forma quadrática assume valor mínimo $2a_1$ quando $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$. Logo,

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{2a_1}}{2}. \quad (15)$$

Agora, pela Proposição (4), segue que

$$|\det(M)| = |-a_2(a_2^2 - 3a_1)| = |a_1a_2|. \quad (16)$$

Assim, a densidade de centro de Λ_p é dada por

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^3}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{\sqrt{2a_1}}{2})^3}{|a_1a_2|} = \frac{\frac{2\sqrt{2}a_1\sqrt{a_1}}{2^3}}{2a_1\sqrt{a_1}} = \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 3. ∎

C. Com raízes complexas

Seja o polinômio $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$. O discriminante da equação $p(x) = 0$ é dado por $\Delta = 18a_0a_1a_2 - 4a_2^3a_0 + a_2^2a_1^2 - 4a_1^3 - 27a_0^2$. A equação $p(x) = 0$ tem raízes complexas se, e somente se, $\Delta < 0$. Sejam α, λ_1 e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ as raízes da equação $p(x) = 0$, onde $\lambda_1 = \beta + i\gamma$ e $\gamma \neq 0$. Assim, $p(x) = (x-\alpha)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^3 + (-2\beta - \alpha)x^2 + ((\beta^2+\gamma^2) + 2\alpha\beta)x - \alpha(\beta^2+\gamma^2)$, e desse modo,

$$\begin{cases} a_2 = -2\beta - \alpha \\ a_1 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta \\ a_0 = -\alpha(\beta^2 + \gamma^2) \end{cases} \quad (17)$$

Seja o reticulado Λ_p do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$, $v_2 = (\gamma, \alpha, \beta)$ e $v_3 = (\beta, \gamma, \alpha)$. A matriz geradora é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Nesto caso, $\det(M) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$. Além disso, se $v \in \Lambda_p$ é tal que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, então,

$$\begin{aligned} \| v \|^2 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad +2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3). \end{aligned}$$

1) Construção 1: Consideramos o caso em que $\beta = 0$ e o reticulado Λ é gerado pelos vetores $v_1 = (\alpha, 0, \gamma)$, $v_2 = (\gamma, \alpha, 0)$ e $v_3 = (0, \gamma, \alpha)$. Como $\beta = 0$, segue que $a_2 = -\alpha$, $a_1 = \gamma^2$ e $a_0 = -\alpha\gamma^2 = a_1a_2$. Neste caso, a matriz geradora de Λ é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \gamma & \alpha & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (19)$$

e $\det(M) = \alpha^3 + \gamma^3$. Agora, se $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 \in \Lambda$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, então $v = x_1(\alpha, \gamma) + x_2((\gamma, \alpha, 0) + x_3(0, \gamma, \alpha) = (x_1\alpha + x_2\gamma, x_2\alpha +, x_3\gamma, x_1\gamma + x_3\alpha)$. Assim,

$$\begin{aligned} \| v \|^2 &= x_1^2\alpha^2 + 2x_1x_2\alpha\gamma + x_2^2\gamma^2 + x_2^2\alpha^2 + 2x_2x_3\alpha\gamma \\ &\quad +x_3^2\gamma^2 + x_1\gamma^2 + 2x_1x_3\alpha\gamma + x_3^2\alpha^2 \\ &= (\alpha^2 + \gamma^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad +2\alpha\gamma(x_1 + x_2 + x_1x_3 + x_2x_3). \end{aligned} \quad (20)$$

Teorema 4: $\beta = 0$ se, e somente se, $a_0 = a_1a_2$.

Demonstração: Se $\beta = 0$, então $\alpha = -a_2$, $a_1 = \gamma^2$ e $a_0 = -\alpha\gamma^2$, ou seja, $a_0 = a_1a_2$. Assim,

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_1a_2,$$

com $a_1a_2 \neq 0$. Reciprocamente, se $a_0 = a_1a_2$, então $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_1a_2$, com $a_1a_2 \neq 0$. Logo,

$$\begin{cases} a_2 = -2\beta - \alpha \\ a_1 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta \\ a_1a_2 = -\alpha(\beta^2 + \gamma^2) \end{cases} \quad (21)$$

Assim, $a_1a_2 = (-\alpha - 2\beta)(\beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta) = -\alpha(\beta^2 + \gamma^2)$, ou seja, $2\beta(\alpha^2 + 2\beta\alpha + \beta^2 + \gamma^2) = 0$. Se $\beta \neq 0$, então $\alpha^2 + 2\beta\alpha + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Assim, o seu discriminante é dado por $-4\gamma^2 < 0$, o que é um absurdo. Portanto, $\beta = 0$. ∎

Proposição 6: Se $a_2 < 0$ e $a_1 = a_2^2$, então $\det(M) = -2a_2^3$ e $\| v \|^2 = 2a_2^2(x_1^2 + x_2 + x_3)^2$.

Demonstração: Como $a_2 < 0$ e $a_1 = a_2^2$, segue que $\gamma = -a_2$. Agora, substituindo nas Equações (19) e (20), segue que $\det(M) = \alpha^3 + \gamma^3 = -2a_2^3$ e $\| v \|^2 = 2a_2^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2$. ∎

Corolário 2: Se $a_2 < 0$ e $a_1 = a_2^2$, então o reticulado $\Lambda = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$ tem densidade de centro igual a $\frac{1}{4\sqrt{2}}$, sendo o máximo obtido em dimensão 3.

Demonstração: Com $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$, segue que $\| v \|^2 = 2a_2^2$ é o mínimo da forma quadrática, ou seja, $\Lambda_{min} = 2a_2^2$. Por definição, $\rho = \frac{\sqrt{2a_2^2}}{2} = \frac{|a_2|\sqrt{2}}{2}$. Logo, $\delta(\Lambda) = \frac{\rho^3}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{\sqrt{2a_a^2}}{2})^3}{|2a_2^3|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$ que é a densidade de centro ótima para a dimensão 3. ∎

2) Construção 2: Consideramos o caso em que $\alpha = 0$, ou seja, o reticulado Λ_p é gerado pelos vetores $v_1 = (0, \beta, \gamma)$, $v_2 = (\gamma, 0, \beta)$ e $v_3 = (\beta, \gamma, 0)$, com $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$. Neste caso, a matriz geradora do reticulado Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \beta \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

e $\det(M) = \beta^3 + \gamma^3$. Como $\alpha = 0$, segue que $a_2 = -2\beta$, $a_1 = \beta^2 + \gamma^2$ e $a_0 = 0$. Assim, $\Delta = a_2^2a_1^2 - 4a_1^3 = a_1^2(a_2^2 - 4a_1) < 0$, ou seja, $a_2^2 - 4a_1 < 0$, $\beta = -\frac{a_2}{2}$ e $\gamma = \pm\sqrt{a_1 - \frac{a_2^2}{4}}$, e portanto,

$$\det(M) = -\frac{a_2^3}{8} \pm (a_1 - \frac{a_2^2}{4})\sqrt{a_1 - \frac{a_2^2}{4}}.$$

Além disso, se $v \in \Lambda_p$ é tal que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$, com $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, então

$$\| v \|^2 = (\beta^2 + \gamma^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2\beta\gamma(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

Assim,

$$\| v \|^2 = a_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \pm a_2\sqrt{a_1 - \frac{a_2^2}{4}}(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3). \tag{23}$$

Proposição 7: Se $a_2^2 = 2a_1$, então $\| v \|^2 = \frac{a_2^2}{2}((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \pm (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3))$.

Demonstração: Substituindo $a_1 = \frac{a_2^2}{2}$ na Equação (23), segue que

$$\begin{aligned} \| v \|^2 &= \tfrac{a_2^2}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad \pm a_2\sqrt{\tfrac{a_2^2}{2} - \tfrac{a_2^2}{4}}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= \tfrac{a_2^2}{2}((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \pm (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)). \end{aligned}$$

Com $x_1 = 1$ e $x_2 = x_3 = 0$, segue que $\| v \|^2 = \frac{a_2^2}{2} = a_1$ é o mínimo da forma quadrática, ou seja, $\Lambda_{min} = a_1$. ■

Corolário 3: Se $a_2 > 0$, $\gamma < 0$ e $a_2^2 = 2a_1$, então o reticulado $\Lambda = \{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$ tem densidade de centro igual a $\frac{1}{4\sqrt{2}}$, sendo o máximo obtido em dimensão 3.

Demonstração: Como $a_2 > 0$, $\delta < 0$ e $a_2^2 = 2a_1$, segue que $\det(M) = \beta^3 + \gamma^3 = -\frac{a_2^3}{4}$. Por definição, $\rho = \frac{\sqrt{a_1}}{2} = \frac{a_2}{2\sqrt{2}}$. Logo,

$$\delta(\Lambda) = \frac{\rho^3}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{\sqrt{a_2}}{2\sqrt{2}})^3}{|-\frac{a_2^3}{4}|} = \frac{1}{4\sqrt{2}},$$

ou seja, o reticulado possui densidade de centro ótima para a dimensão 3. ■

VI. Construções de reticulados de dimensão 4

Seja $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ com uma raiz dupla $\alpha \in \mathbb{R}$ e duas raízes nulas. Neste caso, $p(x) = x^2(x - \alpha)^2 = x^4 - 2\alpha x^3 + \alpha^2x^2$, e assim, $a_3 = -2\alpha$ e $a_2 = \alpha^2$.

Seja o reticulado Λ_p do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde $v_1 = (\alpha, -\alpha, 0, 0)$, $v_2 = (0, \alpha, \alpha, 0)$, $v_3 = (0, 0, \alpha, \alpha)$ e $v_4 = (\alpha, 0, 0, \alpha)$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{24}$$

e $\det(M) = 2\alpha^4$. Se $v \in \Lambda_p$, então $v = x_1(\alpha, -\alpha, 0, 0) + x_2(0, \alpha, \alpha, 0) + x_3(0, 0, \alpha, \alpha) + x_4(\alpha, 0, 0, \alpha)$, onde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$. Assim, $v = ((x_1 + x_4)\alpha, (-x_1 + x_2)\alpha, (x_2 + x_3)\alpha, (x_3 + x_4)\alpha)$ e $\| v \|^2 = \alpha^2((x_1 + x_4)^2 + (-x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2)$. Essa forma quadrática assume valor mínimo $2\alpha^2$ quando $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$ e $x_4 = 0$. Como

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{2\alpha^2}}{2} = \frac{|\alpha|\sqrt{2}}{2}, \tag{25}$$

segue que

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^4}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{|\alpha|\sqrt{2}}{2})^4}{|2\alpha^4|} = \frac{\frac{2^2\alpha^4}{2^4}}{2\alpha^4} = \frac{1}{8},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 4.

VII. Construções de reticulados de dimensão 5

Seja $p(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ com uma raiz dupla $\alpha \in \mathbb{R}$ e três raízes nulas. Neste caso, $p(x) = x^3(x - \alpha)^2 = x^5 - 2\alpha x^4 + \alpha^2x^3$, e assim, $a_4 = -2\alpha$ e $a_3 = \alpha^2$.

Proposição 8: Um polinômio $p(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, com $a_4 \neq 0$, tem uma raiz dupla $\alpha \in \mathbb{R}$ e três raízes nulas se, e somente se, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ e $a_4^2 = 4a_3$.

Demonstração: Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma raiz dupla de $p(x)$ e as demais são raízes nulas, então $p(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3(x - \alpha)^2 = x^5 - 2\alpha x^4 + \alpha^2x^3$. Assim, $a_4 = -2\alpha$, $a_3 = \alpha^2$ e $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, e portanto, $a_4^2 = 4a_3$. Reciprocamente, se $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ e $a_4^2 = 4a_3$, então $p(x) = x^5 + a_4x^4 + \frac{a_4^2}{4}x^3 = x^3(x^2 + a_4x + \frac{a_4^2}{4}) = x^3(x + \frac{a_4}{2})^2$. Assim, $\alpha = -\frac{a_4}{2}$ é uma dupla e com duas raízes nulas. ■

Seja o reticulado Λ_p do $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, onde $v_1 = (\alpha, \alpha, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, \alpha, \alpha, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, \alpha, \alpha, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, \alpha, \alpha)$ e $v_5 = (\alpha, 0, 0, 0, \alpha)$. A matriz geradora de Λ_p é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{26}$$

e $\det(M) = 2\alpha^5$. Se $v \in \Lambda_p$, então $v = x_1(\alpha, \alpha, 0, 0, 0) + x_2(0, \alpha, \alpha, 0, 0) + x_3(0, 0, \alpha, \alpha, 0) + x_4(0, 0, 0, \alpha, \alpha) + x_5(\alpha, 0, 0, 0, \alpha)$, onde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$. Assim, $v = ((x_1 + x_5)\alpha, (x_1 + x_2)\alpha, (x_2 + x_3)\alpha, (x_3 + x_4)\alpha, (x_4 + x_5)\alpha)$ e $\| v \|^2 = \alpha^2((x_1 + x_5)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_5)^2)$. Essa forma quadrática assume valor mínimo $2\alpha^2$ quando $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Como

$$\rho = \frac{\Lambda_{min}}{2} = \frac{\sqrt{2\alpha^2}}{2} = \frac{|\alpha|\sqrt{2}}{2}, \tag{27}$$

segue que

$$\delta(\Lambda_p) = \frac{\rho^5}{|\det(M)|} = \frac{(\frac{|\alpha|\sqrt{2}}{2})^5}{|2\alpha^5|} = \frac{\frac{2^2|\alpha^5|\sqrt{2}}{2^5}}{|2\alpha^5|} = \frac{\sqrt{2}}{2^4} = \frac{1}{8\sqrt{2}},$$

que é a densidade de centro ótima para a dimensão 5.

Referências

[1] G. C. Jorge, A. A. Andrade; S. I. R. Costa and J. E. Strapasson, *Algebraic constructions of densest lattices*, Journal of Algebra, 429, 218-235, 2015.

[2] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, 3rd Edition, Springer Verlag, New York, 1999.

[3] L. E. Dickson, *First course in the theory of equations*, John Wiley & Sons, Inc, London, 1922.

[4] F. Oggier, *Algebraic methods for channel coding*, Tese de doutorado, École Polytechnique Fédérale de Laisanne, 2005.

[5] T. M Souza, *Reticulados algébricos em corpos de números abelianos*. Dissertação de Mestrado em Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Ibilce), Universidade Estadual Paulista (Unesp), São José do Rio Preto - SP, 2004.