

Modelagem Estocástica do Algoritmo CLMS Aplicado à Conformação de Feixe

Artur Adolfo Falkovski, Eduardo Vinicius Kuhn, Ciro André Pitz, Marcos Vinicius Matsuo e Rui Seara

Resumo—Neste artigo, é proposto um modelo estocástico para o algoritmo CLMS (*constrained least-mean-square*) aplicado à conformação de feixe em sistemas de comunicações móveis. Tal algoritmo é formulado com o objetivo de minimizar a potência na saída do arranjo, satisfazendo uma restrição de ganho na direção do sinal de interesse. No modelo proposto, expressões são derivadas descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de coeficientes e a evolução da SINR (*signal-to-interference-plus-noise ratio*), assim como expressões para prever o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de coeficientes e da SINR. Resultados de simulação confirmam a precisão do modelo proposto.

Palavras-chave—Algoritmo CLMS, arranjos adaptativos, comunicação móveis, conformação de feixe, modelagem estocástica.

Abstract—In this paper, a stochastic model is proposed for the constrained least-mean-square (CLMS) algorithm applied to beamforming in mobile communication systems. Such an algorithm is developed in order to minimize the array output power, satisfying a gain constraint in the direction of the signal of interest. In the proposed model, expressions are derived describing the mean weight vector behavior, the weight vector correlation matrix, the evolution of the signal-to-interference-plus-noise ratio (SINR), as well as expressions for predicting the steady-state behavior of the weight vector, of the weight vector correlation matrix, and of the SINR. Simulation results confirm the accuracy of the proposed model.

Keywords—CLMS algorithm, adaptive arrays, mobile communications, beamforming, stochastic modeling.

I. INTRODUÇÃO

Arranjos adaptativos de antenas têm se revelado como uma tecnologia fundamental para melhorar o desempenho dos sistemas de comunicação móveis. Nesses arranjos, o padrão de irradiação é ajustado de modo iterativo através de um algoritmo adaptativo de conformação de feixe, visando maximizar a SINR (*signal-to-interference-plus-noise ratio*) [1], [2]. Dentre os algoritmos de conformação de feixe, o algoritmo CLMS (*constrained least-mean-square*) [3] é amplamente utilizado em arranjos adaptativos de antenas para comunicações móveis devido à sua baixa complexidade computacional e à necessidade apenas do conhecimento prévio do AOA (*angle of arrival*) do SOI (*signal of interest*) [2], [4]. O algoritmo CLMS é derivado em [3] a partir do critério LCMV (*linear-constrained-minimum-variance*). Esse critério é formulado de modo a minimizar a potência de saída do

Artur Adolfo Falkovski e Rui Seara estão vinculados ao LINSE-Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais do Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil (e-mails: artur.adolfo@linse.ufsc.br e seara@linse.ufsc.br).

Eduardo Vinicius Kuhn está vinculado ao LAPSE-Laboratório de Processamento de Sinais e Eletrônica do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, PR, Brasil (e-mail: kuhn@utfpr.edu.br).

Ciro André Pitz e Marcos Vinicius Matsuo estão vinculados ao GEPS-Grupo de Eletrônica e Processamento de Sinais do Departamento de Engenharia de Controle, Automação e Computação da Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau, SC, Brasil (e-mails: ciro.pitz@ufsc.br e marcos.matsuo@ufsc.br).

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

arranjo, atendendo a um conjunto de restrições lineares [2]-[4]. Quando aplicado em sistemas de comunicações móveis, o critério LCMV se reduz ao critério MVDR (*minimum variance distortionless response*) [2], formulado com apenas uma restrição linear visando garantir ganho unitário na direção do SOI.

Na literatura, o desempenho de algoritmos adaptativos é comumente avaliado por meio de simulações de Monte Carlo (MC), as quais em geral são computacionalmente custosas (já que demandam um grande número de realizações). De maneira alternativa, a análise de desempenho de algoritmos adaptativos pode ser realizada por meio de modelos estocásticos. Tais modelos são constituídos por expressões matemáticas que descrevem o comportamento do algoritmo sob análise, permitindo assim efetuar comparações de desempenho (sem a necessidade de extensivas simulações de MC), como também estabelecer relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e as métricas de desempenho. Nesse contexto, a modelagem estocástica do algoritmo CLMS torna-se um tópico relevante abordado até então em alguns poucos trabalhos de pesquisa [3], [5]-[7]. Por exemplo, uma análise do comportamento médio do vetor de coeficientes é dada em [3], na qual são estabelecidas condições de convergência para o vetor ótimo. Na sequência, expressões para prever o desajuste e a matriz de covariância do vetor de coeficientes são desenvolvidas em [5]. Posteriormente, uma expressão de modelo que caracteriza a potência média na saída do arranjo é derivada em [6], a qual é usada para suportar uma discussão sobre a convergência e o desajuste do algoritmo (em concordância com [5]). Já em [7], considerando um problema de identificação de sistema, expressões de modelo para o desvio médio quadrático como também para o desajuste são apresentadas. Contudo, as métricas consideradas em [7] não são tão úteis para se compreender o comportamento do algoritmo operando em arranjos de antenas, uma vez que não evidenciam aspectos fundamentais relacionados ao desempenho de sistemas de comunicação.

Em contraste com os resultados apresentados na literatura até então, o presente trabalho de pesquisa visa desenvolver um modelo estocástico descrevendo o comportamento do algoritmo CLMS aplicado à conformação de feixe para comunicações móveis. Especificamente, este trabalho tem como objetivo:

- i) desenvolver um modelo estocástico que caracterize o comportamento do algoritmo CLMS para sinais de entrada complexos;
- ii) obter expressões de modelo que permitam avaliar o comportamento do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de coeficientes e também da SINR; e
- iii) derivar expressões que descrevam de forma precisa o comportamento do algoritmo tanto na fase transitória quanto em regime permanente.

Este artigo está organizado como segue. A Seção II trata sobre o cenário de operação, o modelo dos sinais e o algoritmo CLMS. A Seção III apresenta a derivação do modelo proposto descrevendo o comportamento do algoritmo CLMS. A Seção IV mostra resultados obtidos com simulações numéricas. Por último, a Seção V traz as conclusões e comentários finais deste trabalho de pesquisa.

A notação matemática adotada segue a prática padrão de utilizar letras minúsculas em negrito para vetores, e letras gregas e romanas em itálico para escalares. Os sobrescritos H e $*$ representam o Hermitiano transposto de uma matriz e o complexo conjugado, respectivamente. Por sua vez, $E(\cdot)$ denota o valor esperado, $\text{tr}(\cdot)$ caracteriza o operador traço, enquanto \otimes e \oplus representam o produto e a soma de Kronecker, respectivamente. Ainda, $\text{vec}(\cdot)$ define o operador de vetorização usado para empilhar as colunas de uma matriz e $\text{unvec}(\cdot)$ o operador inverso de vetorização.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, definições relacionadas ao cenário de operação e conceitos associados ao algoritmo CLMS são discutidos. A fundamentação teórica é dividida em duas partes, sendo que a primeira é dedicada à modelagem dos sinais que chegam ao arranjo, enquanto a segunda revisita o algoritmo CLMS.

A. Modelo dos Sinais

Considera-se aqui um cenário em que a estação rádio base possui um arranjo com M antenas e que K terminais móveis (usuários) compartilham o mesmo canal. Assim, o sinal recebido pelo arranjo de antenas pode ser expresso como

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k=1}^K \mathbf{s}_k(n) + \mathbf{z}(n) \quad (1)$$

sendo $\mathbf{s}_k(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ o sinal do k -ésimo usuário recebido na entrada do arranjo e $\mathbf{z}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$, um ruído aditivo gaussiano branco presente na entrada do arranjo de antenas [1], [2]. Adicionalmente, assumindo que os sinais transmitidos pelos usuários sofrem desvanecimento por multipercurso, $\mathbf{s}_k(n)$ pode ser representado por

$$\mathbf{s}_k(n) = \sqrt{\rho_k} \beta_k(n) \sum_{i=1}^I \alpha_{k,i}(n) \mathbf{u}(\theta_{k,i}) \quad (2)$$

onde ρ_k e $\beta_k(n)$ denotam a potência de transmissão e o símbolo transmitido pelo k -ésimo usuário, respectivamente [1]. Ainda, em (2), I define o número de percursos, $\alpha_{k,i}(n)$ representa o coeficiente aleatório (com função de distribuição de probabilidade de Rayleigh na magnitude e uniforme na fase) que modela o desvanecimento multipercurso, enquanto $\mathbf{u}(\theta_{k,i}) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ é o vetor diretor do i -ésimo percurso proveniente do k -ésimo usuário com AOA igual a $\theta_{k,i}$ (plano azimutal) [1]. Note que, para um ULA (*uniform linear array*), o vetor diretor pode ser expresso como

$$\mathbf{u}(\theta_{k,i}) = \exp \left[-j \frac{2\pi}{\tau} \mathbf{d} \text{sen}(\theta_{k,i}) \right] \quad (3)$$

onde $j = \sqrt{-1}$, τ representa o comprimento de onda e

$$\mathbf{d} = [0, d, \dots, (M-1)d]^T \quad (4)$$

é o vetor que contém a posição relativa de cada antena em relação à antena de referência, sendo d a distância entre duas antenas adjacentes [8], [9].

Por sua vez, o sinal de saída do arranjo é obtido por

$$y(n) = \mathbf{w}^H(n) \mathbf{x}(n) \quad (5)$$

com $\mathbf{w}(n) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ denotando o vetor de coeficientes do filtro adaptativo responsável pela conformação de feixe. Então, visando avaliar a SINR proporcionada por $\mathbf{w}(n)$, a potência média de $y(n)$ é computada como

$$E[|y(n)|^2] = \mathbf{w}^H(n) \mathbf{R}_x \mathbf{w}(n) \quad (6)$$

onde¹

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)] \\ &= \sum_{k=1}^K \rho_k \mathbf{R}_k + \sigma_z^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (7)$$

é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada, na qual

$$\mathbf{R}_k = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \mathbf{u}(\theta_{k,i}) \mathbf{u}^H(\theta_{k,i}) \quad (8)$$

representa a matriz de covariância espacial do k -ésimo usuário, σ_z^2 caracteriza a variância do ruído e \mathbf{I} é uma matriz identidade de dimensão $M \times M$. Por fim, assumindo que o índice $k = j$ em (7) corresponde ao SOI, a SINR é obtida a partir de (6) como

$$\gamma(n) = \frac{\mathbf{w}^H(n) \mathbf{R}_{\text{soi}} \mathbf{w}(n)}{\mathbf{w}^H(n) \mathbf{R}_{\text{int}} \mathbf{w}(n)} \quad (9)$$

com

$$\mathbf{R}_{\text{soi}} = \rho_j \mathbf{R}_j \quad (10)$$

e

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^K \rho_k \mathbf{R}_k + \sigma_z^2 \mathbf{I} \quad (11)$$

denotando as matrizes de autocorrelação do SOI e dos sinais interferentes mais o ruído, respectivamente.

B. Algoritmo CLMS

O algoritmo CLMS é originalmente derivado em [3] a partir do critério LCMV. Tal critério tem por objetivo minimizar a potência de saída do arranjo, atendendo a um conjunto de restrições lineares, podendo ser matematicamente formulado através do seguinte problema de otimização:

$$\underset{\mathbf{w}}{\text{minimizar}} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}, \quad \text{sujeito a} \quad \mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{g} \quad (12)$$

onde $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ é uma matriz que concatena o vetor diretor associado com cada uma das L restrições e $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ é um vetor contendo o ganho fixado para cada restrição. Então, de acordo com [3], [11], a solução ótima (denotada aqui por \mathbf{w}_o) para o problema de otimização (12) é obtida como

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{g}. \quad (13)$$

Note em (13) que a obtenção do vetor de coeficientes ótimo \mathbf{w}_o requer o conhecimento *a priori* da matriz \mathbf{R}_x , a qual usualmente não está prontamente disponível. Para contornar esse problema, o algoritmo CLMS é então derivado considerando o uso de $\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n)$ como uma aproximação instantânea de \mathbf{R}_x em conjunto com o método do gradiente descendente. Como resultado, a seguinte equação de atualização do vetor de coeficientes é obtida [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{P}[\mathbf{w}(n) - \mu \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) \mathbf{w}(n)] + \mathbf{f} \\ &= \mathbf{P}[\mathbf{w}(n) - \mu y^*(n) \mathbf{x}(n)] + \mathbf{f} \end{aligned} \quad (14)$$

onde

¹ Note que (7) é obtida assumindo potência média unitária para cada usuário, bem como desvanecimento multipercurso normalizado e independente [10].

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H \quad (15)$$

é uma matriz de projeção ortogonal e

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H\mathbf{C})^{-1}\mathbf{g}. \quad (16)$$

Vale salientar que, para o critério MVDR [2] (que considera apenas uma restrição de ganho na direção do SOI), (15) e (16) podem ainda ser simplificadas, respectivamente, como

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{u}(\bar{\theta}_j)[\mathbf{u}^H(\bar{\theta}_j)\mathbf{u}(\bar{\theta}_j)]^{-1}\mathbf{u}(\bar{\theta}_j)^H \quad (17)$$

e

$$\mathbf{f} = \mathbf{u}(\bar{\theta}_j)[\mathbf{u}^H(\bar{\theta}_j)\mathbf{u}(\bar{\theta}_j)]^{-1} \quad (18)$$

com $\bar{\theta}_j$ denotando o AOA médio entre os caminhos multipercurso associados ao SOI.

III. MODELO PROPOSTO

Nesta seção, é apresentada a dedução matemática do modelo estocástico proposto para o algoritmo CLMS. Particularmente, expressões de modelo são aqui derivadas descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de coeficientes e a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes, da matriz de correlação do vetor de coeficientes e da SINR. Para tornar possível a derivação dessas expressões, o seguinte conjunto de hipóteses simplificativas é adotado:

H1) As variáveis $\mathbf{w}(n)$ e $\mathbf{x}(n)$ são assumidas estatisticamente independentes entre si [3], [5].

H2) O AOA do SOI é assumido ser conhecido *a priori* e não varia com o tempo; logo, \mathbf{P} e \mathbf{f} são constantes durante todo o processo de adaptação [3], [5], [6].

Note que, na modelagem estocástica de algoritmos adaptativos, é uma prática comum estabelecer as condições de operação em que o modelo vale, assumir conhecimento *a priori* das variáveis envolvidas e introduzir algumas hipóteses simplificativas para tornar o desenvolvimento matematicamente tratável (como apropriadamente discutido em [12] e [13]).

A. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Visando derivar uma expressão que descreva o comportamento médio do vetor de coeficientes, é tomado o valor esperado de ambos os lados de (14) e consideradas as Hipóteses H1) e H2). Assim,

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)E[\mathbf{w}(n)] + \mathbf{f}. \quad (19)$$

Portanto, o comportamento médio do vetor de coeficientes pode ser predito a partir de (19) com o conhecimento da condição inicial $\mathbf{w}(0)$ e da matriz de autocorrelação do sinal de entrada \mathbf{R}_x [dada em (7)]. Vale salientar que (19) está em concordância com o resultado apresentado em [3].

B. Evolução da SINR

Com o objetivo de se obter uma expressão caracterizando a evolução da SINR, é determinado o valor esperado de ambos os lados de (9), considerada a Hipótese H1) e assumido que o numerador e denominador são estatisticamente independentes tal que o AP (*averaging principle*) [14] possa ser utilizado. Dessa forma,

$$E[\gamma(n)] \cong \frac{E[\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}_{\text{soi}}\mathbf{w}(n)]}{E[\mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}_{\text{int}}\mathbf{w}(n)]}. \quad (20)$$

Em seguida, aplicando o operador traço sobre o numerador e

denominador de (20), tem-se

$$E[\gamma(n)] \cong \frac{\text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\text{soi}}]}{\text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_{\text{int}}]} \quad (21)$$

onde

$$\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)] \quad (22)$$

representa a matriz de correlação do vetor de coeficientes. Consequentemente, a evolução da SINR pode ser completamente predita se $\mathbf{K}(n)$ for conhecida.

C. Matriz de Correlação do Vetor de Coeficientes

Visando derivar uma recursão para o cálculo da matriz de correlação do vetor de coeficientes, determina-se o produto $\mathbf{w}(n+1)\mathbf{w}^H(n+1)$ a partir de (14), toma-se o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utiliza-se as Hipóteses H1) e H2). Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{P}\{\mathbf{K}(n) + \mu^2\mathbf{R}'(n) - \mu[\mathbf{R}_x\mathbf{K}(n) + \mathbf{K}(n)\mathbf{R}_x]\}\mathbf{P} \\ &\quad + \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)E[\mathbf{w}(n)]\mathbf{f}^H + \mathbf{f}\mathbf{f}^H + \mathbf{f}E[\mathbf{w}^H(n)](\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)\mathbf{P} \end{aligned} \quad (23)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(n) &= E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)] \\ &= \mathbf{R}_x\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x\text{tr}[\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_x] \end{aligned} \quad (24)$$

representa o momento de quarta ordem ponderado de variáveis gaussianas complexas. (Note que a segunda linha do lado direito de (24) advém do teorema de fatoração de variáveis gaussianas [13].) Portanto, levando em consideração (24) e a condição inicial

$$\mathbf{K}(0) = E[\mathbf{w}(0)\mathbf{w}^H(0)] \quad (25)$$

a matriz de correlação do vetor de coeficientes pode ser computada recursivamente através de (23).

D. Comportamento do Algoritmo em Regime Permanente

Aqui, são derivadas expressões descrevendo o comportamento do algoritmo em regime permanente; especificamente, expressões são obtidas para o vetor de coeficientes e a SINR em regime permanente. Nesse contexto, uma expressão para o vetor de coeficientes em regime permanente $E[\mathbf{w}(\infty)]$ pode ser obtida tomando o limite para $n \rightarrow \infty$ de ambos os lados de (19) e assumindo convergência [13], o que resulta em

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)E[\mathbf{w}(\infty)] + \mathbf{f}. \quad (26)$$

Então, resolvendo (26) para $E[\mathbf{w}(\infty)]$, tem-se

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = [\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)]^{-1}\mathbf{f}. \quad (27)$$

Dado que $\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)$ possui posto completo, é possível inferir que (27) também é uma solução válida para (12), sendo equivalente ao resultado dado por (13) como discutido em [3].

Na sequência, uma expressão caracterizando a SINR em regime permanente é derivada fazendo $n \rightarrow \infty$ de ambos os lados de (21), produzindo assim

$$E[\gamma(\infty)] \cong \frac{\text{tr}[\mathbf{K}(\infty)\mathbf{R}_{\text{soi}}]}{\text{tr}[\mathbf{K}(\infty)\mathbf{R}_{\text{int}}]} \quad (28)$$

onde $\mathbf{K}(\infty)$ é a matriz de correlação do vetor de coeficientes em regime permanente. Por sua vez, uma expressão para $\mathbf{K}(\infty)$ pode ser determinada substituindo (24) em (23), tomando o limite para $n \rightarrow \infty$ de ambos os lados e assumindo convergência, o que resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\infty) = & \mathbf{P}\{\mathbf{K}(\infty) + \mu^2 \mathbf{R}_x \mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_x + \mu^2 \mathbf{R}_x \text{tr}[\mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_x] \\ & - \mu[\mathbf{R}_x \mathbf{K}(\infty) + \mathbf{K}(\infty) \mathbf{R}_x]\} \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{E}[\mathbf{w}(\infty)] \mathbf{f}^H \\ & + \mathbf{f} \mathbf{E}[\mathbf{w}^H(\infty)] (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{P} + \mathbf{f} \mathbf{f}^H. \end{aligned} \quad (29)$$

Note que uma solução para obter $\mathbf{K}(\infty)$ não pode ser diretamente determinada de (29). Então, visando explicitar $\mathbf{K}(\infty)$ em ambos os lados de (29), é utilizado o operador de vetorização $\text{vec}(\cdot)$ para empilhar as colunas de uma matriz juntamente com as seguintes propriedades [15, p. 405]:

$$\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{X}) \quad (30)$$

$$\text{vec}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{I}) \text{vec}(\mathbf{A}) \quad (31)$$

e

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{vec}(\mathbf{A}^T)^T \text{vec}(\mathbf{B}). \quad (32)$$

Dessa forma, aplicando o operador vetorização de ambos os lados de (29), usando (30)-(32) e resolvendo a expressão resultante para $\text{vec}[\mathbf{K}(\infty)]$, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{vec}[\mathbf{K}(\infty)] = & \{\mathbf{I}_{M^2} - (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{P})[\mathbf{I}_{M^2} - \mu(\mathbf{R}_x^T \oplus \mathbf{R}_x) \\ & + \mu^2 \mathbf{R}_x^T \otimes \mathbf{R}_x + \mu^2 \text{vec}(\mathbf{R}_x) \text{vec}(\mathbf{R}_x^T)^T]\}^{-1} \\ & \text{vec}\{\mathbf{P}(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{E}[\mathbf{w}(\infty)] \mathbf{f}^H + \mathbf{f} \mathbf{f}^H \\ & + \mathbf{f} \mathbf{E}[\mathbf{w}^H(\infty)] (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}_x) \mathbf{P}\} \end{aligned} \quad (33)$$

onde \mathbf{I}_{M^2} é uma matriz identidade com dimensão $M^2 \times M^2$, enquanto \otimes e \oplus representam, respectivamente, o produto e a soma de Kronecker [15]. Como resultado, $\mathbf{K}(\infty)$ pode ser obtida aplicando o operador inverso de vetorização $\text{unvec}(\cdot)$ [15] de ambos os lados de (33), isto é,

$$\mathbf{K}(\infty) = \text{unvec}\{\text{vec}[\mathbf{K}(\infty)]\}. \quad (34)$$

Portanto, dado \mathbf{R}_x e $\mathbf{E}[\mathbf{w}(\infty)]$, a matriz de correlação do vetor de coeficientes em regime permanente pode ser determinada; conseqüentemente, assumindo \mathbf{R}_{soi} e \mathbf{R}_{int} conhecidas, torna-se possível prever a SINR em regime permanente a partir de (28).

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, simulações numéricas são mostradas visando comparar os resultados preditos através do modelo proposto com aqueles obtidos através de simulações de MC (200 realizações independentes). Para tal, dois exemplos são apresentados considerando um arranjo composto por antenas espaçadas de meio comprimento de onda. Nesses exemplos, os símbolos dos sinais transmitidos pelos usuários são gerados a partir de modulação 16-QAM. Assume-se que existe apenas um SOI com AOA de $\theta_j = 30^\circ$, SIR (*signal-to-interference ratio*) de 0 dB para todos os sinais interferentes e uma SNR (*signal-to-noise ratio*) de 30 dB. Além disso, os sinais que atingem o arranjo percorrem $I=12$ caminhos de desvanecimento multipercurso com dispersão (em torno do AOA médio) de $\Delta\theta = 3^\circ$ e $\Delta\theta = 20^\circ$. Nos exemplos apresentados, o vetor de coeficientes do filtro adaptativo é inicializado com $\mathbf{w}(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ e o passo de adaptação é fixado em $\mu = 0,004$ para avaliação das expressões de modelo durante a fase transitória do algoritmo. Ainda, para analisar a SINR em regime permanente, resultados experimentais (simulações de MC) são obtidos a partir da média das últimas 100 iterações após a convergência (conforme descrito em [13, p. 250]).

A. Exemplo 1

Neste exemplo, considera-se um arranjo com $M=10$ antenas, $K=7$ usuários compartilhando o mesmo canal e uma única restrição em (12) que garante ganho unitário na direção do SOI. Os sinais interferentes chegam no arranjo com AOA de $-60^\circ, -50^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 40^\circ$ e 70° .

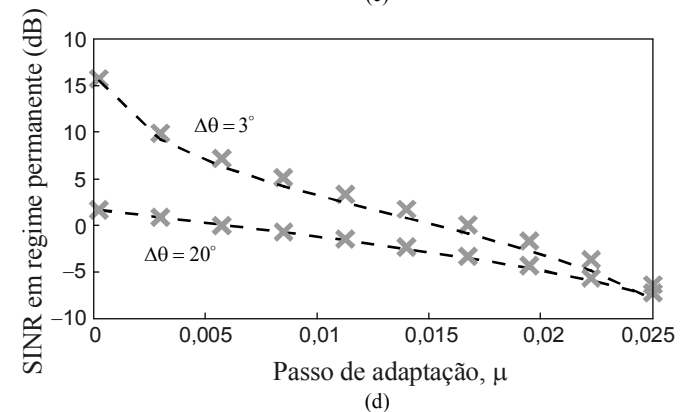
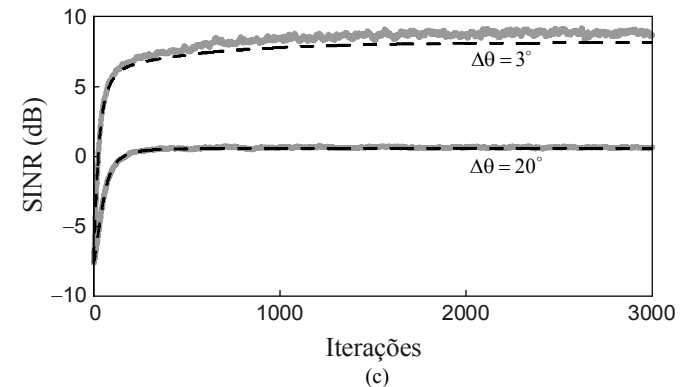
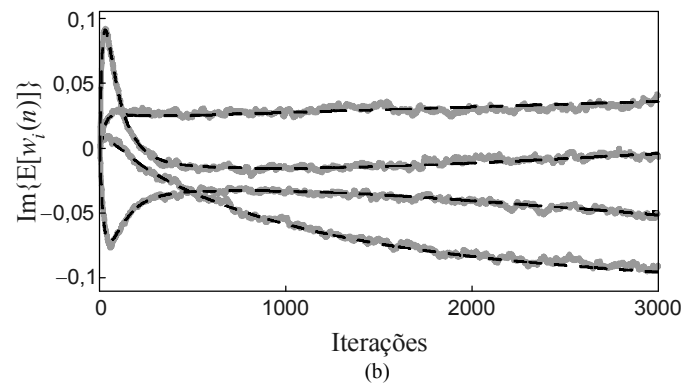
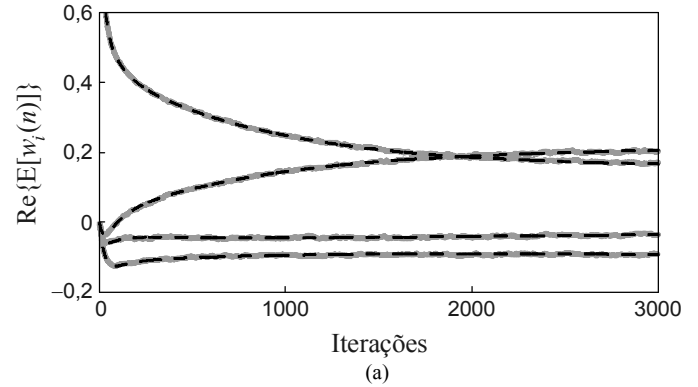


Fig. 1. Exemplo 1. (a)-(b) Comportamento médio das partes real e imaginária dos coeficientes do filtro adaptativo ($i = 1, 4, 5$ e 9) para $\Delta\theta = 3^\circ$. (c) Evolução da SINR (dB). (d) SINR em regime permanente (dB). (Linhas e marcadores cinza) simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto.

B. Exemplo 2

Este exemplo considera $L=3$ restrições em (12), sendo duas delas responsáveis por atribuir ganho zero para os ângulos de -34° e 76° , e uma outra para garantir ganho unitário na direção do SOI. O arranjo contém agora $M=12$ antenas e existem $K=10$ usuários compartilhando o mesmo canal. O AOA de cada sinal interferente é $-70^\circ, -35^\circ, -33^\circ, -20^\circ, 0^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ e 77° .

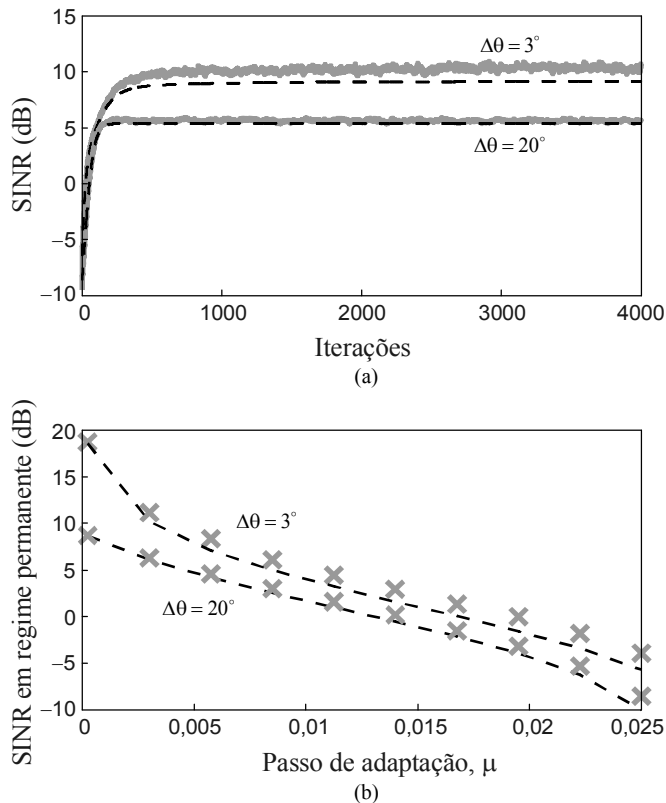


Fig. 2. Exemplo 2. (a) Evolução da SINR (dB). (b) SINR em regime permanente (dB). (Linhas e marcadores cinza) simulação de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto.

C. Discussão

As Figs. 1 e 2 mostram os resultados obtidos a partir de simulações de MC e previsões de modelo para os cenários descritos nos Exemplos 1 e 2, respectivamente. Especificamente, as Figs. 1(a) e 1(b) exibem (por simplicidade) o comportamento médio de apenas quatro coeficientes, as Figs. 1(c) e 2(a) apresentam a evolução da SINR, enquanto as Figs. 1(d) e 2(b) ilustram o comportamento da SINR em regime permanente como função do passo de adaptação. Observa-se a partir dessas figuras que valores altos de SINR em regime permanente são alcançados para valores pequenos de dispersão $\Delta\theta$ [veja as Figs. 1(c), 1(d) e 2]; contudo, a dispersão (em torno do AOA médio) depende exclusivamente do cenário de operação considerado. Também, verifica-se que valores altos de SINR em regime permanente requerem o uso de valores pequenos de passo de adaptação μ [veja as Figs. 1(d) e 2(b)]; todavia, o impacto de μ na SINR alcançada em regime permanente é menos significativo à medida que $\Delta\theta$ aumenta. Além desses aspectos, percebe-se que os resultados preditos a partir das expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes (19), a evolução da SINR (21) e a SINR em regime permanente (28) casam muito bem com aqueles obtidos por simulações de MC em diferentes cenários de operação; dessa forma, infere-se que as expressões obtidas exibem precisão

satisfatória. Vale salientar que essa precisão se deve ao número reduzido e à validade das hipóteses simplificativas utilizadas no desenvolvimento do modelo. Portanto, o modelo proposto caracteriza adequadamente o comportamento do algoritmo; por isso, pode servir como base teórica para suportar um estudo do comportamento do algoritmo sem a necessidade de se recorrer a extensivas simulações de MC.

V. CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

Neste artigo, foram derivadas expressões de modelo que descrevem o comportamento médio do algoritmo CLMS, considerando uma aplicação de conformação de feixe em arranjo de antenas. Especificamente, expressões de modelo foram determinadas para caracterizar o comportamento médio do vetor de coeficientes, a matriz de correlação do vetor de coeficientes e a evolução da SINR, como também o comportamento em regime permanente do vetor de coeficientes e da SINR. Os resultados de simulação mostrados confirmam a precisão do modelo proposto para diferentes cenários de operação. Como comentário final, infere-se que a modelagem estocástica de outros algoritmos aplicados à conformação de feixe discutidos na literatura pode também ser aprimorada através das estratégias utilizadas aqui. Trabalhos de pesquisa futuros poderiam endereçar o desenvolvimento de modelos para ambiente não estacionário, visando então tratar a condição em que o SOI e/ou usuários interferentes estejam se movendo em relação ao arranjo de antenas.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer os revisores pelas valiosas e construtivas sugestões, as quais têm melhorado substancialmente o presente trabalho de pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] L. C. Godara, *Smart Antennas*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2004.
- [2] C. A. Balanis and P. I. Ioannides, "Introduction to Smart Antennas," *Synthesis Lectures on Antennas*, vol. 2, no. 1, pp. 1–175, 2007.
- [3] O. L. Frost, "An algorithm for linearly constrained adaptive array processing," *Proc. IEEE*, vol. 60, no. 8, pp. 926–935, Aug. 1972.
- [4] J. A. Apolinário Jr., S. Werner, P. S. Diniz, and T. I. Laakso, "Constrained normalized adaptive filters for CDMA mobile communications," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Rhodes, Greece, Sep. 1998, pp. 1–4.
- [5] L. Godara and A. Cantoni, "Analysis of constrained LMS algorithm with application to adaptive beamforming using perturbation sequences," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 34, no. 3, pp. 368–379, Mar. 1986.
- [6] M. H. Maruo, J. C. M. Bermudez, and L. S. Resende, "Statistical analysis of a jointly optimized beamformer-assisted acoustic echo canceler," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 1, pp. 252–265, Jan. 2014.
- [7] R. Arablouei, K. Doğançay, and S. Werner, "On the mean-square performance of the constrained LMS algorithm," *Signal Process.*, vol. 117, pp. 192–197, Dec. 2015.
- [8] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 4th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2016.
- [9] R. A. Monzingo and T. W. Miller, *Introduction to Adaptive Arrays*, New York, NY: SciTech Publishing, 2004.
- [10] D. R. Morgan, "Downlink adaptive array algorithms for cellular mobile communications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 3, pp. 476–488, Mar. 2003.
- [11] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering*, 3rd ed. New York, NY: Springer Science+Business Media, 2008.
- [12] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [13] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [14] C. Samson and V. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177–1191, Oct. 1983.
- [15] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2nd ed. Woodstock, OX: Princeton University Press, 2009.