

# Análise em Regime Permanente do Algoritmo LMS para Formas Bilineares

Khaled Jamal Bakri, Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara

**Resumo**—Este artigo visa estender o modelo estocástico já desenvolvido para o algoritmo LMS-BF (*least-mean-square for bilinear forms*), considerando agora o comportamento em regime permanente. Particularmente, uma expressão de modelo caracterizando o erro quadrático médio em excesso (EQME) em regime permanente é derivada aqui, da qual o erro quadrático médio (EQM) pode também ser diretamente obtido. Ainda, uma expressão analítica relacionando os algoritmos LMS-BF e LMS (*least-mean-square*) é estabelecida. Resultados de simulação são apresentados, confirmando a precisão das expressões obtidas e comparando o desempenho dos algoritmos LMS-BF e LMS.

**Palavras-chave**—Algoritmo LMS-BF, filtragem adaptativa, formas bilineares, modelagem estocástica, regime permanente.

**Abstract**—This paper aims to extend the stochastic model already developed for the algorithm least-mean-square for bilinear forms (LMS-BF), considering now the behavior in steady state. Particularly, a model expression characterizing the excess mean-square error (EMSE) in steady state is derived here, from which the mean-square error (MSE) can also be directly obtained. In addition, an analytical expression relating the LMS-BF and the LMS algorithm is established. Simulation results are presented, confirming the accuracy of the obtained expressions and comparing the performance of the LMS-BF and LMS algorithms.

**Keywords**—LMS-BF algorithm, adaptive filtering, bilinear forms, stochastic modeling, steady state.

## I. INTRODUÇÃO

Em contraste ao uso de formas bilineares na representação (aproximada) da relação de entrada e saída de sistemas não-lineares [1], uma nova abordagem foi introduzida em [2], na qual o termo bilinear é definido em relação às respostas ao impulso temporal e espacial de um sistema MISO (*multiple-input/single-output*). Essa abordagem encontra aplicações em cancelamento de eco acústico não-linear, identificação de sistemas bloco-esparsos e melhoramento de sinal multicanal [1]. Nessas aplicações, filtros adaptativos são usados para estimar (de forma independente) as respostas ao impulso espacial e temporal, produzindo uma descrição apropriada da resposta ao impulso espaço-temporal do sistema. Baseado nessa abordagem, algoritmos conhecidos da literatura foram revisados, dando assim origem aos algoritmos LMS-BF (*least-mean-square for bilinear forms*) [3], NLMS-BF (*normalized LMS-BF*) [4], VSS-NLMS-BF (*variable step-size NLMS-BF*) [1], IPNLMS-BF (*improved proportionate NLMS-BF*) [5], IPAPA-BF (*improved proportionate affine projection algorithm for bilinear forms*) [6], RLS-BF (*recursive least-squares for bilinear forms*) [7] e uma versão do filtro de Kalman para formas bilineares [8].

Levando em consideração o caráter inovador, torna-se

Khaled Jamal Bakri, Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara estão vinculados ao LINSE—Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais do Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil (e-mails: khaled@linse.ufsc.br, kuhn@linse.ufsc.br e seara@linse.ufsc.br).

Eduardo Vinicius Kuhn está também vinculado ao LAPSE—Laboratório de Processamento de Sinais e Eletrônica do Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, PR, Brasil (kuhn@utfpr.edu.br).

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

imperativo um estudo mais abrangente sobre os algoritmos adaptativos derivados para operar com formas bilineares no contexto de filtragem adaptativa. Nesse sentido, [1] e [3] trazem expressões preliminares descrevendo algumas métricas [tais como o desalinhamento e uma versão modificada do desalinhamento normalizado (*normalized projection misalignment*, NPM)] relacionadas aos filtros adaptativos temporal e espacial, as quais são utilizadas para caracterizar o comportamento do algoritmo LMS-BF em regime permanente. Tais expressões servem como base para a discussão apresentada versando sobre alguns aspectos fundamentais relacionados às características de convergência e critérios de estabilidade do algoritmo LMS-BF. Entretanto, hipóteses e/ou aproximações feitas ao longo do desenvolvimento do modelo (como, por exemplo, sinal de entrada gaussiano não-correlacionado e princípio da separação [9]) restringem sobremaneira sua aplicabilidade. Consequentemente, o entendimento do comportamento do algoritmo LMS-BF bem como o impacto de seus parâmetros sobre o seu desempenho não ficam tão evidenciados. Outros aspectos discutidos sobre esse algoritmo são baseados em resultados provenientes de simulações numéricas, carecendo, portanto, de uma base teórica para suportá-los.

Neste contexto, focando sobre o algoritmo LMS-BF, o presente trabalho de pesquisa tem os seguintes objetivos:

- i) obter uma expressão de modelo descrevendo o erro quadrático médio em excesso (EQME) em regime permanente e as matrizes de correlação envolvidas;
- ii) introduzir uma metodologia que leve em conta sinais de entrada gaussianos não-correlacionados e correlacionados;
- iii) investigar o impacto dos parâmetros no comportamento do algoritmo;
- iv) estabelecer uma relação entre os parâmetros dos algoritmos LMS e LMS-BF; e
- v) apresentar comparações de desempenho entre os algoritmos LMS e LMS-BF.

Vale salientar que o desenvolvimento apresentado aqui tem como base os resultados discutidos em [10], onde expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do algoritmo LMS-BF foram derivadas considerando sinais de entrada gaussianos reais não-correlacionados e correlacionados. Por isso, os resultados mais relevantes de [10] são aqui revisitados a fim de fornecer o embasamento necessário e tornar este trabalho autocontido.

A notação matemática adotada segue a prática padrão de usar letras minúsculas em negrito para vetores, letras maiúsculas em negrito para matrizes, e letras romanas em itálico e gregas para escalares. O sobrescrito T representa o operador de transposição de uma matriz,  $E(\cdot)$  denota o valor esperado,  $\|\cdot\|^2$  caracteriza a norma euclidiana ao quadrado de um vetor,  $\text{tr}(\cdot)$  é o operador traço,  $\text{vec}(\cdot)$  denota o operador de vetorização e  $\text{diag}(\cdot)$  define um operador que constrói um vetor a partir dos elementos da diagonal de uma matriz. Ainda, os produtos de Kronecker e de Hadamard são definidos usando os símbolos  $\otimes$  e  $\circ$ , respectivamente.

## II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Na identificação de sistema MISO envolvendo formas bilineares [1], o sinal desejado pode ser expresso como

$$d(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{X}(n) \mathbf{g} + w(n) \quad (1)$$

onde  $\mathbf{h} = [h_1 \cdots h_L]^T$  e  $\mathbf{g} = [g_1 \cdots g_M]^T$  denotam vetores contendo os coeficientes das respostas ao impulso temporal e espacial de um modelo espaço-temporal, respectivamente,

$$\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}_1(n) \cdots \mathbf{x}_M(n)] \quad (2)$$

é uma matriz de entrada cujas colunas são vetores contendo as amostras mais recentes do  $m$ -ésimo sinal de entrada, isto é,

$$\mathbf{x}_m(n) = [x_m(n) \cdots x_m(n-L+1)]^T, \quad m = 1, \dots, M \quad (3)$$

enquanto  $w(n)$  caracteriza um ruído de medição. Alternativamente, definindo  $\tilde{\mathbf{x}}(n) = \text{vec}[\mathbf{X}(n)]$ , o sinal de saída do sistema pode ser reescrito como

$$y(n) = \mathbf{f}^T \tilde{\mathbf{x}}(n) \quad (4)$$

com  $\mathbf{f} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{h}$  representando um vetor de dimensão  $ML$  contendo os coeficientes da resposta ao impulso do modelo espaço-temporal. Consequentemente, uma estimativa do sinal de saída do sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) &= \hat{\mathbf{h}}^T(n-1) \mathbf{X}(n) \hat{\mathbf{g}}(n-1) \\ &= [\hat{\mathbf{g}}(n-1) \otimes \hat{\mathbf{h}}(n-1)]^T \tilde{\mathbf{x}}(n) \\ &= \hat{\mathbf{f}}^T(n-1) \tilde{\mathbf{x}}(n) \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $\hat{\mathbf{f}}(n)$ ,  $\hat{\mathbf{h}}(n)$  e  $\hat{\mathbf{g}}(n)$  são as estimativas das respostas ao impulso espaço-temporal, temporal e espacial, respectivamente. Por fim, o sinal de erro é obtido como

$$e(n) = d(n) - \hat{y}(n). \quad (6)$$

Neste contexto, tendo como base [10], a curva de aprendizagem do algoritmo LMS-BF [isto é, o erro quadrático médio (EQM)] pode ser expressa como

$$\begin{aligned} J(n) &= E[e^2(n)] \\ &= J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \end{aligned} \quad (7)$$

com

$$J_{\min} = \sigma_w^2 \quad (8)$$

denotando o EQM mínimo [equivalente à variância do ruído de medição  $\sigma_w^2$  quando  $\hat{\mathbf{f}}(n) = \mathbf{f}$ ] e

$$J_{\text{ex}}(n) = \text{tr}[\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{K}'(n-1)] \quad (9)$$

representando o EQME. Note em (9) que  $\mathbf{\Lambda}_1$  é uma matriz diagonal obtida a partir da autodecomposição da matriz de autocorrelação de  $\tilde{\mathbf{x}}(n)$  [1], [10], dada por

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Q}_1^T \quad (10)$$

$$= [\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{Q}][\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{\Lambda}][\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{Q}]^T$$

com  $\mathbf{I}_M$  representando uma matriz identidade de dimensão  $M \times M$ , enquanto  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{\Lambda}$  são matrizes de autovetores e autovalores provenientes da autodecomposição da matriz de autocorrelação do  $m$ -ésimo sinal de entrada  $\mathbf{x}_m(n)$  (isto é,  $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T$  [9]-[11]).

Em (9),  $\mathbf{K}'(n)$  define uma matriz do tipo correlação relacionada ao vetor de erro nos coeficientes do filtro espaço-temporal  $\hat{\mathbf{f}}(n)$ , a qual pode ser computada por

$$\mathbf{K}'(n) = \mathbf{G}_o \otimes \mathbf{H}'_o - 2\mathbf{G}(n) \otimes \mathbf{H}'(n) + \hat{\mathbf{G}}(n) \otimes \hat{\mathbf{H}}'(n) \quad (11)$$

sendo  $\hat{\mathbf{H}}'(n) = \mathbf{Q}^T E[\hat{\mathbf{h}}(n) \hat{\mathbf{h}}^T(n)] \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{H}'(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{h} E[\mathbf{h}^T(n)] \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{H}'_o = \mathbf{Q}^T \mathbf{h} \mathbf{h}^T \mathbf{Q}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}(n) = E[\hat{\mathbf{g}}(n) \hat{\mathbf{g}}^T(n)]$ ,  $\mathbf{G}(n) = \mathbf{g} E[\mathbf{g}^T(n)]$  e  $\mathbf{G}_o = \mathbf{g} \mathbf{g}^T$ . Por sua vez, uma expressão descrevendo a evolução da matriz de correlação temporal  $\hat{\mathbf{H}}(n)$  é obtida como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}'(n) &= \hat{\mathbf{H}}'(n-1) \circ \{\mathbf{1}_{L \times L} - \mu_{\hat{\mathbf{h}}} [\mathbf{u}(n) \mathbf{1}_{1 \times L} + \mathbf{1}_{L \times 1} \mathbf{u}^T(n)]\} \\ &+ \mu_{\hat{\mathbf{h}}} \mathbf{H}'(n-1) \circ [\mathbf{v}(n) \mathbf{1}_{1 \times L} + \mathbf{1}_{L \times 1} \mathbf{v}^T(n)] + \mu_{\hat{\mathbf{h}}}^2 \mathbf{U}(n) J_{\min} + \mu_{\hat{\mathbf{h}}}^2 \mathbf{Z}(n) \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $\mathbf{1}_{L \times L}$  é uma matriz de 1's com dimensão  $L \times L$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(n) &= \text{diag}[\mathbf{U}(n)] \\ &= \text{diag}\{\text{tr}[\hat{\mathbf{G}}(n-1)] \mathbf{\Lambda}\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n) &= \text{diag}[\mathbf{V}(n)] \\ &= \text{diag}\{\text{tr}[\mathbf{G}(n-1)] \mathbf{\Lambda}\} \end{aligned} \quad (14)$$

enquanto

$$\mathbf{Z}(n) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [\hat{\mathbf{G}}(n-1)]_{(i,j)} \mathbf{D}_{i,j}(n) \quad (15)$$

com

$$\mathbf{D}_{i,j}(n) = \begin{cases} 2[\lambda \lambda^T \circ \mathbf{K}'_{i,j}(n-1)] + \lambda^T \mathbf{k}'_{i,j}(n-1) \mathbf{\Lambda}, & i = j \\ \lambda \lambda^T \circ \mathbf{K}'_{i,j}(n-1), & i \neq j \end{cases} \quad (16)$$

em que  $\mathbf{k}'_{i,j}(n) = \text{diag}[\mathbf{K}'_{i,j}(n)]$  advém do particionamento de

$$\mathbf{K}'(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{1,1}(n) & \cdots & \mathbf{K}'_{1,M}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}'_{M,1}(n) & \cdots & \mathbf{K}'_{M,M}(n) \end{bmatrix} \quad (17)$$

e  $\lambda = \text{diag}(\mathbf{\Lambda})$ . Similarmente,  $\mathbf{H}'(n)$  é determinada através da seguinte expressão recursiva:

$$\mathbf{H}'(n) = [\mathbf{1}_{L \times L} - \mu_{\hat{\mathbf{h}}} \mathbf{u}(n) \mathbf{1}_{1 \times L}] \circ \mathbf{H}'(n-1) + \mu_{\hat{\mathbf{h}}} \mathbf{v}(n) \mathbf{1}_{1 \times L} \circ \mathbf{H}'_o. \quad (18)$$

Uma expressão recursiva caracterizando a evolução da matriz de correlação espacial  $\hat{\mathbf{G}}(n)$  é dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}}(n) &= \hat{\mathbf{G}}(n-1) + \mu_{\hat{\mathbf{g}}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_2}(n) \mathbf{G}(n-1) - \mu_{\hat{\mathbf{g}}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_1}(n) \hat{\mathbf{G}}(n-1) \\ &+ \mu_{\hat{\mathbf{g}}} \mathbf{G}(n-1) \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_2}(n) - \mu_{\hat{\mathbf{g}}} \hat{\mathbf{G}}(n-1) \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_1}(n) \\ &+ \mu_{\hat{\mathbf{g}}}^2 \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_1}(n) J_{\min} + \mu_{\hat{\mathbf{g}}}^2 \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(n) \end{aligned} \quad (19)$$

com

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_1}(n) = \lambda^T \hat{\mathbf{h}}'(n-1) \mathbf{I}_M \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_2}(n) = \lambda^T \mathbf{h}'(n-1) \mathbf{I}_M \quad (21)$$

e

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(n)$$

$$= \begin{cases} 2\lambda^T [\mathbf{K}'_{i,j}(n-1) \circ \hat{\mathbf{H}}'(n-1)] \lambda + \lambda^T \mathbf{k}'_{i,j}(n-1) \lambda^T \hat{\mathbf{h}}'(n-1), & i = j \\ \lambda^T [\mathbf{K}'_{i,j}(n-1) \circ \hat{\mathbf{H}}'(n-1)] \lambda, & i \neq j \end{cases} \quad (22)$$

sendo  $\hat{\mathbf{h}}'(n) = \text{diag}[\hat{\mathbf{H}}'(n)]$  e  $\mathbf{h}'(n) = \text{diag}[\mathbf{H}'(n)]$ . Por fim, uma expressão recursiva descrevendo a evolução de  $\mathbf{G}(n)$  é dada por

$$\mathbf{G}(n) = [\mathbf{I}_M - \mu_{\hat{\mathbf{g}}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_1}(n)] \mathbf{G}(n-1) + \mu_{\hat{\mathbf{g}}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_2}(n) \mathbf{G}_o. \quad (23)$$

Portanto, considerando as expressões de modelo (7)-(23), expressões caracterizando o comportamento do algoritmo em regime permanente são derivadas na próxima seção.

## III. MODELO PROPOSTO

Aqui, expressões de modelo são derivadas para caracterizar o comportamento do algoritmo LMS-BF em regime permanente. Especificamente, levando em conta os filtros adaptativos temporal e espacial, expressões de modelo são derivadas descrevendo o EQME em regime permanente. Além disso, a partir dos resultados obtidos, algumas expressões particulares são derivadas assumindo passo de adaptação pequeno, as quais permitem estabelecer uma relação entre os algoritmos LMS-BF e LMS.

## A. EQME em Regime Permanente

Com respeito ao EQME em regime permanente, uma

expressão de modelo pode ser obtida fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (9) e utilizando as propriedades do operador traço, de tal modo que (veja [12])

$$J_{\text{ex}}(\infty) = \lambda_1^T \mathbf{k}'(\infty) \quad (24)$$

onde  $\lambda_1 = \text{diag}[\Lambda_1]$  e  $\mathbf{k}'(\infty) = \text{diag}[\mathbf{K}'(\infty)]$ . Note que (24) depende da determinação de  $\mathbf{k}'(\infty)$ . Logo, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (11), assumindo<sup>1</sup>

$$\mathbf{G}(\infty) \cong \eta \mathbf{G}_0 \quad (25)$$

e

$$\mathbf{H}'(\infty) \cong \eta^{-1} \mathbf{H}'_0 \quad (26)$$

e tomando os elementos da diagonal principal da expressão resultante, tem-se

$$\mathbf{k}'(\infty) = \hat{\mathbf{g}}'(\infty) \otimes \hat{\mathbf{h}}'(\infty) - \mathbf{g}_0 \otimes \mathbf{h}'_0 \quad (27)$$

onde  $\hat{\mathbf{h}}'(\infty) = \text{diag}[\hat{\mathbf{H}}'(\infty)]$ ,  $\hat{\mathbf{g}}'(\infty) = \text{diag}[\hat{\mathbf{G}}'(\infty)]$ ,  $\mathbf{h}'_0 = \text{diag}[\mathbf{H}'_0]$  e  $\mathbf{g}_0 = \text{diag}[\mathbf{G}_0]$ . Portanto, o EQME em regime permanente pode ser predito através de (24) e (27) se  $\hat{\mathbf{g}}'(\infty)$  e  $\hat{\mathbf{h}}'(\infty)$  forem conhecidos (como mostrado a seguir na Seção III-B).

### B. Matrizes do Tipo Correlação em Regime Permanente

Para completar a derivação do modelo, é necessário ainda obter expressões que caracterizem os elementos de algumas matrizes do tipo correlação relacionadas ao comportamento dos filtros adaptativos temporal e espacial em regime permanente. Dessa forma, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (12), considerando que<sup>2</sup>

$$\mathbf{V}(\infty) = \eta^{-1} \mathbf{U}(\infty) \quad (28)$$

usando (26) juntamente com as propriedades do produto Hadamard [13] e tomando os elementos da diagonal principal da expressão resultante, obtém-se

$$2\mathbf{U}(\infty)\hat{\mathbf{h}}'(\infty) = 2\eta^{-2}\mathbf{U}(\infty)\mathbf{h}'_0 + \mu_{\hat{\mathbf{h}}}' J_{\min} \mathbf{u}(\infty) + \mu_{\hat{\mathbf{h}}}' \mathbf{z}(\infty) \quad (29)$$

com  $\mathbf{u}(\infty)$  obtido a partir de (13) para  $n \rightarrow \infty$  e  $\mathbf{z}(\infty) = \text{diag}[\mathbf{Z}(\infty)]$  obtido a partir de (15) para  $n \rightarrow \infty$ .

Então, levando em conta os resultados obtidos no Apêndice para computar  $\mathbf{z}(\infty)$  e resolvendo (29) para  $\hat{\mathbf{h}}'(\infty)$ , tem-se

$$\hat{\mathbf{h}}'(\infty) \cong \eta^{-2} \mathbf{h}'_0 + 0,5\mu_{\hat{\mathbf{h}}}' J_{\min} (\mathbf{I}_L + \alpha \mathbf{A}) \mathbf{1}_{L \times 1} \quad (30)$$

com  $\mathbf{I}_L$  denotando uma matriz identidade de dimensão  $L \times L$ ,

$$\alpha = \frac{\mu_{\hat{\mathbf{h}}}' \eta^2}{2\text{tr}(\mathbf{G}_0)} \quad (31)$$

e

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [\mathbf{G}_0]_{(i,j)}^2 \mathbf{B}_{i,j} \quad (32)$$

para

$$\mathbf{B}_{i,j} = \begin{cases} 2\Lambda + \lambda \mathbf{1}_{1 \times L}, & i = j \\ \Lambda, & i \neq j. \end{cases} \quad (33)$$

Note que (30) é obtida utilizando a seguinte aproximação advinda do lema de inversão de matrizes [13], [14]:

$$(\mathbf{I}_L - \alpha \mathbf{A})^{-1} \cong \mathbf{I}_L + \alpha \mathbf{A}, \quad \alpha \ll 1. \quad (34)$$

Por sua vez, fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (19), usando (25) e tomando os elementos da diagonal da expressão resultante, obtém-se

$$2\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}}'(\infty)\hat{\mathbf{g}}'(\infty) = 2\eta\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}}'_2(\infty)\mathbf{g}_0 + \mu_{\hat{\mathbf{g}}}' J_{\min} \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}}'(\infty) + \mu_{\hat{\mathbf{g}}}' \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}}'_3(\infty) \quad (35)$$

<sup>1</sup> É assumido que o comportamento médio do filtro adaptativo temporal e espacial converge para suas versões escaladas dos seus valores ótimos, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\mathbf{h}}(n)] \cong \eta^{-1} \mathbf{h}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\mathbf{g}}(n)] \cong \eta \mathbf{g}$ .

<sup>2</sup> Observe que (28) pode ser obtida fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (18), usando (26) juntamente com as propriedades do produto Hadamard [13] e resolvendo a expressão resultante para  $\mathbf{V}(\infty)$ .

com  $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}}'(\infty) = \text{diag}[\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}}'(\infty)]$  [obtido de (20) para  $n \rightarrow \infty$ ] e  $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}}'_3(\infty) = \text{diag}[\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}}'_3(\infty)]$  [obtido a partir de (22) para  $n \rightarrow \infty$ ], respectivamente. Então, levando em conta que<sup>3</sup>

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}}'_2(\infty) = \eta \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}}'_1(\infty) \quad (36)$$

e usando os resultados obtidos no Apêndice para computar  $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}}'_3(\infty)$ , (35) pode ser simplificada para

$$\hat{\mathbf{g}}'(\infty) = \eta^2 \mathbf{g}_0 + \tau \mathbf{1}_{M \times 1} \quad (37)$$

onde  $\mathbf{1}_{M \times 1}$  é um vetor de 1's de dimensão  $M \times 1$ ,

$$\tau = \frac{\mu_{\hat{\mathbf{g}}}'}{2\lambda^T \mathbf{h}'_0 - \mu_{\hat{\mathbf{g}}}' \gamma \eta^{-2}} \lambda^T \mathbf{h}'_0 J_{\min} \quad (38)$$

com

$$\gamma = 2\lambda^T (\mathbf{H}'_0 \circ \mathbf{H}'_0) \lambda + (\lambda^T \mathbf{h}'_0)^2. \quad (39)$$

Portanto, levando em conta as expressões de modelo (24), (27), (30) e (37), o EQME em regime permanente alcançado pelo algoritmo LMS-BF pode agora ser predito.

### C. Resultados Particulares para Passo de Adaptação Pequeno

Em contraste com o desenvolvimento apresentado até então, algumas expressões de modelo simplificadas são derivadas nesta seção descrevendo o comportamento do algoritmo em regime permanente sob a condição de passo de adaptação pequeno, das quais alguns aspectos importantes são obtidos. Nesse contexto, assumindo passos de adaptação pequenos para os filtros adaptativos temporal  $\mu_{\hat{\mathbf{h}}}'$  e espacial  $\mu_{\hat{\mathbf{g}}}'$  (em comparação com o limite superior de estabilidade [1]), (30) e (37) são aproximadas para

$$\hat{\mathbf{h}}'(\infty) \cong \eta^{-2} \mathbf{h}'_0 + 0,5\mu_{\hat{\mathbf{h}}}' J_{\min} \mathbf{1}_{L \times 1} \quad (40)$$

e

$$\hat{\mathbf{g}}'(\infty) \cong \eta^2 \mathbf{g}_0 + 0,5\mu_{\hat{\mathbf{g}}}' J_{\min} \mathbf{1}_{M \times 1} \quad (41)$$

respectivamente. Então, substituindo (40) e (41) em (27) e observando que

$$\mu_{\hat{\mathbf{g}}}' \mu_{\hat{\mathbf{h}}}' J_{\min}^2 \cong 0 \quad (42)$$

obtem-se

$$\mathbf{k}'(\infty) = 0,5\mu_{\hat{\mathbf{h}}}' J_{\min} \eta^2 (\mathbf{g}_0 \otimes \mathbf{1}_{L \times 1}) + 0,5\mu_{\hat{\mathbf{g}}}' J_{\min} \eta^{-2} (\mathbf{1}_{M \times 1} \otimes \mathbf{h}'_0). \quad (43)$$

Agora, substituindo (43) em (24) e notando de (10) que

$$\lambda_1 = \mathbf{1}_{M \times 1} \otimes \lambda \quad (44)$$

o EQME em regime permanente (sob condição de passo de adaptação pequeno) pode ser simplificado para

$$J_{\text{ex}}(\infty) = 0,5 J_{\min} [\mu_{\hat{\mathbf{h}}}' \eta^2 \|\mathbf{g}\|^2 \lambda^T \mathbf{1}_{L \times 1} + \mu_{\hat{\mathbf{g}}}' \eta^{-2} M \lambda^T \mathbf{h}'_0]. \quad (45)$$

De (45), verifica-se que o EQME em regime permanente do algoritmo LMS-BF depende do vetor  $\mathbf{h}'_0$  relacionado à resposta ao impulso temporal  $\mathbf{h}$ , da norma euclidiana ao quadrado da resposta ao impulso espacial  $\mathbf{g}$  e também do fator de escala  $\eta$ . Portanto, o EQME obtido em regime permanente é afetado pelas repostas ao impulso temporal e espacial, mesmo em uma condição de passo de adaptação pequeno, enfatizando que o comportamento dos filtros adaptativos temporal e espacial dependem um do outro.

Ainda, é possível observar que a expressão matemática caracterizando o EQME em regime permanente do LMS-BF tem o mesmo formato daquela obtida para o algoritmo LMS (veja [9, Eq. (23.58)]). Como consequência, pode-se inferir que os algoritmos LMS-BF e LMS podem ser ajustados para alcançar o mesmo EQME em regime permanente, fazendo o passo de adaptação deste último igual a

<sup>3</sup> Note que (36) pode ser obtida fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (23), usando (25) e resolvendo a expressão resultante para  $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}}'_2(\infty)$ .

$$\mu_{\text{LMS}} = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{R}_1)} (\mu_{\hat{\mathbf{h}}} \eta^2 \|\mathbf{g}\|^2 \lambda^T \mathbf{1}_{L \times 1} + \mu_{\hat{\mathbf{g}}} \eta^{-2} M \lambda^T \mathbf{h}'_0). \quad (46)$$

Desse modo, um passo de adaptação para o algoritmo LMS, equivalente ao utilizado no LMS-BF, pode ser determinado a partir de (46) sem a necessidade de simulações de MC extensivas (veja o Exemplo 2 na Seção IV).

#### IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Visando verificar a precisão das expressões de modelo obtidas, simulações de MC (considerando 200 realizações independentes) são realizadas para um problema de identificação de sistema. Para tal, sinais de entrada gaussianos com média zero e variância  $\sigma_x^2 = 1$  são utilizados, os quais são obtidos através de

$$x_m(n) = -a_1 x_m(n-1) - a_2 x_m(n-2) + v(n) \quad (47)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são os coeficientes do processo autorregressivo de segunda ordem AR(2) e  $v(n)$  é um ruído branco cuja variância é ajustada de tal modo que

$$\sigma_v^2 = \left( \frac{1-a_2}{1+a_2} \right) [(1+a_2)^2 - a_1^2]. \quad (48)$$

A razão sinal-ruído (SNR) é definida como [1]

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left[ \frac{(\mathbf{g} \otimes \mathbf{h})^T \mathbf{R}_1 (\mathbf{g} \otimes \mathbf{h})}{\sigma_w^2} \right]. \quad (49)$$

A resposta ao impulso temporal  $\mathbf{h}$  (com dimensão  $L = 64$ ) é obtida a partir da Recomendação ITU-T G.168 [15, Modelo 1], enquanto a resposta ao impulso espacial  $\mathbf{g}$  (com dimensão  $M = 4$ ) é dada por

$$\mathbf{g} = [1 \ 2^{-1} \ \dots \ 2^{-(M-1)}]^T. \quad (50)$$

Consequentemente, a resposta ao impulso espaço-temporal  $\mathbf{f} = \mathbf{g} \otimes \mathbf{h}$  tem dimensão  $ML = 256$ . Ainda, as resposta ao impulso temporal e espacial são normalizadas de tal forma que  $\|\mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{g}\|^2 = 1$ . As condições iniciais escolhidas para o algoritmo LMS-BF são  $\hat{\mathbf{h}}(0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  e  $\hat{\mathbf{g}}(0) = M^{-1} [1 \ \dots \ 1]^T$  (como em [1]). Além disso, o fator de escala  $\eta$  (em regime permanente) é estimado (a cada realização) a partir das simulações de MC, calculando a média dos 100 últimos valores de

$$\hat{\eta} = \left[ \frac{\hat{\mathbf{h}}^T(n) \hat{\mathbf{h}}(n)}{\mathbf{h}^T \mathbf{h}} \right]^{-1/2} \quad (51)$$

enquanto, para o modelo estocástico, considera-se

$$\eta = \left\{ \frac{E[\hat{\mathbf{h}}^T(n)] E[\hat{\mathbf{h}}(n)]}{\mathbf{h}^T \mathbf{h}} \right\}^{-1/2}. \quad (52)$$

Note que  $E[\hat{\mathbf{h}}(n)]$  é aqui obtido de [10, Eq. (16)].

##### A. Exemplo 1

Para verificar o comportamento do algoritmo LMS-BF em regime permanente, resultados experimentais são comparados com os resultados teóricos preditos através das expressões de modelo descrevendo o EQME em regime permanente (veja Seções III-A e III-B). Com o objetivo de fornecer uma melhor visualização dos resultados experimentais provenientes das simulações de MC, toma-se a média dos últimos 100 valores em regime permanente da variável de interesse (como em [9, pp. 250]). Neste exemplo, os sinais de entrada  $\mathbf{x}_m(n)$  são obtidos a partir de (47) para  $a_1 = -0,6$  e  $a_2 = 0,84$ , resultando em uma dispersão de autovalores das matrizes de autocorrelação do sinal de entrada  $\chi = 222,51$ . Ainda,

considera-se três valores de SNR, isto é, 10 dB, 20 dB e 30 dB.

A Fig. 1 mostra os resultados obtidos por simulação de MC juntamente com os resultados preditos a partir das expressões de modelo para diversos valores de passo de adaptação ( $\mu_{\hat{\mathbf{h}}} = \mu_{\hat{\mathbf{g}}}$ ) variando de  $5 \times 10^{-5}$  a  $5 \times 10^{-3}$ . Observe a partir dessa figura que as expressões de modelo derivadas aqui caracterizam satisfatoriamente o comportamento do algoritmo em regime permanente para toda a faixa de valores de passo de adaptação considerada. Essa precisão se mantém independentemente do valor de SNR utilizado.

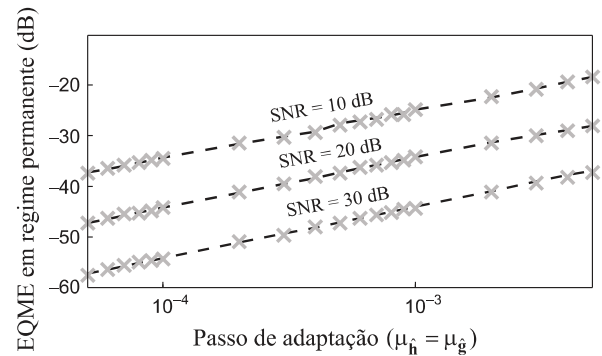


Fig. 1. Exemplo 1. Curvas de EQME em regime permanente como função do passo de adaptação ( $\mu_{\hat{\mathbf{h}}} = \mu_{\hat{\mathbf{g}}}$ ) obtidas por simulação de MC (marcadores cinza) e preditas a partir da expressão de modelo (24) (linhas tracejadas escuras).

##### B. Exemplo 2

Este exemplo visa i) ratificar que o algoritmo LMS-BF e o LMS podem ser ajustados [através de (46)] para obter o mesmo EQME em regime permanente; e ii) mostrar que o algoritmo LMS-BF exibe uma velocidade de convergência mais rápida em comparação ao LMS. Os valores de passo de adaptação do algoritmo LMS-BF são feitos iguais a  $\mu_{\hat{\mathbf{h}}} = \mu_{\hat{\mathbf{g}}} = 10^{-3}$ . Então, para sinais de entrada gaussianos não-correlacionados ( $\chi = 1$ ), o passo de adaptação do algoritmo LMS  $\mu_{\text{LMS}}$  deve ser ajustado para  $1,9350 \times 10^{-4}$  (para SNR = 20 dB) e  $1,9471 \times 10^{-4}$  (para SNR = 40 dB), com  $\eta$  sendo calculado através de (52). Por outro lado, considerando sinal de entrada gaussiano correlacionado ( $\chi = 222,51$ ), (46) resulta em  $\mu_{\text{LMS}}$  igual a  $1,9038 \times 10^{-4}$  (para SNR = 20 dB) e  $2,0387 \times 10^{-4}$  (para SNR = 40 dB).

A Fig. 2 apresenta curvas de EQME do filtro adaptativo espaço-temporal obtidas por simulações de MC tanto para o algoritmo LMS-BF quanto para o algoritmo LMS. Particularmente, a Fig. 2(a) mostra os resultados obtidos para sinais de entrada não-correlacionados ( $\chi = 1$ ), enquanto a Fig. 2(b) exibe os resultados obtidos para sinais de entrada correlacionados ( $\chi = 222,51$ ). Observe que, para o mesmo EQME em regime permanente, o algoritmo LMS-BF apresenta um desempenho melhor do que o algoritmo LMS em termos de velocidade de convergência, independentemente do valor de SNR e do nível de correlação do sinal de entrada considerados. Além disso, a Fig. 2 ratifica que a expressão de modelo (46) permite ajustar os dois algoritmos para obter o mesmo EQME em regime permanente sem lançar mão de um procedimento de tentativa e erro. Note que, ao contrário de [1] e [3], essa abordagem permite uma comparação justa entre os algoritmos LMS-BF e LMS, já que permite ajustar ambos os algoritmos para alcançar o mesmo EQME em regime permanente (como discutido em [16]).

## V. CONCLUSÕES

Neste artigo, considerando sinais de entrada gaussianos correlacionados e não-correlacionados, foram obtidas expressões de modelo que permitem prever o comportamento em regime permanente do algoritmo LMS considerando formas bilineares. Além disso, foi obtida uma expressão analítica que possibilita o ajuste dos algoritmos LMS-BF e LMS para atingir o mesmo EQME em regime permanente, sem o uso de procedimentos de tentativa e erro. Os resultados de simulação apresentados ratificaram a precisão das expressões de modelo obtidas e confirmaram que o algoritmo LMS-BF exibe um desempenho melhor do que o algoritmo LMS. Por fim, é importante reforçar que a metodologia discutida aqui pode ser usada para derivar modelos de outros algoritmos envolvendo formas bilineares.

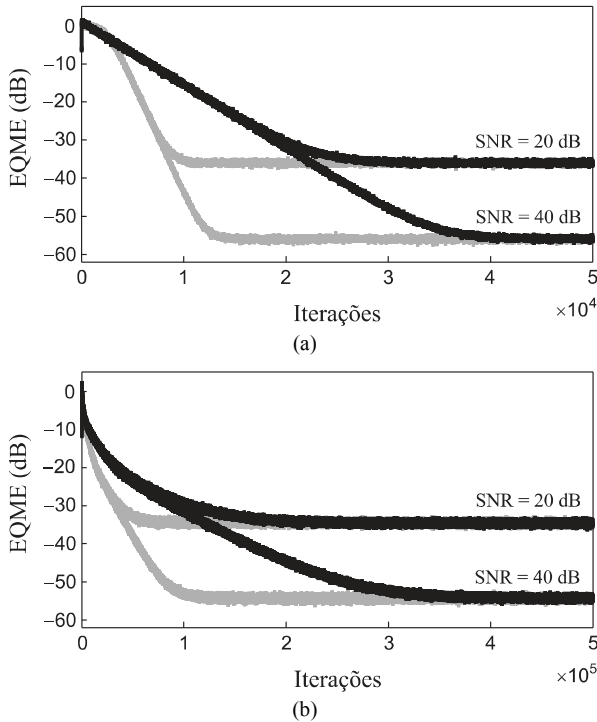


Fig. 2. Exemplo 2. Curvas de EQME obtidas por simulação de MC para o algoritmo LMS (linhas escuras) e para o algoritmo LMS-BF (linhas cinza), considerando o mesmo EQME em regime permanente [veja (46)]. (a) Sinais de entrada gaussianos não-correlacionados ( $\chi=1$ ), com  $\mu_{LMS}=1,9350 \times 10^{-4}$  (para SNR = 20 dB) e  $\mu_{LMS}=1,9471 \times 10^{-4}$  (para SNR = 40 dB). (b) Sinais de entrada gaussianos correlacionados ( $\chi=222,51$ ), com  $\mu_{LMS}=1,9038 \times 10^{-4}$  (para SNR = 20 dB) e  $\mu_{LMS}=2,0387 \times 10^{-4}$  (para SNR = 40 dB).

## APÊNDICE

 DETERMINAÇÃO DE  $\mathbf{z}(\infty)$  E  $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(\infty)$ 

Neste apêndice, procedimentos para o cálculo dos vetores  $\mathbf{z}(\infty)$  e  $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(\infty)$  [requeridos em (29) e (35)] são apresentados.

 A. Derivação de  $\mathbf{z}(\infty)$ 

Para determinar  $\mathbf{z}(\infty)$ , toma-se os elementos da diagonal de (15) para  $n \rightarrow \infty$ , o que resulta em

$$\mathbf{z}(\infty) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M [\hat{\mathbf{G}}(\infty)]_{(i,j)} \mathbf{d}_{i,j}(\infty) \quad (53)$$

com

$$\mathbf{d}_{i,j}(\infty) = \begin{cases} [2(\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}) + \lambda \mathbf{1}_{1 \times L} \mathbf{\Lambda}] \mathbf{k}'_{i,j}(\infty), & i = j \\ (\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Lambda}) \mathbf{k}'_{i,j}(\infty), & i \neq j \end{cases} \quad (54)$$

e  $\mathbf{k}'_{i,j}(\infty)$  obtido a partir de (17) para  $n \rightarrow \infty$ . Então, considerando (25) e (26), bem como assumindo que

$$\hat{\mathbf{G}}(\infty) \cong \eta^2 \mathbf{G}_0 \quad (55)$$

tem-se [a partir de (11)] que

$$\mathbf{k}'_{i,j}(\infty) = [\mathbf{G}_0]_{(i,j)} [\eta^2 \hat{\mathbf{h}}'(\infty) - \mathbf{h}'_0]. \quad (56)$$

Portanto, a partir de (53), (54) e (56), uma expressão para computar  $\mathbf{z}(\infty)$  pode ser obtida.

 B. Derivação de  $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(\infty)$ 

Visando determinar uma expressão para  $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(\infty)$ , os elementos da diagonal de  $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(n)$  para  $n \rightarrow \infty$  [veja (22)] são primeiramente expressos como

$$[\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(\infty)]_{(i,i)} = 2\lambda^T [\mathbf{K}'_{i,i}(\infty) \circ \hat{\mathbf{H}}'(\infty)] \lambda + \lambda^T \mathbf{k}'_{i,i}(\infty) \lambda^T \hat{\mathbf{h}}'(\infty). \quad (57)$$

Em seguida, considerando (25) e (26), como também assumindo que

$$\hat{\mathbf{H}}'(\infty) \cong \eta^{-2} \mathbf{H}'_0 \quad (58)$$

tem-se

$$\mathbf{K}'_{i,i}(\infty) = \{\eta^{-2} [\hat{\mathbf{G}}(\infty)]_{(i,i)} - [\mathbf{G}_0]_{(i,i)}\} \mathbf{H}'_0 \quad (59)$$

e

$$\mathbf{k}'_{i,i}(\infty) = \{\eta^{-2} [\hat{\mathbf{G}}(\infty)]_{(i,i)} - [\mathbf{G}_0]_{(i,i)}\} \mathbf{h}'_0 \quad (60)$$

o que resulta em

$$\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{h}}_3}(\infty) = \gamma \eta^{-2} [\eta^{-2} \hat{\mathbf{g}}'(\infty) - \mathbf{g}_0]. \quad (61)$$

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer os revisores pelas valiosas e construtivas sugestões.

## REFERÊNCIAS

- [1] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, "Adaptive filtering for the identification of bilinear forms," *Digit. Signal Process.*, vol. 75, pp. 153-167, Apr. 2018.
- [2] J. Benesty, C. Paleologu, and S. Ciochina, "On the identification of bilinear forms with the Wiener filter," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 24, no. 5, pp. 653-657, May 2017.
- [3] S. Ciochină, C. Paleologu, and J. Benesty, "Analysis of an LMS algorithm for bilinear forms," in *Proc. Int. Conf. Digital Signal Process. (DSP)*, London, UK, Aug. 2017, pp. 1-5.
- [4] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, "An NLMS algorithm for the identification of bilinear forms," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Kos, Greece, Aug./Sep. 2017, pp. 2620-2624.
- [5] C. Paleologu, J. Benesty, C. Elisei-Iliescu, C. Stanciu, C. Anghel, and S. Ciochină, "A proportionate NLMS algorithm for the identification of sparse bilinear forms," in *Proc. Int. Conf. Telecommun. Signal Process. (TSP)*, Athens, Greece, Jul. 2018, pp. 698-70.
- [6] L.-M. Dogariu, C. Elisei-Iliescu, C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochina, "A proportionate affine projection algorithm for the identification of sparse bilinear forms," in *Proc. Int. Symp. Signals, Circuits Syst. (ISSCS)*, Iasi, Romania, Jul. 2019, vol. 1, pp. 1-4.
- [7] C. Elisei-Iliescu, C. Stanciu, C. Paleologu, J. Benesty, C. Anghel, and S. Ciochina, "Efficient recursive least-squares algorithms for the identification of bilinear forms," *Digit. Signal Process.*, vol. 83, pp. 280-296, Dec. 2018.
- [8] L. Dogariu, C. Paleologu, S. Ciochina, J. Benesty, and P. Piantanida, "Identification of bilinear forms with the Kalman filter," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP)*, Calgary, Canada, Apr. 2018, pp. 4134-4138.
- [9] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [10] K. J. Bakri, E. V. Kuhn e R. Seara, "Modelagem estocástica do algoritmo LMS para formas bilineares," in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais (SBrT)*, Petrópolis, RJ, Brasil, Out. 2019, pp. 1-5.
- [11] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 5 th. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2014.
- [12] M. V. Matsuo, E. V. Kuhn, and R. Seara, "Stochastic analysis of the NLMS algorithm for nonstationary environment and deficient length adaptive filter," *Signal Process.*, vol. 160, pp. 190-201, Jul. 2019.
- [13] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2nd ed. Woodstock, OX: Princeton University Press, 2009.
- [14] E. V. Kuhn, J. E. Kolodziej, and R. Seara, "Stochastic modeling of the NLMS algorithm for complex Gaussian input data and nonstationary environment," *Digit. Signal Process.*, vol. 30, pp. 55-66, Jul. 2014.
- [15] "ITU-T Recommendation G.168, Digital Network Echo Cancellers, International Telecommunications Union," Geneva, Switzerland, 2009.
- [16] D. R. Morgan, "Comments on 'convergence and performance analysis of the normalized LMS algorithm with uncorrelated Gaussian data'," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 35, no. 6, pp. 1299, Nov. 1989.