

Construção de Constelações de Sinais via Uniformização de Curvas Hiperelípticas

Erika Patricia Dantas de Oliveira Guazzi e Reginaldo Palazzo Júnior

Resumo— Por meio da mudança de paradigma no projeto de novos sistemas de comunicações digitais ponto-a-ponto a partir da utilização do gênero da superfície e mediante a determinação da região de uniformização através do uso da equação diferencial fuchsiana associada a uma dada curva hiperelíptica no disco de Poincaré, apresentamos os geradores do subgrupo fuchsiano quando os vértices da região fundamental estão na fronteira do disco de Poincaré, como também uma relação entre o grau da curva hiperelíptica e a tesselação associada à superfície gerada pelo subgrupo fuchsiano.

Palavras-Chave— Grupo fuchsiano, Curva hiperelíptica, Tesselação.

Abstract— Through the paradigm shift in the design of new point-to-point digital communication systems from the genus of the surface and by determining the uniformizing region by the use of the associated Fuchsian differential equation for a given hyperelliptic curve in the Poincaré disk, this paper presents the generators of the Fuchsian subgroup when the vertices of the fundamental region are at the border of the Poincaré disk, and also a relationship between the degree of the hyperelliptic curve and the tessellation associated with the surface generated by the Fuchsian subgroup.

Keywords— Fuchsian group, Hyperelliptic curve, Tessellation

I. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de mudança de paradigma no projeto de novos sistemas de comunicação digital ponto-a-ponto através da utilização do invariante topológico **gênero** da superfície como sendo o elemento fundamental para tal realização. É por meio do conhecimento deste invariante que se torna possível estabelecer as propriedades geométricas e algébricas das superfícies associadas a cada um dos blocos do modelo tradicional de um sistema de comunicação digital iniciando com o mergulho do canal discreto sem memória (DMC) em superfícies (variedades bidimensionais), [1].

Forney em [2] propôs os códigos geometricamente uniformes (GU) (gênero $g = 0, 1$), a classe de códigos mais geral contendo a grande maioria das classes de códigos conhecidos até o presente momento. Em [3], a generalização dos códigos GU foi estabelecida para superfícies com gênero $g \geq 2$. Dentre as propriedades dos códigos GU, [2], mencionamos as duas mais relevantes, quais sejam, todas as regiões de decisão são congruentes e todas as palavras-código tem probabilidade de erro iguais. O projeto e análise de desempenho de constelações de sinais foram consideradas em [4]-[7] para os códigos fuchsianos e [8] para a tesselação $\{10\lambda, 2\lambda\}$, com $\lambda \in \{2k :$

$k \in \mathbb{N}\}$, $k \geq 1$. Em [4] foi apresentado um esquema que ilustra a dependência da probabilidade de erro associada à constelação de sinais com o gênero da superfície (ou com a curvatura seccional K de um espaço homogêneo) que contém a constelação de sinais, e que o melhor desempenho é alcançado quando consideramos superfícies com curvatura constante negativa.

Em [9], o objetivo foi de explicitar as condições necessárias e suficientes para a determinação da região de uniformização de uma dada curva hiperelíptica, $y^2 = f(x)$, (correspondente à superfície Riemanniana) através das soluções linearmente independentes da equação diferencial fuchsiana (EDF) associada. O objetivo era o estabelecimento da relação entre os parâmetros acessórios, c_1, \dots, c_{2n-1} , veja equação (4), de tal forma que o grupo associado seja fuchsiano, denotado por Γ_0 , cujo polígono fundamental tem seus vértices no interior do disco de Poincaré. Por se tratar de uma curva hiperelíptica a justaposição de dois desses polígonos resulta na região de uniformização pretendida. O correspondente subgrupo fuchsiano associado, Γ , é tal que $\Gamma \subset \Gamma_0$. Todavia, o que resultou foi o estabelecimento do que se passou a denominar **conjectura de Whittaker**, pois poucas curvas algébricas de gênero maior que 1 foram uniformizadas. Provavelmente, este fato é devido à falta de um método prático de se usar a propriedade fuchsiana na determinação dos parâmetros acessórios.

Em [10], foi realizado um estudo detalhado das equações diferenciais fuchsianas (EDFs) e a relação destas equações com elementos da geometria hiperbólica. Em especial, as EDFs mais estudadas são as equações diferenciais hipergeométricas.

Como o região de Voronoi (polígono fundamental da superfície) decorrente do uso da EDF associada a uma dada curva hiperelíptica e, conseqüentemente, seus vértices estão contidos no interior do disco de Poincaré, implica em uma área menor que a se considerarmos os vértices estando na fronteira do disco. Por outro lado, sabe-se que quanto maior a área do polígono fundamental (região de Voronoi), menor será a probabilidade de erro associada ao sinal em consideração. Sob esta consideração, o desempenho resultante, em termos da probabilidade de erro da constelação de sinais, será o melhor possível. Por ser uma abordagem não realizada anteriormente, referimos o leitor a [11].

Dessa forma, decorrem os seguintes resultados a serem alcançados:

- Determinação dos geradores do subgrupo fuchsiano, Γ , associado à região fundamental na qual a curva hiperelíptica será uniformizada;
- Estabelecimento de uma relação entre o grau da curva hiperelíptica e a tesselação da superfície gerada pelo

subgrupo fuchsiano Γ associado à curva hiperelíptica e decorrente das soluções linearmente independentes da EDF.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção II apresentamos uma breve revisão sobre conceitos fundamentais necessários para o entendimento do conteúdo deste trabalho. Na Seção III apresentamos os resultados para a obtenção do grupo fuchsiano via a construção proposta em [9], bem como o trabalho desenvolvido por [12], que mostrou a validade da conjectura de Whittaker para uma quantidade expressiva de curvas algébricas. Na Seção IV, mostramos como obter o subgrupo fuchsiano associado a uma curva hiperelíptica que satisfaz a conjectura de Whittaker, tal que a respectiva região fundamental é o caso limite em relação ao que o desenvolvimento clássico retrata. Como consequência da obtenção da região fundamental, decorre a relação entre o grau da curva hiperelíptica e a tesselação associada à superfície gerada pelo subgrupo fuchsiano. Finalmente, na Seção V as conclusões são apresentadas.

II. PRELIMINARES

A. Elementos de geometria hiperbólica

Quando consideramos superfícies com gênero $g \geq 2$, a correspondente geometria é a **geometria hiperbólica**. Existem quatro modelos nesta geometria, entretanto, consideraremos somente dois deles, a saber, o modelo do semi-plano superior $H^2 = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$ e o modelo do disco de Poincaré $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, veja [13] para maiores informações.

Definição 1: [13] As transformações identificadas em $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ são classificadas em três tipos de acordo com o valor assumido pelo valor absoluto do traço da matriz. Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, com $ad - bc = 1$. Deste modo, T é uma transformação elíptica, se $Tr(T) = |a + d| < 2$, uma transformação parabólica, se $Tr(T) = |a + d| = 2$, e uma transformação hiperbólica, se $Tr(T) = |a + d| > 2$.

Definição 2: [13] As transformações de Möbius são isometrias, que formam um subgrupo das isometrias do semi-plano superior $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Definição 3: [13] Uma tesselação regular do plano hiperbólico é uma partição consistindo de polígonos, todos congruentes, sujeitos à restrição de interceptar somente em arestas e vértices, e também de ter o mesmo número de polígonos encontrando em cada vértice, independente do vértice. Portanto, existem infinitas tesselações regulares em \mathbb{H}^2 .

Definição 4: [13] Emparelhamento de arestas de um polígono hiperbólico regular P é um conjunto de isometrias $\phi = \{T_\tau | \tau \in \mathcal{A}\}$ que, para cada aresta $\tau \in \mathcal{A}$: existe uma aresta $\tau' = \tau$ e as isometrias T_τ e $T_{\tau'}$, satisfazendo $T_{\tau'} = T_\tau^{-1}$ e se τ é uma aresta de P então $\tau' = P \cap T_\tau^{-1}(P)$.

B. Razão cruzada

Definição 5: [13] Sejam $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tais que no máximo dois deles sejam iguais. Suponhamos que z_2, z_3, z_4 sejam distintos dois a dois, e T uma transformação

tal que $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$ e $T(z_4) = \infty$. Definimos a razão cruzada $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ por

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = T(z_1).$$

Observação 1: Se z_1, z_2, z_3, z_4 são finitos e distintos dois a dois, então

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3) \cdot (z_4 - z_1)}.$$

C. Equações diferenciais fuchsianas

As equações diferenciais (ED) em que todos os pontos singulares são pontos singulares regulares são denominadas **equações diferenciais fuchsianas** (EDFs) ou, simplesmente, **equações fuchsianas**. Em especial, apresentamos os principais resultados sobre as EDFs de segunda ordem.

Definição 6: [14] A equação diferencial

$$y''(z) + p(z)y'(z) + q(z)y(z) = 0, \quad (1)$$

é chamada equação diferencial fuchsiana de segunda ordem se todo ponto singular no plano complexo estendido for regular, isto é, se a singularidade em $p(z)$ for um pólo simples e em $q(z)$ for no máximo um pólo de ordem 2.

As soluções da EDF são estabelecidas por meio do método de Frobenius, [14]. Este método é mais geral, isto é, possibilita o cálculo das soluções de uma EDF de ordem n em um ponto singular regular.

Um exemplo de uma EDF é a equação diferencial hipergeométrica (EDH) dada por

$$z(z-1)y''(z) + [(\alpha + \beta + 1)z - \gamma]y'(z) + \alpha\beta y(z) = 0.$$

Esta equação possui três pontos singulares regulares em $z = 0$, $z = 1$ e $z = \infty$. Sob o ponto de vista geométrico, temos um triângulo hiperbólico com dois geradores, transformações de Möbius, sendo uma translação e o outro uma rotação de 180 graus. Topologicamente, esta região é identificada como uma superfície de gênero $g = 0$ e, portanto, uma esfera.

Além disso, a EDH possui 24 soluções, as soluções associadas a cada uma das singularidades da EDH são bem estabelecidas e são escritas em termos da função hipergeométrica. Estas por sua vez, são descritas em termos da função gama (tais funções podem ser vistas como uma extensão meromorfa da função fatorial), veja [14].

D. Uniformização

Esta subseção está baseada na referência [16], devido à clareza de exposição dos conceitos envolvidos. Para tanto, considere o círculo dado por $X^2 + Y^2 = 1$. As duas formas paramétricas associadas a esta equação são dadas por $Y = \sin z$, $X = \cos z$ e por $Y = \frac{2z}{1+z^2}$, $X = \frac{1-z^2}{1+z^2}$. Note que X é uma função assumindo dois valores de Y . Por outro lado, na forma paramétrica, ambos X e Y são expressos em termos de funções com valores únicos, ou uniformes. Portanto, as funções paramétricas uniformizam o círculo. Essas funções são chamadas *funções automorfas*, veja [16].

Sejam $f_1(z)$, $f_2(z)$ duas funções automorfas (uma generalização de funções do tipo circular, hiperbólica, elíptica, etc), pertencendo ao mesmo grupo e tendo o mesmo domínio de

definição. Então, existe uma relação algébrica $G(f_1, f_2) = 0$. Se X é uma função algébrica de Y , definida pela relação $G(X, Y) = 0$, então as funções $X = f_1(z)$ e $Y = f_2(z)$ uniformizam a função algébrica. Note que dados $G(X, Y) = p_0(Y)X^m + p_1(Y)X^{m-1} + \dots + p_m(Y) = 0$, onde $p_i(Y)$ são polinômios, e $G(X, Y)$ é irredutível, então para cada valor de Y existem m valores distintos de X . Então, a superfície de Riemann para X como uma função de Y é uma superfície fechada de dois lados com m -folhas e com um número finito de pontos de ramificação, veja [16].

E. Funções hiperelípticas

Recomendamos a referência [15] ao leitor interessado em obter mais informações.

Definição 7: [15] Seja K um corpo e seja \bar{K} o fecho algébrico de K . Uma curva hiperelíptica C de gênero g , ($g \geq 1$), sobre K é uma equação da forma:

$$C : v^2 + h(u)v = f(u) \quad \text{em } K[u, v], \quad (2)$$

onde $h(u) \in K[u]$ é um polinômio com grau no máximo g , $f(u) \in K[u]$ é um polinômio mônico de grau $2g + 1$, e não existem soluções $(u, v) \in \bar{K} \times \bar{K}$ satisfazendo simultaneamente a equação $v^2 + h(u)v = f(u)$ e as equações de derivadas parciais $2v + h(u) = 0$ e $h'(u)v - f'(u) = 0$. Um ponto singular em C é uma solução $(u, v) \in \bar{K} \times \bar{K}$ satisfazendo simultaneamente a equação $v^2 + h(u)v = f(u)$ e as equações das derivadas parciais $2v + h(u) = 0$ e $h'(u)v - f'(u) = 0$.

Um exemplo de uma curva hiperelíptica é a função $y^2 = f(z)$ com $f(z) = z^5 - 2z^4 - 7z^3 + 8z^2 + 12z = z(z+1)(z-3)(z+2)(z-2)$.

Curvas hiperelípticas formam uma classe especial de curvas algébricas e podem ser vistas como uma generalização das curvas elípticas. Existem curvas hiperelípticas para todos os gêneros $g \geq 1$. Uma curva hiperelíptica de gênero $g = 1$ é uma curva elíptica. O grau do polinômio determina o gênero da curva: um polinômio com grau $2g + 1$ ou $2g + 2$ implica que o gênero da curva é g .

F. Constelações de sinais geometricamente uniformes

Definição 8: [3] Uma constelação de sinais é um subconjunto finito de sinais em um conjunto de sinais \mathcal{S} .

Definição 9: [13] Uma figura geométrica S é um subconjunto de pontos em um espaço métrico E . Duas figuras geométricas S_1 e S_2 de um espaço métrico E são geometricamente congruentes se existir uma isometria $T : E \rightarrow E$ tal que $T(S_1) = S_2$. Neste caso, dizemos que S_1 e S_2 tem a mesma forma. Assim, uma isometria T que deixa invariante uma figura geométrica S , isto é, $T(S) = S$, é denominada uma **simetria** de S . O conjunto de simetrias de S , $U(S)$, forma um grupo sob a operação de composição, onde $U(S)$ é chamado o **grupo de simetrias** de S .

Definição 10: [3] Um conjunto de sinais \mathcal{S} é uma constelação de sinais GU se para quaisquer dois pontos $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, existe uma isometria $T \in \text{Isom}(\mathcal{S})$ tal que $T(s_1) = s_2$. Nesse caso, dizemos que $\text{Isom}(\mathcal{S})$ age transitivamente em \mathcal{S} , isto é,

$$\text{Isom}(s_0) = \{T(s_0) : T \in \text{Isom}(\mathcal{S})\} = \mathcal{S}.$$

Destacamos que \mathcal{S} coincide com a órbita de s_0 .

Definição 11: [3] Seja $s_0 \in \mathcal{S}$. O conjunto

$$R_V(s_0) = \{x \in E : d(x, s_0) \leq d(x, T(s_0)), \forall T \in \text{Isom}(\mathcal{S})\}$$

é denominado região de Voronoi associada ao sinal s_0 .

Ao restringirmos a definição da região de Voronoi associada ao sinal s_0 a um dos dois modelos hiperbólicos, \mathbb{D}^2 ou \mathbb{H}^2 , resulta na definição equivalente da região de Dirichlet.

Teorema 1: [3] Se \mathcal{S} é uma constelação de sinais GU, então todas as regiões de Voronoi são da mesma forma.

Por fim, apresentamos as condições para que uma constelação de sinais GU esteja relacionada com um grupo.

Definição 12: [3] Uma constelação de sinais GU \mathcal{S} está casada a um grupo G se, existir uma aplicação $\eta : G \rightarrow \mathcal{S}$, denominada aplicação casada, tal que

$$d(\eta(a), \eta(b)) = d(\eta(e), \eta(a^{-1}b)), \quad \forall a, b \in G,$$

onde e é o elemento neutro de G e d é uma distância em \mathcal{S} .

III. PROPOSTA DE WHITTAKER PARA A DETERMINAÇÃO DA REGIÃO DE UNIFORMIZAÇÃO DE UMA CURVA HIPERELÍPTICA

A determinação da região de uniformização de uma curva hiperelíptica por se tratar de um procedimento pouco difundido e de muita relevância em Teoria de Comunicações, tanto no contexto algébrico (determinação da estrutura algébrica para a realização do casamento do código corretor de erros à constelação de sinais) como no contexto geométrico (especificação da região de decisão e, portanto, do processo de decodificação/demodulação), é que apresentaremos o algoritmo para a obtenção dos geradores do grupo fuchsiano associado à região de uniformização de uma curva hiperelíptica, [9]. Não só isso, mas que a referida região de uniformização é a região de decisão, ou equivalentemente, a região de Voronoi associada a um sinal digital de uma constelação de sinais. O procedimento inicia com o estabelecimento do que vem a ser a conjectura de Whittaker. Como resultado da solução da EDF temos o seguinte procedimento. Conhecidas as raízes de uma dada curva hiperelíptica, teremos que determinar as geodésicas associadas às raízes subsequentes bem como os pontos médios dessas geodésicas. Com isso, a transformação elíptica para cada lado do polígono hiperbólico é estabelecida. O conjunto dessas transformações elípticas especifica os geradores do grupo fuchsiano associado ao polígono resultante da curva hiperelíptica. Todavia, o interesse reside no estabelecimento dos geradores do subgrupo associado à justaposição de dois desses polígonos. Para isso, é suficiente fixar uma das transformações elípticas e calcular os produtos desta transformação elíptica pelas demais. Esta região é a que irá uniformizar a dada curva hiperelíptica. O resultado disso é a determinação do número de lados do polígono bem como do número de polígonos que recobre cada vértice, ou seja, os valores de p e q da tesselação $\{p, q\}$.

A. A conjectura de Whittaker

Conjectura 1 (Conjectura de Whittaker): Considere a curva hiperelíptica

$$y^2 = (z - e_1)(z - e_2)\dots(z - e_{2n+2}) = f(z). \quad (3)$$

A variável de uniformização de (3) é o quociente de duas soluções linearmente independentes da equação diferencial linear

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left\{ \sum_{r=1}^{2n+2} \frac{1}{(z-e_r)^2} + \frac{P(z)}{(z-e_1)\dots(z-e_{2n+2})} \right\} y = 0, \quad (4)$$

onde $P(z) = -(2n+2)z^{2n} + 2np_1z^{2n-1} + c_1z^{2n-2} + \dots + c_{2n-1}$, $p_1 = \sum e_r$, e c_1, \dots, c_{2n-1} são constantes denominadas *parâmetros acessórios*, que dependem das raízes da curva hiperelíptica e determinadas pela condição de que o grupo associado seja fuchsiano, [9]. Assim, (4) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left\{ \left[\frac{f'(z)}{f(z)} \right]^2 - \frac{(2n+2)f''(z)}{2n+1} \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} y = 0.$$

Whittaker, [9], confirma a validade dessa proposta ao obter o grupo fuchsiano associado à região de uniformização da curva $y^2 = z^5 + 1$. Todavia, essa conjectura não pode ser generalizada para qualquer curva algébrica. Até onde é de nosso conhecimento, Rankin em [12] estabelece um conjunto com o maior número de curvas algébricas para as quais a conjectura é válida, isto é, curvas da forma $y^m = z^p(z^N - 1)^r$, onde m, p, N e r são inteiros positivos. Uma vez especificada a EDF, o procedimento consiste em realizar mudanças de variáveis necessárias para a obtenção da equação diferencial hipergeométrica (EDH) associada. Em seguida, procede-se em direção à obtenção do quociente de duas soluções linearmente independentes da EDH, conduzindo à obtenção das transformações de Mobius, mais especificamente, dos geradores do grupo fuchsiano.

IV. DETERMINAÇÃO DA REGIÃO DE UNIFORMIZAÇÃO DE UMA CURVA HIPERELÍPTICA

O objetivo nesta seção é estabelecer uma relação entre o grau de uma curva hiperelíptica e os parâmetros da tesselação $\{p, q\}$ da superfície associada tendo como elemento básico a determinação da região de uniformização da referida curva hiperelíptica.

Para a determinação dessa região de uniformização, o encaminhamento adotado foi o de fazer uso da EDF para a obtenção dos geradores do grupo fuchsiano associado à região de uniformização da curva hiperelíptica, [9]. Ressaltamos que o nosso interesse está em curvas hiperelípticas cujas raízes são distintas, que estejam em \mathbb{D}^2 , e que tais raízes sejam os vértices de um polígono regular (todos os lados iguais) ou quase-regular (apenas um lado diferente) conforme será visto nas próximas seções. Para maiores detalhes, veja [17].

A. Algoritmo para a determinação dos geradores do grupo fuchsiano

Nesta subseção, apresentamos um algoritmo para a determinação dos geradores do grupo fuchsiano associados à região que uniformizará a dada curva hiperelíptica. Dada a limitação de espaço, indicamos a referência [11] para as justificativas de cada passo do algoritmo em consideração.

P1- Dada uma curva hiperelíptica, determinar suas raízes;

P2- Determinar as geodésicas associadas às raízes subsequentes bem como os pontos médios dessas geodésicas;

P3- Para cada lado do polígono hiperbólico, determinar a transformação elíptica,

$$S_j(z) = \frac{az+b}{cz+d} \longleftrightarrow S_j = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com $ad - bc = 1$, $|\text{tr}(S_j)| < 2$ e $j = 1, \dots, n$ e verificar se $S_j S_j = Id$;

P4- Os geradores do grupo fuchsiano são especificados por S_j , $j = 1, \dots, n$, onde n é o grau da curva hiperelíptica;

P5- Fixar uma das transformações elípticas, por exemplo S_k , e calcular os produtos $S_k S_j$, para todo $j \neq k$;

P6- Verificar se as transformações $S_k S_j$, calculadas em P5, são hiperbólicas;

P7- Os geradores do subgrupo fuchsiano associados à região fundamental são especificados por $\langle S_k, S_j \rangle$, com k fixo e para todo $j \neq k$.

Chamamos a atenção ao fato de que o objetivo reside no estabelecimento de uma relação entre o grau da curva hiperelíptica e o número de lados do polígono associado à região fundamental e não na determinação da variável de uniformização. Devido à limitação de espaço consideraremos a curva hiperelíptica $y^2 = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ como exemplo.

Exemplo 1: Dada a curva hiperelíptica $y^2 = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, de gênero 2, após aplicarmos o algoritmo obtemos as transformações elípticas como soluções da EDH e tais que atuam nas correspondentes arestas do polígono hiperbólico, veja Figura 1.

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{-2.30iz + (-2.02 + 0.46i)}{(-2.02 - 0.46i)z + 2.30i}, & U_2 &= \frac{2.30iz + (1.62 + 1.29i)}{(1.62 - 1.29i)z - 2.30i} \\ U_3 &= \frac{-2.3047iz - 2.08i}{2.08iz + 2.30i}, & U_4 &= \frac{2.30iz + (-1.62 + 1.29i)}{(-1.62 - 1.29i)z - 2.30i} \\ U_5 &= \frac{-2.30iz + (2.02 + 0.46i)}{(2.02 - 0.46i)z + 2.30i}, & U_6 &= \frac{1.28iz - 0.79i}{0.79iz - 1.28i}. \end{aligned}$$

Portanto, os geradores do grupo fuchsiano associado à curva hiperelíptica dada são U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 e U_6 . Topologicamente este polígono de 6 lados com os correspondentes geradores representam uma superfície de gênero $g = 0$. Como o polígono em \mathbb{D}^2 formado pelas raízes da curva hiperelíptica $y^2 = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ é quase-regular, a aresta a ser fixada é a associada a transformação U_6 , veja Figura 1. Assim, os geradores do polígono fundamental que uniformizará a curva hiperelíptica são dados por

$$\begin{aligned} U_6 U_1 &= \frac{(2.58 + 1.61i)z + (1.25 - 2.59i)}{(1.25 + 2.59i)z + (2.58 - 1.61i)}, \\ U_6 U_2 &= \frac{(-3.98 - 1.29i)z + (-3.49 + 2.08i)}{(-3.49 - 2.08i)z + (-3.98 + 1.29i)}, \\ U_6 U_3 &= \frac{4.60z + 4.49}{4.49z + 4.60}, \\ U_6 U_4 &= \frac{(-3.98 + 1.29i)z + (-3.49 - 2.08i)}{(-3.49 + 2.08i)z + (-3.98 - 1.29i)}, \\ U_6 U_5 &= \frac{(2.58 - 1.61i)z + (1.25 + 2.59i)}{(1.25 - 2.59i)z + (2.58 + 1.61i)}. \end{aligned}$$

A Figura 1 ilustra a região fundamental (polígono hiperbólico regular de 10 lados) que uniformizará a curva hiperelíptica dada.

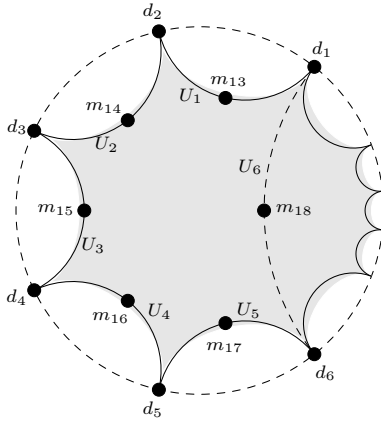


Fig. 1. Região Fundamental associada à curva $y^2 = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ em \mathbb{D}^2

B. Relação entre o grau da curva hiperelíptica e a tesselação associada

Esta subseção tem por objetivo mostrar a existência de uma relação entre o grau de uma dada curva hiperelíptica e as possíveis tesselações regulares que poderão conduzir a obtenção de grupos fuchsianos aritméticos associados.

Chamamos a atenção às condições a serem satisfeitas: o polígono cujos vértices são as raízes da curva deve ser regular ou quase regular. Desta forma, a região fundamental nos dois casos será um polígono regular, denominado **polígono fundamental**. O emparelhamento das arestas resulta na transformação de Mobius, ou equivalentemente, em cada gerador do grupo fuchsiano associado. A atuação dos elementos desse grupo na região fundamental conduz ao recobrimento do plano hiperbólico e mais que isso, será um particionamento do plano hiperbólico se tais polígonos fundamentais não tiverem sobreposição.

Além disso, dentre as infinitas tesselações no plano hiperbólico, destacamos as tesselações $\{4g, 4g\}$, $\{4g + 2, 2g + 1\}$ e $\{12g - 6, 3\}$, onde $g = 0, 1, 2, \dots$, é o gênero da superfície associada. Estas tesselações são as mais importantes para a codificação de canais tanto na teoria da codificação clássica quanto na teoria da codificação quântica.

Note que, dada uma curva hiperelíptica de grau n cujas raízes apresentam um arranjo simétrico em \mathbb{D}^2 , onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 5$, formam um polígono regular de n lados. Consequentemente, a região fundamental que uniformizará a referida curva hiperelíptica será um polígono regular de $p = 2n - 2$ lados. Todavia, a determinação do valor de q associado à tesselação hiperbólica $\{p, q\}$ terá que satisfazer a desigualdade $(p - 2)(q - 2) > 4$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Proposição 1: Considere uma curva hiperelíptica de grau n , com n raízes distintas em \mathbb{D}^2 , formando um polígono hiperbólico regular de n lados. Da justaposição de dois desses polígonos resulta em um polígono com $p = 2(n - 1)$ lados. Se o grau da curva é

- 1) $2g + 1$ então a tesselação associada é $\{4g, q\}$, onde q satisfaz $(4g - 2)(q - 2) > 4$;
- 2) $2g + 2$ então a tesselação associada é $\{4g + 2, q\}$, onde

q satisfaz $4g(q - 2) > 4$;

- 3) $6g - 2$ então a tesselação associada é $\{12g - 6, q\}$, onde q satisfaz $(12g - 8)(q - 2) > 4$;
- onde g é o gênero da superfície associada.

V. CONCLUSÕES

Para as curvas hiperelípticas de interesse prático e satisfazendo a conjectura de Whittaker, foi apresentada uma forma sistemática de determinação do grupo fuchsiano associado a esta curva, bem como do subgrupo fuchsiano associado à região fundamental (região de Voronoi) que uniformizará a referida curva hiperelíptica. Esta região é o caso limite em relação ao desenvolvimento clássico. Além disso, foi estabelecida uma relação entre o grau da curva hiperelíptica e a tesselação associada à superfície gerada pelo subgrupo fuchsiano.

AGRADECIMENTOS

A FAPESP e CNPq pelo apoio financeiro durante o período desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] R.G. Cavalcante, H. Lazari, J.D. Lima e R. Palazzo Jr., "A new approach to the design of digital communication systems," *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science - DIMACS Series*, AMS, vol. 68, pp. 145-177, 2005.
- [2] G.D. Forney, Jr., "Geometrically uniform codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT 37, pp. 1241-1260, 1991.
- [3] H. Lazari, e R. Palazzo Jr., "Geometrically uniform hyperbolic codes," *Computational and Applied Mathematics*, vol. 24, N. 2, pp. 173-192, 2005.
- [4] R.G. Cavalcante e R. Palazzo Jr., "Performance analysis of N-PSK signal constellations in Riemannian varieties," *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 426, pp. 21-30, 2003.
- [5] E.B. Silva, M. Firer, S.I.R. Costa, e R. Palazzo Jr. "Signal constellations in the hyperbolic plane: A proposal for new communication systems," *Journal of the Franklin Institute*, USA, v. 343, n.1, p. 69-82, 2006.
- [6] I.B. Chacon, D. Remón, C. Hollanti, e M. Alsina, "Nonuniform Fuchsian codes for noisy channels," *Journal of the Franklin Institute*, 351, pp.5076-5098, 2014.
- [7] I.B. Chacon, C. Hollanti, M. Alsina, e D. Remón, "Fuchsian codes with arbitrarily high code rates," *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 220, núm. 1, p. 180-196, 2016.
- [8] V.L. Vieira, M.B. Faria, R. Palazzo Jr, "Generalized edge-pairings for the family of hyperbolic tessellations $\{10\lambda, 2\lambda\}$," *Comput. Appl. Math.*, vol. 33, pp. 1-15, 2014.
- [9] E.T. Whittaker, "On hyperlemniscate functions, a family of automorphic functions," *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 1, 4, pp. 274-278, 1929.
- [10] A.J. de Oliveira, e R. Palazzo Jr, "Geometric and algebraic structures associated with the channel quantization problem," *Computational and Applied Mathematics*, v. 37, p. 1-19, 2017.
- [11] E.P.D.O. Guazzi, *Caracterizações Algébrica e Geométrica das Regiões de Uniformização de Curvas Hiperelípticas via Equação Diferencial Fuchsiana para a Construção de Constelações de Sinais Hiperbólicas*, Tese Doutorado, FEEC-UNICAMP, Campinas, SP, 2019.
- [12] R.A. Rankin, "Sir Edmund Whittaker's work on automorphic functions," *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, vol. 11, 1, pp. 25-30, 1958.
- [13] S. Katok, *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press: Chicago, 1992.
- [14] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, vol. 11, 1979.
- [15] H. Stichtenoth, *Algebraic Function Fields and Codes*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 2nd edition, 2008.
- [16] L. Ford, *Automorphic Functions*, Chelsea Publishing Company, 1957.
- [17] J.A. Pereira, *Zeros de Polinômios Auto-Recíprocos Reais no Círculo Unitário*, Dissertação de Mestrado, Unesp, 2015.