

Aproximações Estatísticas para Enlaces Ópticos no Espaço Livre com Múltiplos Transceptores

Pedro Lopes Imerim Medina, Francisco Raimundo Albuquerque Parente
e José Cândido Silveira Santos Filho

Resumo— Sistemas de comunicações ópticas no espaço livre têm despertado interesse crescente devido a sua alta taxa de transmissão e a seu baixo custo de instalação. O canal desses sistemas é o ambiente atmosférico, cuja turbulência pode ser bem modelada pela distribuição gama-gama. Para mitigar as flutuações de sinal decorrentes de tal turbulência, uma técnica comum é a combinação por ganho igual de múltiplas transmissões simultâneas, cuja análise matemática é em geral complicada. Isso tem motivado a busca por aproximações mais simples. Neste trabalho, são propostas aproximações assintoticamente ótimas para estatísticas de saída de enlaces ópticos no espaço livre com múltiplos transceptores. Para isso, um método conhecido como casamento de assíntotas é empregado. Resultados numéricos ilustram que as aproximações propostas oferecem um ajuste superior àquelas da literatura sob regime de média a alta relação sinal-ruído, região de maior interesse prático para sistemas de comunicações.

Palavras-Chave— Casamento de assíntotas, Combinação por ganho igual, Comunicações ópticas no espaço livre, Distribuição gama-gama.

Abstract— Free-space optical communications systems have attracted increasing interest because of their high transmission rate and low installation cost. The channel of these systems is the atmospheric environment, whose turbulence can be well modeled by the gamma-gamma distribution. In order to mitigate the signal fluctuations caused by such turbulence, a common technique is the equal-gain combining of multiple simultaneous transmissions, whose mathematical analysis is often complicated. This has motivated the search for simpler approximate solutions. In this work we propose asymptotically optimal approximations for output statistics of free-space optical links with multiple transceivers. To this end, a method known as asymptotic matching is employed. Numerical results illustrate that the proposed approximations offer a fit better than those approximations available in the literature under regime of medium to high signal-to-noise ratio, a region of most practical interest for communications systems.

Keywords— Asymptotic matching, Equal-gain combining, Free-space optical communications, Gamma-gamma distribution.

I. INTRODUÇÃO

Em sistemas de comunicações ópticas no espaço livre (FSO, do inglês *free-space optical communications*), o processo de comunicação é realizado por meio de *lasers*, no transmissor, e fotodetectores, no receptor. Ao longo do trajeto aéreo, o sinal transmitido está sujeito à turbulência atmosférica, por conta de variações no índice de refração do ar decorrentes

Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP 13083-852, Brasil (e-mails: {pmedina, parente, candido}@decom.fee.unicamp.br). Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com Processo 2018/25009-4.

de heterogeneidades de temperatura e pressão, bem como de chuva, neblina e poluição. O efeito dessa turbulência atmosférica sobre o sinal óptico pode ser modelado como uma atenuação aleatória descrita por uma distribuição de probabilidade. Na literatura, existem diversos modelos para caracterizar esse efeito, com destaque para a distribuição gama-gama (G-G), capaz de se ajustar bem para diversas condições atmosféricas [1].

Como efeito da turbulência atmosférica, o nível do sinal recebido apresenta flutuações ao longo do tempo, reduzindo a confiabilidade do sistema [1], [2]. Normalmente, a fim de melhorar a qualidade da comunicação, empregam-se vários *lasers* no transmissor e vários fotodetectores no receptor, de modo que os sistemas apresentam múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês *multiple-input multiple-output*). Os sinais recebidos por cada fotodetector são combinados no receptor, de modo a produzir um sinal mais confiável que cada sinal recebido individualmente. Para isso, diferentes técnicas podem ser usadas, como combinação por seleção pura (SC, do inglês *selection combining*), combinação por razão máxima (MRC, do inglês *maximal-ratio combining*) ou combinação por ganho igual (EGC, do inglês *equal-gain combining*). Neste trabalho, emprega-se a técnica EGC, comumente usada por sua simplicidade e bons resultados, em que a saída é a soma das múltiplas réplicas recebidas. O sinal resultante nesse caso pode ser modelado como uma soma de variáveis aleatórias (VAs), cuja caracterização estatística em termos da função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *probability density function*) ou, equivalentemente, da função distribuição acumulada (CDF, do inglês *cumulative distribution function*) possibilita avaliar o desempenho do sistema [2], [3].

Sabe-se que a formulação exata da PDF e da CDF de somas de VAs depende de integrais multidimensionais [4]. Essas integrais apresentam em geral difícil tratamento matemático, e mesmo sua avaliação por meio de rotinas numéricas se mostra inviável à medida que a quantidade de VAs na soma aumenta (cinco ou mais termos, por exemplo). Isso tem motivado a busca por métodos aproximados mais simples na literatura. Em particular, aproximações para somas de VAs do tipo G-G foram propostas usando a função geradora de momentos [5] e a aproximação de Padé [6]. A partir de um método tradicional conhecido como casamento de momentos [7], uma aproximação para a soma de VAs G-G usando uma VA α - μ foi proposta por Peppas [2]. Apesar de largamente usado na literatura, o casamento de momentos não garante um bom ajuste para regimes de média a alta relação sinal-ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*). No entanto,

é justamente essa a região de maior interesse prático para sistemas de comunicações, pois nela métricas de desempenho importantes como taxa de erro de bit e probabilidade de interrupção operam em níveis apropriados [8], [9].

Neste trabalho, são propostas aproximações estatísticas de saída para sistemas FSO com ajuste assintoticamente ótimo em alta SNR. Tal ajuste é garantido por meio de um método recente denominado casamento de assíntotas [9], [10]. Além disso, considera-se um cenário em que os múltiplos ramos de entrada do combinador podem ser modelados por VAs independentes com parâmetros arbitrários. Conforme atestado pelos resultados numéricos, a abordagem proposta supera o método de casamento de momentos explorado por Peppas [2].

No texto que segue, $\text{Prob}(\cdot)$ representa probabilidade; $f(\cdot)(\cdot)$, PDF; $F(\cdot)(\cdot)$, CDF; $\mathbb{E}[\cdot]$, valor esperado; $\Gamma(\cdot)$, a função gama; $K_\nu(\cdot)$, a função de Bessel modificada do segundo tipo e ordem ν ; e “ \sim ”, assintoticamente igual a, ou seja, $f(x) \sim g(x) \iff \lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = 1$.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Com o intuito de abordar um cenário geral, seja um sistema FSO com L transmissores e N receptores, em que o feixe transmitido por cada um dos transmissores é recebido em todos os receptores. Conforme discutido na próxima seção, o canal entre cada transmissor e cada receptor é modelado como uma VA I_{ln} , em que $l \in \{1, \dots, L\}$ e $n \in \{1, \dots, N\}$. Dessa forma, a saída resultante R do sistema pode ser expressa por

$$R = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N I_{ln}. \quad (1)$$

Para caracterizar o desempenho de sistemas FSO em termos de métricas importantes como probabilidade de interrupção (P_{out}), é necessário a princípio conhecer a PDF ou a CDF da soma R . No entanto, a formulação exata geral de tais estatísticas se mostra por vezes inviável, o que tem motivado a busca por aproximações mais simples. Assim, é oportuno investigar aproximações que descrevam o comportamento estatístico da soma na região de maior interesse prático, ou seja, em alta SNR média. Neste trabalho, propõe-se aproximar a soma R usando uma VA \tilde{R} tal que ambas sejam assintoticamente idênticas em regime de alta SNR. Antes disso, porém, é importante descrever o modelo de canal óptico considerado, como detalhado a seguir.

III. MODELO DE CANAL

Seja um sistema MIMO FSO com L transmissores enviando bits de informação $s \in \{0, 1\}$ para N receptores. Em particular, as diferentes VAs I_{ln} são consideradas independentes, o que corresponde a transceptores separados na ordem de centímetros e a enlaces ópticos maiores que poucos quilômetros [3]. Empregando-se EGC no receptor para melhorar o desempenho do sistema, o sinal de saída resultante s_r pode ser expresso por [2, Eq. 13]

$$s_r = \frac{s\eta}{LN} \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N I_{ln} + v, \quad (2)$$

em que η é o coeficiente de conversão óptico-elétrico, e v é o ruído gaussiano branco de variância $N_0/2$. Além disso, a SNR instantânea é dada por

$$\gamma = \frac{\eta^2 R^2}{L^2 N^2 N_0}, \quad (3)$$

e a SNR média, por¹

$$\bar{\gamma} = \frac{\eta^2 \mathbb{E}[R^2]}{L^2 N^2 N_0}. \quad (4)$$

A fim de descrever as flutuações aleatórias causadas pelo efeito de turbulência no sinal recebido, uma distribuição comumente usada é a G-G, que se ajusta bem para diferentes condições atmosféricas. Em particular, sua PDF $f_{I_{ln}}(\cdot)$ é dada por [1, Cap. 2, Eq. (43)]

$$f_{I_{ln}}(I) = \frac{2(k_{ln}m_{ln})^{\frac{1}{2}(k_{ln}+m_{ln})}}{\bar{I}_{ln}\Gamma(k_{ln})\Gamma(m_{ln})} \left(\frac{I}{\bar{I}_{ln}}\right)^{\frac{1}{2}(k_{ln}+m_{ln})-1} \times K_{k_{ln}-m_{ln}}\left(2\sqrt{k_{ln}m_{ln}\frac{I}{\bar{I}_{ln}}}\right), \quad (5)$$

e seus enésimos momentos $\mathbb{E}[I_{ln}^n]$ são expressos por [2, Eq. (4)]

$$\mathbb{E}[I_{ln}^n] = \left(\frac{k_{ln}m_{ln}}{\bar{I}_{ln}}\right)^{-n} \frac{\Gamma(n+k_{ln})\Gamma(n+m_{ln})}{\Gamma(k_{ln})\Gamma(m_{ln})}, \quad (6)$$

em que \bar{I}_{ln} é o valor médio de I_{ln} , e os termos k_{ln} e m_{ln} são calculados a partir de parâmetros físicos do sistema [1], [11].

Outro fator importante para caracterizar o canal de comunicação óptico é o índice de cintilação $\sigma_{I_{ln}}^2$. Esse índice está diretamente associado às condições atmosféricas e representa o nível do efeito de turbulência a que o sinal está sujeito. Para $\sigma_{I_{ln}}^2 < 1$, $\sigma_{I_{ln}}^2 \approx 1$ e $\sigma_{I_{ln}}^2 > 1$, consideram-se regimes de turbulência fraca, moderada e forte, respectivamente, o que pode ser determinado por [1, Cap. 2, Eq. (45)]

$$\sigma_{I_{ln}}^2 = \frac{1}{k_{ln}} + \frac{1}{m_{ln}} + \frac{1}{k_{ln}m_{ln}}. \quad (7)$$

A análise de desempenho do sistema FSO considerado depende de estatísticas como a PDF ou a CDF de somas. Devido à dificuldade analítica de obter tais estatísticas em forma fechada, algumas aproximações têm sido propostas, conforme discutido a seguir.

IV. SOLUÇÕES EXISTENTES

Nesta seção, é apresentado o método tradicional de casamento de momentos, que tem sido amplamente usado na literatura para obter aproximações estatísticas. Inicialmente, a formulação exata geral para as estatísticas de somas de VAs é revisitada.

A. Solução Exata

De forma a simplificar a notação em (1), seja

$$R = \sum_{i=1}^{LN} I_i. \quad (8)$$

Para somas de VAs positivas, como é o caso ora considerado, a solução exata geral é dada através de uma formulação conhecida como Integral de Brennan [4]. Assim, a PDF $f_R(\cdot)$ da soma exata R pode ser obtida como

$$f_R(r) = \int_0^r \int_0^{r-I_{LN}} \dots \int_0^{r-\sum_{i=3}^{LN} I_i} f_{I_1, \dots, I_{LN}}\left(r - \sum_{i=2}^{LN} I_i, I_2, \dots, I_{LN}\right) dI_2 \dots dI_{LN-1} dI_{LN}. \quad (9)$$

¹Note que foi usada a definição tradicional de SNR média, diferentemente de Peppas [2].

Note que a formulação em (9) é expressa como uma integral multidimensional da PDF conjunta dos termos da soma. Assim, à medida que o número de VAs na soma aumenta, essa abordagem em geral se torna complicada, não admitindo solução em forma fechada. Além disso, o uso de rotinas numéricas de integração também se mostra computacionalmente inviável. Para superar essa limitação, algumas soluções aproximadas têm sido propostas na literatura.

B. Solução Aproximada

Para contornar as dificuldades inerentes à solução exata, alguns trabalhos na literatura têm proposto aproximações para somas de VAs. Nesse contexto, um método amplamente usado é o casamento de momentos, que consiste em relacionar o enésimo momento da soma exata R com o respectivo enésimo momento da soma aproximada \tilde{R} . No caso mais simples, isso pode ser obtido por [9, Eq. (7)]

$$\mathbb{E}[\tilde{R}^n] = \mathbb{E}[R^n]. \quad (10)$$

De forma similar, Peppas [2] propôs aproximar a soma exata de VAs G-G por uma VA α - μ , que possui PDF $f_{\tilde{R}}(\cdot)$ dada por [12, Eq. (1)]

$$f_{\tilde{R}}(r) = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\mu}^{\tilde{\mu}} r^{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}-1}}{\tilde{\Omega}^{\tilde{\mu}} \Gamma(\tilde{\mu})} \exp\left(-\tilde{\mu} \frac{r^{\tilde{\alpha}}}{\tilde{\Omega}}\right) \quad (11)$$

e enésimo momento expresso por [12, Eq. (5)]

$$\mathbb{E}[\tilde{R}^n] = \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{n}{\tilde{\alpha}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\tilde{\alpha}} + \tilde{\mu}\right)}{\Gamma(\tilde{\mu})}, \quad (12)$$

em que $\tilde{\alpha} > 0$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{E}[\tilde{R}^{\tilde{\alpha}}]$ e $\tilde{\mu} \triangleq \tilde{\Omega}^2 / \mathbb{V}[\tilde{R}^{\tilde{\alpha}}]$ são os parâmetros da distribuição. Esses parâmetros foram ajustados de modo que os momentos de primeira, segunda e quarta ordens da VA α - μ satisfizessem o sistema de equações [2, Eqs. (7)–(9)]

$$\frac{\mathbb{E}^2[R]}{\mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}^2[R]} = \frac{\Gamma^2\left(\tilde{\mu} + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)}{\Gamma(\tilde{\mu})\Gamma\left(\tilde{\mu} + \frac{2}{\tilde{\alpha}}\right) - \Gamma^2\left(\tilde{\mu} + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)} \quad (13a)$$

$$\frac{\mathbb{E}^2[R^2]}{\mathbb{E}[R^4] - \mathbb{E}^2[R^2]} = \frac{\Gamma^2\left(\tilde{\mu} + \frac{2}{\tilde{\alpha}}\right)}{\Gamma(\tilde{\mu})\Gamma\left(\tilde{\mu} + \frac{4}{\tilde{\alpha}}\right) - \Gamma^2\left(\tilde{\mu} + \frac{2}{\tilde{\alpha}}\right)} \quad (13b)$$

$$\tilde{\Omega} = \left(\frac{\mathbb{E}[R] \tilde{\mu}^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}} \Gamma(\tilde{\mu})}{\Gamma\left(\tilde{\mu} + \frac{1}{\tilde{\alpha}}\right)}\right)^{\tilde{\alpha}}, \quad (13c)$$

em que $\mathbb{E}[R]$, $\mathbb{E}[R^2]$ e $\mathbb{E}[R^4]$ podem ser obtidos a partir dos momentos das VAs I_i em (8) por [13, Eq. (6)]

$$\mathbb{E}[R^n] = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n_1} \dots \sum_{n_{LN-1}=0}^{n_{LN-2}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \dots \binom{n_{LN-2}}{n_{LN-1}} \times \mathbb{E}[I_1^{n-n_1}] \mathbb{E}[I_2^{n_1-n_2}] \dots \mathbb{E}[I_{LN}^{n_{LN-1}}]. \quad (14)$$

Apesar de fornecer um bom ajuste em regime de baixa a média SNR, o casamento de momentos não garante um desempenho ótimo na cauda da distribuição. Esta região corresponde ao regime de alta SNR, sendo portanto de maior interesse prático em sistemas de comunicação. Para contornar essa dificuldade, é oportuno usar uma técnica recente conhecida como casamento de assíntotas.

V. APROXIMAÇÕES PROPOSTAS

Nesta seção, aproximações estatísticas usando o método de casamento de assíntotas são propostas para o sistema FSO considerado.

A. Preliminares

Uma forma de garantir um ajuste assintoticamente ótimo em alta SNR consiste em usar casamento de assíntotas. Nesse método, os parâmetros da distribuição aproximada são ajustados de modo que o seu comportamento na origem coincida com o correspondente da soma exata. Assim, a assíntota da PDF aproximada $f_{\tilde{R}}(r) \sim \tilde{a}_0 r^{\tilde{b}_0}$ deve ser igual à assíntota da PDF da soma exata $f_R(r) \sim a_0 r^{b_0}$, em que \tilde{a}_0 , \tilde{b}_0 , a_0 e b_0 são constantes. Isso pode ser obtido fazendo-se [9, Eq. (6)]

$$\tilde{a}_0 = a_0 \quad (15a)$$

$$\tilde{b}_0 = b_0. \quad (15b)$$

A fim de explorar o casamento de assíntotas no cenário FSO ora considerado, é necessário obter a assíntota da PDF da soma exata em (8). Para isso, seja a expansão em série de potências da PDF marginal $f_{I_i}(\cdot)$ de I_i expressa por

$$f_{I_i}(I) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} I^{b_{i,j}} \sim a_{i,0} I^{b_{i,0}}, \quad (16)$$

em que as potências $b_{i,j}$ estão organizadas em ordem crescente. Para obter a caracterização assintótica de I_i , usa-se a função de Bessel modificada de segundo tipo e ordem ν dada por [14, Eq. (51:6:1)]

$$K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \left[\Gamma(\nu) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2j-\nu}}{j!(1-\nu)_j} + \Gamma(-\nu) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2j+\nu}}{j!(1+\nu)_j} \right], \quad (17)$$

em que $(a)_j \triangleq \Gamma(a+j)/\Gamma(a)$ denota o símbolo de Pochhammer, e $\nu \notin \mathbb{Z}$. Assim, substituindo-se (17) em (5), os termos assintóticos $a_{i,0}$ e $b_{i,0}$ das PDFs G-G marginais em (16) são obtidos como

$$a_{i,0} = \begin{cases} \frac{(k_i m_i)^{m_i} \Gamma(k_i - m_i)}{\Gamma(k_i) \Gamma(m_i)}, & k_i > m_i \\ \frac{(k_i m_i)^{k_i} \Gamma(m_i - k_i)}{\Gamma(k_i) \Gamma(m_i)}, & k_i < m_i \end{cases} \quad (18a)$$

$$b_{i,0} = \begin{cases} m_i - 1, & k_i > m_i \\ k_i - 1, & k_i < m_i. \end{cases} \quad (18b)$$

A partir de (18), os termos assintóticos a_0 e b_0 da PDF da soma exata são dados por [9, Eq. (4)]

$$a_0 = \begin{cases} \left[\Gamma\left(\sum_{i=1}^{LN} m_i\right) \right]^{-1} \prod_{i=1}^{LN} \frac{(k_i m_i)^{m_i} \Gamma(k_i - m_i)}{\Gamma(k_i)}, & k_i > m_i \\ \left[\Gamma\left(\sum_{i=1}^{LN} k_i\right) \right]^{-1} \prod_{i=1}^{LN} \frac{(k_i m_i)^{k_i} \Gamma(m_i - k_i)}{\Gamma(m_i)}, & k_i < m_i \end{cases} \quad (19a)$$

$$b_0 = \begin{cases} -1 + \sum_{i=1}^{LN} m_i, & k_i > m_i \\ -1 + \sum_{i=1}^{LN} k_i, & k_i < m_i. \end{cases} \quad (19b)$$

Uma vez que (19) determina a assíntota da PDF da soma exata, resta obter a assíntota da PDF aproximada. Neste trabalho, propõe-se aproximar a soma usando-se as distribuições (i) α - μ , (ii) Weibull e (iii) gama. A razão de (i) é que a distribuição α - μ é generalizada e apresenta um grau de liberdade a mais do que (ii) e (iii), além de ser uma boa candidata para aproximar a soma de G-Gs [2]. Já a razão de (ii) e (iii) é que as distribuições Weibull e gama são mais simples que (i) e podem conduzir a soluções em forma fechada para os parâmetros de ajuste, conforme já observado na literatura [7], [9].

B. Aproximação α - μ

A primeira solução proposta consiste em aproximar a soma exata por uma VA do tipo α - μ , cuja PDF é dada em (11). Expandindo-se a PDF α - μ em série de Maclaurin e extraindo-se o primeiro termo, as constantes que determinam sua assíntota são obtidas como

$$\tilde{a}_0 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}^{\tilde{\mu}}}{\tilde{\Omega}^{\tilde{\mu}}\Gamma(\tilde{\mu})} \quad (20a)$$

$$\tilde{b}_0 = \tilde{\alpha}\tilde{\mu} - 1. \quad (20b)$$

Uma vez que a distribuição α - μ possui mais de dois parâmetros de ajuste, e o casamento de assíntotas só fornece duas equações, é necessária mais uma equação para completar o sistema. Neste trabalho, propõe-se obter a terceira equação através do casamento de um dado (enésimo) momento da soma exata com o respectivo momento da soma aproximada. Portanto, substituindo-se (20) e (19) em (15), bem como (12) e (14) em (10), obtém-se um sistema transcendental de três equações e três incógnitas.

Apesar de ser uma boa candidata para aproximar somas de G-Gs, a distribuição α - μ em geral conduz a sistemas de equações transcendentais, cuja solução depende de rotinas numéricas. Dado o custo computacional envolvido, é oportuno investigar distribuições candidatas mais simples, as quais em geral conduzem a soluções em forma fechada.

C. Aproximação Weibull

A segunda solução proposta consiste em aproximar a soma exata usando uma VA do tipo Weibull. Note que a distribuição Weibull é obtida a partir da α - μ com $\mu = 1$. Assim, os termos assintóticos da PDF Weibull podem ser obtidos de (20) como

$$\tilde{a}_0 = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\Omega}} \quad (21a)$$

$$\tilde{b}_0 = \tilde{\alpha} - 1. \quad (21b)$$

Logo, substituindo-se (21) e (19) em (15), e resolvendo-se o sistema de equações para os parâmetros de ajuste $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\Omega}$ da distribuição Weibull, obtém-se a seguinte solução em forma fechada:

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{LN} m_i, & k_i > m_i \\ \sum_{i=1}^{LN} k_i, & k_i < m_i \end{cases} \quad (22a)$$

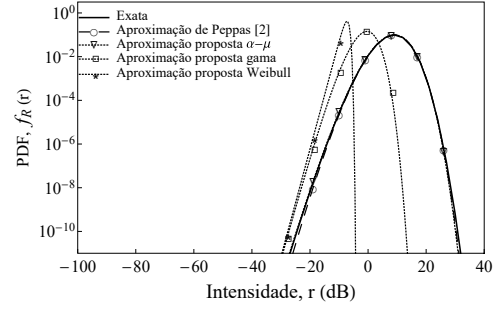
$$\tilde{\Omega} = \begin{cases} \left[\prod_{i=1}^{LN} \frac{(k_i m_i)^{m_i} \Gamma(k_i - m_i)}{\Gamma(k_i)} \right]^{-1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^{LN} m_i\right) \sum_{i=1}^{LN} m_i, & k_i > m_i \\ \left[\prod_{i=1}^{LN} \frac{(k_i m_i)^{k_i} \Gamma(m_i - k_i)}{\Gamma(m_i)} \right]^{-1} \Gamma\left(\sum_{i=1}^{LN} k_i\right) \sum_{i=1}^{LN} k_i, & k_i < m_i. \end{cases} \quad (22b)$$

D. Aproximação Gama

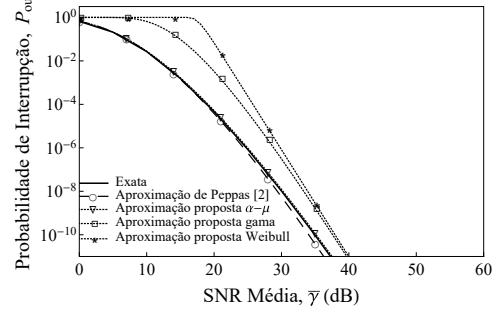
A terceira solução proposta consiste em aproximar a soma exata usando uma VA do tipo gama. De forma similar à distribuição Weibull, note que a distribuição gama é obtida a partir da α - μ com $\alpha = 1$. Assim, os termos assintóticos da PDF gama podem ser obtidos de (20) como

$$\tilde{a}_0 = \frac{\tilde{\mu}^{\tilde{\mu}}}{\tilde{\Omega}^{\tilde{\mu}}\Gamma(\tilde{\mu})} \quad (23a)$$

$$\tilde{b}_0 = \tilde{\mu} - 1. \quad (23b)$$



(a) PDF em termos da intensidade do sinal.



(b) Probabilidade de interrupção em termos da SNR média.

Fig. 1: Situação de turbulência fraca com parâmetros de canal $k_i = 3,66$ e $m_i = 3,28$ tais que $\sigma_{I_i}^2 = 0,66, \forall i$.

Logo, substituindo-se (23) e (19) em (15), e resolvendo-se o sistema de equações para os parâmetros de ajuste $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\Omega}$ da distribuição gama, obtém-se a solução em forma fechada:

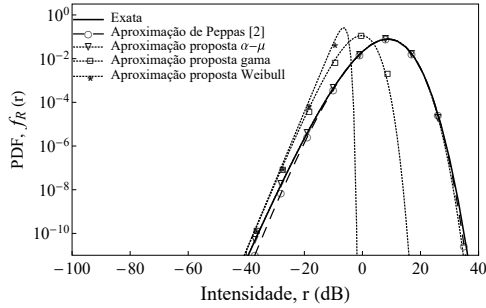
$$\tilde{\mu} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{LN} m_i, & k_i > m_i \\ \sum_{i=1}^{LN} k_i, & k_i < m_i \end{cases} \quad (24a)$$

$$\tilde{\Omega} = \begin{cases} \left[\prod_{i=1}^{LN} \frac{(k_i m_i)^{m_i} \Gamma(k_i - m_i)}{\Gamma(k_i)} \right]^{-\frac{1}{\sum_{i=1}^{LN} m_i}} \sum_{i=1}^{LN} m_i, & k_i > m_i \\ \left[\prod_{i=1}^{LN} \frac{(k_i m_i)^{k_i} \Gamma(m_i - k_i)}{\Gamma(m_i)} \right]^{-\frac{1}{\sum_{i=1}^{LN} k_i}} \sum_{i=1}^{LN} k_i, & k_i < m_i. \end{cases} \quad (24b)$$

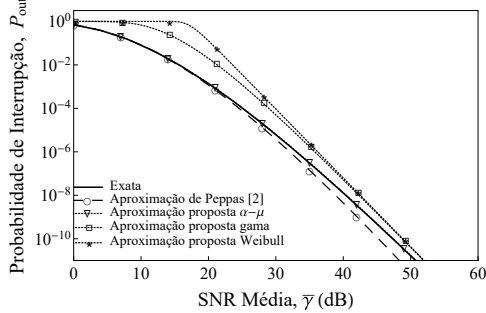
VI. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, é avaliado o desempenho das aproximações para diferentes cenários FSO com EGC. As soluções propostas são comparadas com a obtida por Peppas [2] e com a solução exata (avaliada numericamente via (9) usando o *software* Mathematica). Por simplicidade, foram considerados canais I_i modelados por VAs G-G independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}[I_i] = 1, \forall i$. Em todas as figuras, são usados $L = 1$ e $N = 3$, bem como $n = 2$ em (10) para a aproximação α - μ via casamento de assíntotas.

As Figs. 1a, 2a e 3a mostram as curvas de PDF em termos da intensidade do sinal resultante para níveis de turbulência fraca, moderada e forte, respectivamente. Nesse caso, vale ressaltar que a cauda esquerda corresponde à alta SNR média [8], [9], regime de maior interesse prático. Nessa região, note que as soluções propostas (usando casamento de assíntotas) oferecem um ajuste assintoticamente ótimo, diferentemente da solução obtida por Peppas [2] (usando casamento de momentos), que tende a divergir da solução exata, principalmente em regime de forte turbulência (veja a Fig. 3, por exemplo).



(a) PDF em termos da intensidade do sinal.



(b) Probabilidade de interrupção em termos da SNR média.

 Fig. 2: Situação de turbulência moderada com parâmetros de canal $k_i = 2, 54$ e $m_i = 2, 11$ tais que $\sigma_{I_i}^2 \approx 1, \forall i$.

Uma métrica importante para avaliar o desempenho de sistemas de comunicações é a probabilidade de interrupção $P_{\text{out}} \triangleq \text{Prob}(\gamma < \gamma_{\text{th}})$, em que γ_{th} denota SNR limiar. Usando-se (3), obtém-se $P_{\text{out}} = \text{Prob}\left(R < \frac{LN}{\eta}\sqrt{\gamma_{\text{th}}N_0}\right) = F_R\left(\frac{LN}{\eta}\sqrt{\gamma_{\text{th}}N_0}\right)$, que a partir de (4) se reduz a $P_{\text{out}} = F_R\left(\sqrt{\mathbb{E}[R^2]}\frac{\gamma_{\text{th}}}{\gamma}\right)$. As Figs. 1b, 2b e 3b mostram as curvas de probabilidade de interrupção em termos da SNR média para níveis de turbulência fraca, moderada e forte, respectivamente, e $\gamma_{\text{th}} = 1$. Conforme esperado, as soluções propostas oferecem um ajuste assintoticamente ótimo, ao contrário da solução obtida por Peppas [2], que tende a divergir da solução exata em alta SNR.

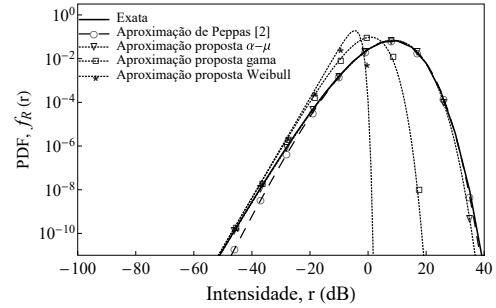
Note que a aproximação proposta α - μ apresenta um grau de ajuste melhor do que as aproximações propostas Weibull e gama. Em contrapartida, a distribuição α - μ depende em geral de sistemas de equações transcendentais para determinar os parâmetros de ajuste, diferentemente das distribuições Weibull e gama, que conduzem a soluções simples em forma fechada e evitam, portanto, a necessidade de rotinas numéricas.

VII. CONCLUSÃO

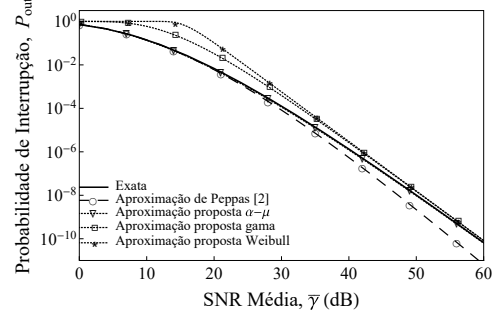
Neste trabalho, foram propostas aproximações estatísticas assintoticamente ótimas para sistemas FSO com múltiplos transceptores. Como mostrado pelos resultados numéricos, a abordagem proposta oferece um excelente ajuste em regime de média a alta SNR, região de maior interesse prático para sistemas de comunicação. Em trabalhos futuros, pretende-se estender a análise para outros cenários de turbulência atmosférica e outras técnicas de diversidade.

REFERENCES

[1] L. C. Andrews, R. L. Phillips, and C. Y. Hopen, *Laser Beam Scintillation with Applications*. Bellingham, WA, USA: SPIE Press, 2001.



(a) PDF em termos da intensidade do sinal.



(b) Probabilidade de interrupção em termos da SNR média.

 Fig. 3: Situação de turbulência forte com parâmetros de canal $k_i = 2, 10$ e $m_i = 1, 52$ tais que $\sigma_{I_i}^2 = 1, 45, \forall i$.

[2] K. P. Peppas, "A simple, accurate approximation to the sum of gamma-gamma variates and applications in MIMO free-space optical systems," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 23, no. 13, pp. 839–841, Jul. 2011.

[3] E. Bayaki, R. Schober, and R. K. Mallik, "Performance analysis of MIMO free-space optical systems in gamma-gamma fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, no. 11, pp. 3415–3424, Nov. 2009.

[4] D. G. Brennan, "Linear diversity combining techniques," *Proc. IRE*, vol. 47, no. 6, pp. 1075–1102, Jun. 1959.

[5] V. P. Thanh, T. Cong-Thang, and T. P. Anh, "On the MGF-based approximation of the sum of independent gamma-gamma random variables," in *Proc. IEEE 81st Veh. Technol. Conf.*, May 2015, pp. 1–5.

[6] G. Yang, M. A. Khalighi, Z. Ghassemlooy, and S. Bourennane, "Performance analysis of space-diversity free-space optical systems over the correlated gamma-gamma fading channel using Padé approximation method," *IET Commun.*, vol. 8, no. 13, pp. 2246–2255, Sep. 2014.

[7] S. Al-Ahmadi and H. Yanikomeroğlu, "On the approximation of the generalized-K distribution by a gamma distribution for modeling composite fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 9, no. 2, pp. 706–713, Feb. 2010.

[8] Z. Wang and G. B. Giannakis, "A simple and general parameterization quantifying performance in fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 8, pp. 1389–1398, Aug. 2003.

[9] F. R. A. Parente and J. C. S. Santos Filho, "Asymptotically exact framework to approximate sums of positive correlated random variables and application to diversity-combining receivers," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, Mar. 2019.

[10] J. D. V. Sánchez, "Aproximações Nakagami- m para somas de envoltórias Nakagami- m via casamento de assíntotas e mistura aleatória", 2015. 67 f. Dissertação (Mestrado), Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.

[11] A. K. Majumdar, "Free-space laser communication performance in the atmospheric channel," *Journal of Optical and Fiber Commun. Reports*, vol. 2, no. 4, pp. 345–396, Oct. 2005.

[12] M. D. Yacoub, "The α - μ distribution: A physical fading model for the Stacy distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.

[13] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, "Nakagami- m approximation to the sum of m non-identical independent Nakagami- m variates," *Electron. Lett.*, vol. 40, no. 15, pp. 951–952, Jul. 2004.

[14] K. B. Oldham, J. C. Myland, and J. Spanier, *An Atlas of Functions: with Equator, the Atlas Function Calculator*, 2nd ed. New York: Springer, 2009.