

# Localização de Fontes por Diferença de Tempo de Chegada em Meios Anisotrópicos

Mateus C. Silva  
Universidade de São Paulo  
mateus.campos.silva@usp.br

Vítor H. Nascimento  
Universidade de São Paulo  
vitor@lps.usp.br

Cassio G. Lopes  
Universidade de São Paulo  
cassio@lps.usp.br

**Resumo**—Em ensaios de emissões acústicas é necessário estimar-se a localização de um evento, ou fonte, a partir de medidas dos parâmetros de sinais em um conjunto de sensores. Existem diversos estimadores para resolver este problema, baseados na otimização de diferentes funções custo. Neste trabalho é investigada a sensibilidade de alguns desses estimadores a incertezas nas medidas de tempo, e são desenvolvidos dois novos estimadores para o caso de meios anisotrópicos (com velocidade dependente da direção de propagação do sinal). As estimativas são calculadas com base na minimização de duas diferentes funções custo usando o método do gradiente, e suas sensibilidades a incertezas nas medidas de tempo são comparadas.

## I. INTRODUÇÃO

A vida útil dos componentes de aeronaves é avaliada através de ensaios que os submetem a ciclos de carga. Um ciclo de carga é basicamente uma sequência de esforços mecânicos produzidos por atuadores em pontos importantes do componente sob estudo (corpo de prova).

Nesse contexto, uma rede de sensores presente no corpo de prova capta os sinais gerados pelo componente fatigado, e através de algoritmos de estimação que interpretam algumas características destes sinais, calcula-se a provável posição de um dano na estrutura. Essa é a base para as técnicas de *Structural Health Monitoring* (SHM) [1]. Dentre as muitas técnicas de SHM, uma em especial é de interesse neste trabalho: Emissões Acústicas, a qual emprega sensores piezoelétricos para registrar os sinais que se propagam na estrutura de interesse.

Dependendo da estrutura, a propagação se dá de forma isotrópica, na qual os sinais capturados dependem apenas da distância relativa entre a fonte (posição de uma provável falha), ou anisotrópica, na qual os sinais dependem da distância e da direção relativa entre a fonte e os sensores. Ou seja, em meios anisotrópicos parâmetros como energia do sinal ou tempo de chegada nos sensores dependem da direção de propagação, e isso impacta a qualidade da estimação de posição obtida pelos diferentes métodos existentes na literatura.

Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica dos métodos mais importantes de localização, focando-se no estudo da localização de fontes em meios anisotrópicos. São considerados dois estimadores importantes baseados em tempos de chegada dos sinais aos sensores, sendo estudado o impacto de

Este trabalho foi parcialmente financiado pela EMBRAER, FAPESP (proj. 2017/20161-0) e CNPq (Proj. 304714/2018-6).

erros de medição dos tempos na posição final estimada por tais métodos.

## II. LOCALIZAÇÃO DE FONTES EM SHM

Na literatura, diferentes métodos exploram diferentes parâmetros dos sinais no processo de estimação de posição da fonte do sinais (geralmente considerada como oriunda de uma falha estrutural). Os parâmetros mais comuns são tempos de chegada [1]–[3], ou energia dos sinais [4]. Neste trabalho serão estudados métodos baseados em tempo de chegada (Time of Arrival–TOA) e diferença de tempo de chegada (TDOA).

A Fig. 1 ilustra um cenário típico de Emissões Acústicas: O número de sensores utilizados na estrutura é  $N$ , e  $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = 1, \dots, N$  são as posições conhecidas destes sensores. A posição do evento acústico e o momento em que este evento ocorrem, respectivamente,  $\mathbf{p}_0$  e  $T_0$ , são desconhecidos. O objetivo é estimar  $\mathbf{p}_0$ .

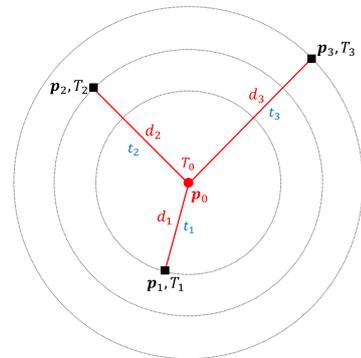


Figura 1. Problema de Localização de Fonte - Frente de Onda Circular (Meio Isotrópico).

Vamos denotar como  $T_k$  os tempos de aquisição dos sinais ou de chegada, e como  $t_k$  a diferença entre o tempo em que o sinal resultante do evento atinge o sensor  $k$  e o momento em que este evento é gerado, ou seja,

$$t_k = T_k - T_0. \quad (1)$$

A distância entre a posição do evento e a posição do sensor  $k$  é definida como

$$d_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\|. \quad (2)$$

Há diferentes maneiras de formular o problema de localização de fontes a partir de medidas de distância e de tempo. Podemos escrever as equações que o modelam em função das medidas de diferença de tempo de chegada (TDOA), definida como

$$t_{ij} = t_i - t_j, \quad (3)$$

ou ainda das medidas de tempo de chegada  $T_k$  (TOA), tomando o valor de  $T_0$  como uma das variáveis a ser estimada, além do valor de  $\mathbf{p}_0$ .

Um dos primeiros artigos a propor uma solução para o problema de localização de fontes é [5]. Nele, Friedlander modela o problema supondo que a velocidade de propagação da onda não depende da direção de propagação (meio isotrópico), e, usando um sensor como referência, propõe um método baseado em mínimos quadrados para encontrar a posição da fonte. Posteriormente, Huang et al. [6], ainda supondo meio isotrópico, propõem mais um método que utiliza mínimos quadrados e comparam sua eficiência com relação aos estimadores propostos anteriormente e com o Limite Inferior de Cramér-Rao (CRLB).

O desenvolvimento em [7] é feito com base na diferença de alcance  $d_{k0}$ , ou seja, a diferença entre a distância entre a fonte e o sensor  $k$  e a distância entre a fonte e um sensor de referência localizado na origem  $\mathbf{p}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$ , que, no caso de meio isotrópico (velocidade de propagação independente da direção) é relacionada aos tempos de viagem por

$$d_{k0} = c[(T_k - T_0) - (T_{\text{ref}} - T_0)] = c(T_k - T_{\text{ref}}) = ct_k.$$

Para  $\mathbf{p}_{\text{ref}} = \mathbf{0}$ , a diferença de alcance é dada por

$$d_{k0} = c(T_k - T_{\text{ref}}) = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\| - \|\mathbf{p}_0\|. \quad (4)$$

Da mesma forma que no artigo [5], chega-se ao seguinte conjunto de equações

$$d_{k0} \|\mathbf{p}_0\| + \mathbf{p}_k^\top \mathbf{p}_0 = \frac{\|\mathbf{p}_k\|^2 - d_{k0}^2}{2}, \quad (5)$$

onde  $\mathbf{p}_0$  e  $\|\mathbf{p}_0\|$  ficam sendo as incógnitas do problema de estimação. A estimativa proposta é o ponto mínimo da função custo

$$J(\mathbf{p}_0) = \sum_{k=1}^N \left( d_{k0} \|\mathbf{p}_0\| + \mathbf{p}_k^\top \mathbf{p}_0 - \frac{\|\mathbf{p}_k\|^2 - d_{k0}^2}{2} \right)^2. \quad (6)$$

Vale notar que a hipótese aqui novamente é de um meio isotrópico.

Em [8] são discutidos métodos que utilizam ou o quadrado da medida de alcance ou o quadrado da diferença de medida de alcance, para propor novas funções custo a serem minimizadas (em meios isotrópicos com velocidade de propagação conhecida  $v$ , o alcance  $d_k$  é igual a  $vt_k$ ). Os autores propõem duas maneiras diferentes para modelar o problema usando medidas de alcance. Primeiramente, tem-se a seguinte função custo a ser minimizada:

$$\min_{\mathbf{p}_0} \sum_{k=1}^N (r_k - \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\|)^2, \quad (7)$$

onde  $r_k$  são as medidas ruidosas dos alcances entre a fonte acústica e o  $k$ -ésimo sensor, isto é:

$$r_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\| + \eta_k = d_k + \eta_k = vt_k + \eta_k, \quad (8)$$

com  $k = 1, \dots, N$ , e  $\eta_k$  são os valores desconhecidos do ruído de medida para cada um dos sensores. A estimativa para a solução da equação (7) é chamada *Range-Based Least Squares* ou *RB-LS*. Apesar da minimização proposta em (7) ser um problema não-convexo, os autores propõem uma forma aproximada de encontrar a solução.

A segunda função custo proposta em [8] é

$$\min_{\mathbf{p}_0} \sum_{k=1}^N (r_k^2 - \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\|^2)^2. \quad (9)$$

Aqui, em resumo, se aplica a mesma metodologia que no caso anterior em cima das medidas de alcance elevadas ao quadrado. A estimativa para a solução da equação (9) se chama *Square-Range-Based Least Squares* ou *SR-LS*. Como no caso anterior, o problema é não convexo, mas, diferente do caso anterior, é mostrado que existe uma solução global que pode ser calculada eficientemente.

Finalmente, os autores demonstram como chegar em um método dadas as medidas de diferença de alcance. O algoritmo é semelhante ao apresentado em [7], porém com a devida demonstração matemática de como se chegar num algoritmo eficiente. O algoritmo proposto é comparado aos anteriores, e se verifica que este possui desempenho melhor que os demais quanto à acurácia, mesmo sendo computacionalmente mais complexo. Vale notar que a hipótese para o meio de propagação em [8] é de que ele seja isotrópico.

Hajzargerbashi et al. em [9] tratam do caso de meios anisotrópicos, em que a velocidade de ondas elásticas depende da direção de propagação. Essa dependência está relacionada principalmente com as características do material. Em materiais compósitos, por exemplo, o perfil de velocidades depende da sequência de empilhamento das camadas do material. É considerada uma placa sólida, fina de material não-homogêneo anisotrópico. No artigo, menciona-se que a velocidade da onda foi obtida experimentalmente, como função da direção de propagação. O que esse artigo propõe é uma função objetivo que deve ser minimizada, assim como visto em outros artigos mencionados anteriormente, a fim de se estimar a posição onde ocorre um evento acústico. Comparada a artigos mencionados em [9], minimizar essa nova função custo é computacionalmente mais barato e o erro de estimação cometido é reduzido.

A proposta de [9] é descrita sucintamente a seguir. Seja, como foi definido na equação (1),  $t_k$  o tempo de viagem da onda entre o momento em que ocorre o evento acústico e o momento em que este é detectado pelo sensor  $k$ . Pode-se definir, portanto, a seguinte igualdade:

$$d_k = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\| = v(\theta_k)t_k, \quad (10)$$

onde  $\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{y_k - y_0}{x_k - x_0}\right)$  é a direção de propagação da onda entre a posição do evento  $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0)$ , e a posição  $\mathbf{p}_k = (x_k, y_k)$  do sensor  $k$  (ver Fig. 2).

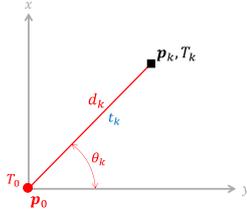


Figura 2. Direção de propagação da onda acústica

Da equação (10), tomando a abordagem de diferença de tempos de chegada (TDOA) descrita pela equação (3), pode-se chegar ao seguinte conjunto de equações:

$$t_{ij} = t_i - t_j = \frac{d_i}{v(\theta_i)} - \frac{d_j}{v(\theta_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N$$

A partir desta igualdade define-se a função objetivo

$$J(\mathbf{p}_0) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (t_{ij}v(\theta_i)v(\theta_j) - v(\theta_i)d_j + v(\theta_j)d_i)^2. \quad (11)$$

Nota-se que esta função depende de  $\mathbf{p}_0$ , pois os valores das velocidades dependem das direções, que dependem da posição desconhecida do evento acústico.

Kundu em [10] faz uma compilação de todas as técnicas conhecidas de estimação de localização de fonte para meios isotrópicos e anisotrópicos, com velocidade de propagação conhecida ou não, sabendo ou não as características dos materiais do meio, para estruturas simples e complexas. Este artigo é importante, pois apresenta uma técnica na qual não se tem a necessidade de se conhecer o perfil de velocidades dependente da direção de propagação. Em resumo, são utilizados conjuntos de três sensores (*clusters*) para determinar a direção entre a posição do evento e a posição do conjunto de sensores. Num conjunto desse tipo, os sensores estão bem próximos entre si, sendo a distância entre eles muito menor que a distância dos sensores para a fonte. Assim, a direção entre a fonte e os três sensores do conjunto é, na prática, a mesma. Determinando duas direções, pelo menos, a interseção das retas determinadas por estas direções fornece uma estimativa para a posição da fonte. No entanto, a hipótese de que a distância entre os sensores é muito menor do que a distância destes à fonte não é verdadeira em geral em ensaios de emissões acústicas.

Finalmente em [4], Vicinansa et al. desejam estimar a posição de um único evento  $\mathbf{p}_0$  tendo em mãos apenas as informações vindas de uma rede de  $N$  sensores que se comunicam entre si, e é proposto um algoritmo de localização distribuído para meios isotrópicos baseado no *diffusion LMS* [11].

Como a breve revisão da literatura apresentada acima atesta, foram propostos diversos métodos para estimação de localização de fontes em superfícies a partir de medidas de tempo de chegada, principalmente para meios isotrópicos.

Grande parte dos métodos baseia-se na minimização de diferentes funções custo, obtidas escrevendo-se igualdades relacionando os tempos ou as diferenças entre tempos de chegada dos sinais nos sensores, e as posições dos sensores e a posição da fonte, como visto nas equações (6), (7), (11). É importante comparar de maneira mais sistemática as diversas formulações do problema com relação à sua sensibilidade às incertezas nas medidas de tempo. Uma das contribuições deste trabalho é um procedimento para a realização desta comparação, apresentado na Seção V.

O presente trabalho também explora a formulação do problema de localização de fontes acústicas em meios anisotrópicos, propondo um modelo simples para aproximar o perfil de velocidades dependente da direção de propagação. São propostas funções objetivo semelhantes às usadas na literatura, além de métodos para minimizar estas funções mais simples que a busca exaustiva usada em [9]. Finalmente, serão explorados alguns exemplos numéricos e o desempenho dos métodos propostos.

### III. PERFIL DE VELOCIDADES EM MEIO ANISOTRÓPICO

Em [10] é usado um perfil de velocidades medido experimentalmente. No entanto, para propor algoritmos eficientes para otimização da função custo deve-se propor um modelo matemático que relacione a velocidade de propagação da onda acústica com a direção de propagação observada. A partir de dados de ensaios cedidos pela EMBRAER foi verificado que, ao menos em algumas situações, um modelo elíptico para o perfil de velocidades aproxima bem as velocidades medidas experimentalmente.

Para aproximar um perfil elíptico a um conjunto de medidas de velocidade, suponha que foram feitas  $L$  medidas de velocidades, em  $L$  direções diferentes  $\theta_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ , cujas velocidades são

$$\mathbf{v}_l = v(\theta_l)\mathbf{u}_l = v_l\mathbf{u}_l, \quad \|\mathbf{u}_l\| = 1, \quad l = 1, \dots, L, \quad (12)$$

onde  $\mathbf{u}_l$  é um versor na direção  $\theta_l$ . Decompondo este vetor velocidade sobre os eixos  $x$  e  $y$ , então pode-se escrever que  $\mathbf{v}_l = [v_{x_l} \ v_{y_l}]^T$ . O objetivo, portanto, é obter a elipse que melhor representa estes dados medidos, supondo que as magnitudes das velocidades não se alteram quando é invertido o sentido, mas mantida a direção.

A equação de uma elipse centrada na origem, em função das posições  $v_x$  e  $v_y$  de seus pontos, pode ser escrita como

$$av_{x_l}^2 + bv_{x_l}v_{y_l} + cv_{y_l}^2 = 1, \quad l = 1, \dots, L, \quad (13)$$

e pode-se ajustar a elipse que melhor aproxima o conjunto de medidas resolvendo o problema de mínimos quadrados

$$\min_{a,b,c} \left\| \begin{bmatrix} v_{x_1}^2 & v_{x_1}v_{y_1} & v_{y_1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{x_L}^2 & v_{x_L}v_{y_L} & v_{y_L}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2. \quad (14)$$

Dados os valores ótimos de  $a, b, c$  que minimizam (14), a velocidade de propagação na direção entre um sensor em  $\mathbf{p}_k$  e uma fonte na posição  $\mathbf{p}_0$  pode ser obtida por

$$\begin{aligned} v_k(\mathbf{p}_0) &= v_k(x_0, y_0) \\ &= \sqrt{\frac{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2}{a(x_k - x_0)^2 + b(x_k - x_0)(y_k - y_0) + c(y_k - y_0)^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Na próxima seção serão descritas algumas sugestões de funções objetivo para meios anisotrópicos, além de propostas de algoritmos que as minimizam.

#### IV. LOCALIZAÇÃO DE FONTES EM MEIOS ANISOTRÓPICOS

Como visto anteriormente, é possível definir diversas funções custo alternativas para o problema de localização de fontes. A forma da função custo tem impacto na complexidade computacional, na presença ou não de mínimos locais e na sensibilidade ao ruído e na robustez dos algoritmos utilizados na presença de *outliers* nas medidas realizadas pela rede de sensores. O objetivo aqui é comparar propostas de funções custo que modelam o problema, tendo como parâmetro de desempenho a sensibilidade às incertezas.

Uma primeira alternativa estende (9) para o caso anisotrópico:

$$F_1(\mathbf{p}_0, T_0) = \sum_{k=1}^N (v_k^2(\mathbf{p}_0)(T_k - T_0)^2 - \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\|^2)^2.$$

Uma segunda opção de função custo é baseada nas ideias presentes em [7] e [9]. Aqui, será utilizada a função presente na equação (11), porém por simplicidade tomando apenas um dos microfones (por exemplo, o primeiro) do arranjo como referência, isto é,

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{p}_0) &= \sum_{k=2}^N \left( v_1(\mathbf{p}_0)v_k(\mathbf{p}_0)(T_k - T_1) \right. \\ &\quad \left. - v_1(\mathbf{p}_0)\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0\| + v_k(\mathbf{p}_0)\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_1\| \right)^2. \end{aligned}$$

Nota-se que aqui o domínio da função diminuiu, pois no primeiro caso tem-se que  $F_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , enquanto que aqui tem-se que  $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Assim sendo, o número de incógnitas a serem estimadas passa para apenas as coordenadas de  $\mathbf{p}_0$ .

Quanto à minimização, foi usado o algoritmo do Gradiente Descendente [12], que pode ser utilizado aqui por conta da aproximação elíptica para o perfil de velocidades. Este método é bem menos custoso computacionalmente que o algoritmo de busca exaustiva usado em [9]. Em diversos testes realizados, o algoritmo não apresentou convergência para mínimos locais.

Os gradientes para cada uma das funções custo podem ser obtidos através das definições e de (15). As expressões são omitidas devido ao seu tamanho. Na próxima seção são comparadas as incertezas das estimativas realizadas pelo algoritmo do gradiente para as duas funções custo.

#### V. DESEMPENHO DAS SOLUÇÕES

Nesta seção é feita uma análise da incerteza da estimação da posição em função da incerteza da medida dos tempos de chegada. Obter uma relação entre a distribuição estatística do erro de medida cometido e as medidas de tempo de chegada é importante para se obter intervalos de confiança para as estimativas. Os dois estimadores vistos até agora podem ser definidos por

$$\hat{\mathbf{p}}_0 = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}), \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

onde  $\mathbf{x} = (x, y)$  ou  $(x, y, z)$  dependendo da função custo sendo utilizada e  $\mathbf{t} = (T_1, \dots, T_N)$  é um vetor concatenando os tempos de chegada. Como se quer encontrar o ponto de mínimo da função custo, pode-se inicialmente tomar a derivada da função em relação a  $\mathbf{x}$  e igualar a zero:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbf{0}, \quad (17)$$

pois no ponto de mínimo da função custo, sua derivada será nula. Além disso, pode-se também abrir a expressão desta derivada em série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto  $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0$ , que é o ponto de ótimo da função custo. Assim, obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) &\approx \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{p}_0; \mathbf{t}) + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{t} \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{x}, \end{aligned}$$

sendo  $\Delta \mathbf{t}$  um incremento em torno do vetor  $\mathbf{t}$  e  $\Delta \mathbf{x}$  um incremento em torno do vetor  $\mathbf{x}$ . Calculando-se o valor de  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})$  em torno do valor de  $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0$ , considerando ambos os incrementos, e lembrando que  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{p}_0; \mathbf{t}) = \mathbf{0}$  tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{x}; \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) &\approx \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{t} \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Queremos achar o novo ponto de mínimo  $\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{x}$  para uma variação  $\Delta \mathbf{t}$  nos instantes de tempo observados, ou seja, queremos encontrar  $\Delta \mathbf{x}$  tal que:  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{x}; \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ , para um valor de  $\Delta \mathbf{t}$  dado. Portanto, pode-se dizer que

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{t} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{x} \approx \mathbf{0} \quad (18)$$

Resolvendo a equação (18) para  $\Delta \mathbf{x}$ , tem-se que:

$$\Delta \mathbf{x} \approx - \left[ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \right]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t}) \Delta \mathbf{t}. \quad (19)$$

Seja  $\mathbf{H}_i = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ ,  $i = 1, 2$  a matriz Hessiana para cada função custo e  $\mathbf{J}_i = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{t} \partial \mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}; \mathbf{t})$  a matriz Jacobiana. Supondo que  $\Delta \mathbf{t}$  tenha comportamento de um ruído branco gaussiano de média nula e matriz de covariância

$$\mathbf{C}_t = E\{\Delta \mathbf{t} \Delta \mathbf{t}^\top\} = \begin{bmatrix} \sigma_{T_1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{T_N}^2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

e assumindo que  $\sigma_{T_1}^2 = \dots = \sigma_{T_N}^2 = \sigma^2$ , como  $\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{J}_i \Delta \mathbf{t}$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} E\{\Delta \mathbf{x}\} &= E\{-\mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{J}_i \Delta \mathbf{t}\} = -\mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{J}_i E\{\Delta \mathbf{t}\} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{C}_x &= E\{(\Delta \mathbf{x} - E\{\Delta \mathbf{x}\})(\Delta \mathbf{x} - E\{\Delta \mathbf{x}\})^\top\} \\ &= (-\mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{J}_i) \mathbf{C}_t (-\mathbf{H}_i^{-1} \mathbf{J}_i)^\top. \end{aligned}$$

Suponha que o meio seja anisotrópico. A Hessiana e a Jacobiana das funções custo  $F_1(x, y, z; \mathbf{t})$  e de  $F_2(x, y; \mathbf{t})$  podem ser obtidas a partir das equações derivadas no início da Seção IV para o algoritmo do gradiente descendente. A expressões são omitidas devido à falta de espaço.

Utilizando esses resultados, pode-se comparar a expressão obtida teoricamente com os resultados para a incerteza obtidas por simulação. Para tanto, variou-se a variância do ruído de medida dos tempos de chegada entre 0 e  $20 \mu\text{s}^2$ . Os algoritmos foram rodados um total de 250 vezes, e para cada vez foi obtida uma estimativa para a localização da fonte. Para cada vez, foi calculado o erro  $\text{Valor}_{\text{estimado}} - \text{Valor}_{\text{real}}$ , e foi calculada a variância destes valores obtidos. Isso foi feito para cada uma das variâncias no intervalo considerado (de 0 a  $20 \mu\text{s}^2$ ). Os resultados obtidos estão na Figura 3 para a posição  $x$  e na Figura 4 para a posição  $y$ .

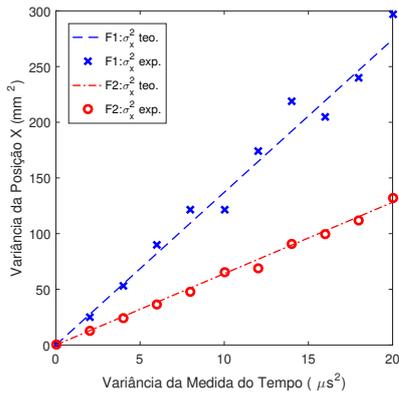


Figura 3. Incertezas da estimativa de  $x = x_0$  em função da incerteza da medida dos tempos de chegada para a função de custo  $F_1(x, y, z)$  (azul) e  $F_2(x, y)$  (vermelho) — valores teóricos e experimentais.

Nota-se que a tendência das curvas experimentais obtidas segue a da curva teórica, confirmando a validade das expressões obtidas nesta subseção.

Uma das conclusões que se pode tirar dos gráficos apresentados nas Figuras 3–4 é que as variâncias obtidas experimentalmente e calculadas com base nas expressões teóricas derivadas para a posição da fonte para a função  $F_2(x, y)$  são menores que para a função  $F_1(x, y, z)$ .

## VI. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um procedimento para comparar a sensibilidade à incerteza nas medidas de tempo de estimadores de localização baseados na otimização de funções custo. Além disso, foi proposto um modelo matemático para descrever o perfil de velocidades de propagação de ondas em função

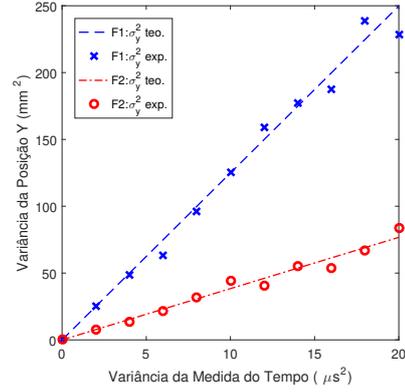


Figura 4. Incertezas da estimativa de  $y = y_0$  em função da incerteza da medida dos tempos de chegada para a função de custo  $F_1(x, y, z)$  (azul) e  $F_2(x, y)$  (vermelho) — valores teóricos e experimentais.

da direção de propagação em meios anisotrópicos, que foi utilizado para comparação da sensibilidade às incertezas de estimadores baseados em duas funções custo utilizadas para estimação de localização de fontes em meios anisotrópicos. O modelo proposto para o perfil de velocidades também permitiu a aplicação do algoritmo do gradiente para a solução dos problemas de minimização no caso de meios anisotrópicos, evitando-se a necessidade de realizar buscas exaustivas dos mínimos das funções.

## REFERÊNCIAS

- [1] C. Farrar and K. Worden, *Structural Health Monitoring: A Machine Learning Perspective*. Wiley, 2012.
- [2] V. Giurgiutiu, *Structural health monitoring: with piezoelectric wafer active sensors*. Academic Press, 2007.
- [3] C. A. Prete Junior, V. H. Nascimento, and C. G. Lopes, “Modeling time of arrival probability distribution and TDOA bias in acoustic emission testing,” in *Proc. 26th European Signal Processing Conf. (EUSIPCO)*, Sep. 2018, pp. 1117–1121.
- [4] G. S. Vicinansa, Y. P. Bergamo, and C. G. Lopes, “Position estimation from range measurements using adaptive networks,” in *2016 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, 2016, pp. 1–5.
- [5] B. Friedlander, “A passive localization algorithm and its accuracy analysis,” *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 12, no. 1, pp. 234–245, 1987.
- [6] Y. Huang, J. Benesty, G. W. Elko, and R. M. Mersereau, “Real-time passive source localization: A practical linear-correction least-squares approach,” *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 9, no. 8, pp. 943–956, 2001.
- [7] P. Stoica and J. Li, “Source localization from range-difference measurements,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 23, no. 6, pp. 63–66, Nov 2006.
- [8] A. Beck, P. Stoica, and J. Li, “Exact and approximate solutions of source localization problems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 5, pp. 1770–1778, 2008.
- [9] T. Hajzargerbashi, T. Kundu, and S. Bland, “An improved algorithm for detecting point of impact in anisotropic inhomogeneous plates,” *Ultrasonics*, vol. 51, no. 3, pp. 317–324, 2011.
- [10] T. Kundu, “Acoustic source localization,” *Ultrasonics*, vol. 54, no. 1, pp. 25–38, 2014.
- [11] C. G. Lopes and A. H. Sayed, “Diffusion least-mean squares over adaptive networks: Formulation and performance analysis,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 7, pp. 3122–3136, 2008.
- [12] A. H. Sayed, *Adaptive filters*. John Wiley & Sons, 2011.