

# Sobre a Modelagem Estocástica do Algoritmo NLMS em Ambientes Não Estacionários para Filtros Adaptativos e Plantas do Sistema com Ordens Diferentes

Marcos Vinicius Matsuo e Rui Seara

**Resumo**—Este artigo apresenta um modelo estocástico descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*) em um contexto de estimação de plantas variantes no tempo. Particularmente, o modelo proposto é válido para sinais de entrada brancos com distribuição gaussiana e contempla os cenários em que o filtro adaptativo possui ordem diferente daquela da planta a ser identificada. Especificamente, são derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, o erro quadrático médio (EQM) e o passo de adaptação ótimo que minimiza o EQM em regime permanente. Resultados de simulação confirmam a precisão do modelo estocástico proposto.

**Palavras-chave**—Algoritmo NLMS, filtragem adaptativa, modelagem estocástica.

**Abstract**—This paper presents a stochastic model describing the behavior of the normalized least-mean-square (NLMS) algorithm in a context for estimating time-varying systems. In particular, the proposed model is valid for white input data with Gaussian distribution and take into account scenarios in which the order of the adaptive filter is different from that of the system to be identified. Specifically, model expressions are derived describing the mean weight behavior, the mean-square error (MSE), and the optimum step size that minimizes the steady-state MSE. Simulation results confirm the accuracy of the proposed stochastic model.

**Keywords**—NLMS algorithm, adaptive filtering, stochastic modeling.

## I. INTRODUÇÃO

Dentre os mais importantes algoritmos adaptativos da literatura, o NLMS (*normalized least-mean-square* [1]–[3]) é um dos mais utilizados em aplicações práticas (tais como identificação de sistemas, equalização de canal e cancelamento de eco [4]–[7]), devido, principalmente, à sua simplicidade, baixo custo computacional e robustez. Tais características têm promovido o interesse crescente na modelagem estocástica do algoritmo NLMS. Em resumo, a modelagem estocástica tem por objetivo derivar expressões matemáticas para avaliar o desempenho do algoritmo adaptativo em diversas condições de operação, sem que seja necessário recorrer ao uso (extensivo) de simulações de Monte Carlo (MC).

No contexto da modelagem estocástica do algoritmo NLMS, o estudo de seu comportamento quando utilizado para estimar plantas variantes no tempo é um tópico de pesquisa relevante que ainda está aberto, mesmo considerando alguns trabalhos interessantes da literatura [8]–[12]. Por exemplo, em

[8], são derivadas expressões de modelo descrevendo o erro quadrático médio (EQM) em regime permanente de alguns algoritmos adaptativos (incluindo o NLMS), considerando especificamente o problema de estimação de uma planta representada por um modelo *random walk* [13]. Os resultados de [8] foram então estendidos em [9] e [10], assumindo um cenário diferente no qual o algoritmo NLMS é utilizado para estimar uma planta periódica. Recentemente, em [11], foi apresentado um modelo estocástico descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS complexo em um cenário no qual uma planta representada por um processo de Markov de primeira ordem [13] é estimada. Adicionalmente, outro modelo estocástico foi derivado em [12], também assumindo a estimação de uma planta representada por um modelo *random walk* (tal como em [8]), porém utilizando agora um sinal de entrada gaussiano branco com variância cíclica.

Apesar dos diferentes cenários variantes no tempo, considerados nos trabalhos citados acima, um ponto comum entre eles é a suposição de que o filtro adaptativo e a planta variante no tempo possuem a mesma ordem. A utilização de tal suposição simplifica a derivação do modelo estocástico, porém não é condizente com situações práticas. Portanto, com o propósito de preencher tal lacuna, neste trabalho de pesquisa, é derivado um modelo estocástico para o algoritmo NLMS operando com sinais de entrada brancos, contemplando cenários em que o filtro adaptativo e a planta possuem ordens distintas<sup>1</sup>. Além disso, é importante destacar que a formulação da planta variante no tempo considerada aqui abrange as diferentes plantas adotadas em [8], [11] e [12], resultando em um modelo estocástico capaz de prever o comportamento do algoritmo NLMS em uma ampla gama de cenários de operação.

Este artigo é organizado como segue. Na Seção II, o algoritmo NLMS é revisitado e a formulação da planta variante no tempo considerada aqui é discutida. A Seção III apresenta expressões analíticas descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, o EQM e o passo de adaptação ótimo que minimiza o EQM em regime permanente. Comparações entre resultados de simulação e as previsões obtidas pelo modelo proposto são mostradas na Seção IV. Finalmente, a Seção V apresenta as conclusões deste trabalho de pesquisa.

Marcos Vinicius Matsuo e Rui Seara, LINSE - Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brasil, E-mails: matsuo@linse.ufsc.br, seara@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

<sup>1</sup> Em [17], é apresentada uma análise estocástica do algoritmo LMS considerando que o filtro adaptativo possui dimensão menor do que a planta; entretanto, tal trabalho trata apenas do caso de planta invariante no tempo.

## II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção, as expressões gerais do algoritmo NLMS são revisitadas e uma formulação de planta variante no tempo é discutida.

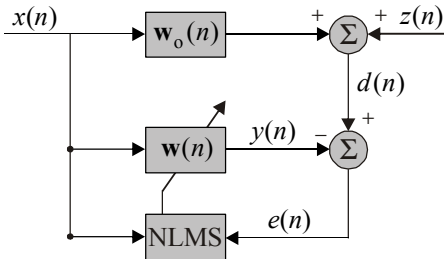


Fig. 1. Configuração típica de um problema de identificação de sistema.

Especificamente, na modelagem estocástica realizada neste trabalho, considera-se que o algoritmo NLMS é utilizado em um problema de identificação de sistema, como mostrado na Fig. 1. Nessa figura,  $\mathbf{w}_o(n)$  representa a resposta ao impulso (de ordem  $N$ ) de uma planta variante no tempo, cujas mudanças devem ser rastreadas pelo filtro adaptativo  $\mathbf{w}(n)$  (de ordem  $M$ ) através da equação de atualização do algoritmo NLMS, isto é,

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n)e(n)}{\mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n) + \varepsilon} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{w}(n) = [w_0(n) w_1(n) \dots w_{M-1}(n)]^T$  denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo,  $\mu$ , o passo de adaptação,  $\mathbf{x}_M(n) = [x(n) x(n-1) \dots x(n-M+1)]^T$ , um vetor contendo as últimas  $M$  amostras do sinal de entrada,  $\varepsilon > 0$ , o parâmetro de regularização que previne divisão por zero em (1) [1]–[3] e  $e(n)$ , o sinal de erro, dado por

$$e(n) = z(n) + \mathbf{x}_N^T(n)\mathbf{w}_o(n) - \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{w}(n) \quad (2)$$

com  $\mathbf{x}_N = [x(n) x(n-1) \dots x(n-N+1)]^T$ ,  $z(n)$  denotando o ruído de medição e  $\mathbf{w}_o(n)$ , a planta variante no tempo, cuja resposta ao impulso é modificada gradualmente de  $\mathbf{w}_1$  para  $\mathbf{w}_2$ , conforme [2, pp. 273]

$$\mathbf{w}_o(n) = \mathbf{w}_2 + \tilde{\mathbf{w}}(n) \quad (3)$$

e

$$\tilde{\mathbf{w}}(n+1) = \alpha \tilde{\mathbf{w}}(n) + \boldsymbol{\varphi}(n) \quad (4)$$

com  $\boldsymbol{\varphi}(n) = [\varphi(n) \varphi(n-1) \dots \varphi(n-N+1)]^T$ , sendo  $\varphi(n)$  um processo gaussiano branco com variância  $\sigma_\varphi^2$  e  $\tilde{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$ . Adicionalmente, em (4), utiliza-se  $0 < \alpha < 1$  para controlar a velocidade de transição de  $\mathbf{w}_1$  para  $\mathbf{w}_2$  (quanto menor o valor de  $\alpha$ , mais rápida é a transição entre  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ ). Note que a formulação de  $\mathbf{w}_o(n)$  [dada por (3) e (4)] pode ser particularizada para representar as plantas variantes no tempo consideradas em [8], [11] e [12]. Por exemplo, para  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ , (3) e (4) representam o processo de Markov de primeira ordem utilizado em [11]. Agora, considerando  $\alpha = 1$  e  $\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ , (3) e (4) equivalem ao modelo *random walk* utilizado em [8] e [12].

## III. MODELO ESTOCÁSTICO PROPOSTO

Nesta seção, são derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS operando no cenário descrito na Seção II. Para tal, algumas suposições e aproximações utilizadas na derivação do modelo são apresentadas na sequência:

- S1. O sinal de entrada  $x(n)$  é obtido de um processo gaussiano branco com variância  $\sigma_x^2$ .
- S2. O parâmetro de regularização pode ser negligenciado na modelagem estocástica sob certas condições, isto é,  $\varepsilon \ll E[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$  [11] e [14].
- S3. O ruído de medição  $z(n)$  é obtido de um processo de média zero com variância  $\sigma_z^2$ , sendo decorrelacionado com qualquer outro sinal no sistema [8]–[12].
- S4. Para condição de adaptação lenta,  $\mathbf{w}(n)$  e  $\mathbf{x}(n)$  são assumidos não correlacionados [8]–[12].
- S5. Para  $N$  grande, as flutuações de energia no sinal de entrada tornam-se pequenas o suficiente para justificar a seguinte aproximação [1], [12]:

$$E \left[ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right] \approx \frac{E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]}{E[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]} \quad (5)$$

## A. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Nesta seção, é derivada uma expressão descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes do filtro adaptativo. Para tal, primeiramente, (2) e (3) são substituídos em (1) e, então, o valor esperado é computado em ambos os lados da expressão resultante, considerando as suposições S1-S5. Assim,

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \left(1 - \frac{\mu}{M}\right) E[\mathbf{w}(n)] + \frac{\mu}{M} \boldsymbol{\Lambda}_{M,N} E[\mathbf{w}_o(n)] \quad (6)$$

com

$$\boldsymbol{\Lambda}_{M,N} = [\mathbf{I}_{M,M} \quad \mathbf{0}_{M,N-M}] \quad (7)$$

para  $M \leq N$ , onde  $\mathbf{I}_{M,M}$  é uma matriz identidade de dimensão  $M \times M$  e  $\mathbf{0}_{M,N-M}$  é uma matriz nula com dimensão  $M \times N - M$  (em particular, para  $N = M$ ,  $\mathbf{0}_{M,N-M}$  é uma matriz vazia, implicando  $\boldsymbol{\Lambda}_{M,N} = \mathbf{I}_{M,M}$ ). Alternativamente,

$$\boldsymbol{\Lambda}_{M,N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N,N} \\ \mathbf{0}_{M-N,N} \end{bmatrix} \quad (8)$$

para  $M > N$ . Além disso,

$$E[\mathbf{w}_o(n)] = \mathbf{w}_2 + E[\tilde{\mathbf{w}}(n)] \quad (9)$$

com

$$E[\tilde{\mathbf{w}}(n)] = \alpha^n \tilde{\mathbf{w}}(0). \quad (10)$$

## B. Vetor de Coeficientes em Regime Permanente

Agora, tomando (6) e assumindo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mathbf{w}(n)] = E[\mathbf{w}(\infty)] \quad (11)$$

o vetor de coeficientes do filtro adaptativo em regime permanente pode ser expresso como

$$E[\mathbf{w}(\infty)] = \boldsymbol{\Lambda}_{M,N} \mathbf{w}_2. \quad (12)$$

Note que, para  $M < N$ ,  $E[\mathbf{w}(\infty)]$  é uma versão truncada do vetor  $\mathbf{w}_2$ .

### C. Erro Quadrático Médio

Com o objetivo de obter uma expressão analítica para prever o EQM do algoritmo NLMS, primeiramente, define-se o vetor de erro do filtro adaptativo como

$$\mathbf{v}(n) \triangleq \mathbf{w}(n) - \mathbf{\Lambda}_{M,N} \mathbf{w}_o(n). \quad (13)$$

Agora, utilizando (13) em (2), o sinal de erro pode ser reescrito como

$$e(n) = z(n) + [\mathbf{x}_N^T(n) - \mathbf{x}_M^T \mathbf{\Lambda}_{M,N}] \mathbf{w}_o(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{v}(n). \quad (14)$$

Então, elevando  $e(n)$  ao quadrado, tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as suposições S2-S4, o EQM é dado por

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &\triangleq J(n) \\ &= J_{\min} + J_{\delta}(n) + J_{\text{ex}}(n) \end{aligned} \quad (15)$$

com

$$J_{\min} = \sigma_z^2 \quad (16)$$

caracterizando o mínimo EQM que pode ser obtido em regime permanente, sendo

$$J_{\delta}(n) = \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(n)] \quad (17)$$

a parcela do EQM que surge quando  $M < N$  [em particular, quando  $M \geq N$  implica  $J_{\delta}(n) = 0$ ]. Além disso,  $\mathbf{K}_1(n) = E[\mathbf{w}_o(n) \mathbf{w}_o^T(n)]$  e

$$\mathbf{Z}_{N,N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M,M} & \mathbf{0}_{M,N-M} \\ \mathbf{0}_{N-M,M} & \mathbf{I}_{N-M,N-M} \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde  $\mathbf{0}_{M,M}$  é uma matriz nula de dimensão  $M \times M$ . Adicionalmente,

$$J_{\text{ex}}(n) = \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{K}(n)] \quad (19)$$

é o EQM em excesso (EQME), para  $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)]$ .

Levando em consideração (17) e (19), nota-se que o EQM (15) será completamente determinado apenas se as matrizes de correlação  $\mathbf{K}_1(n)$  e  $\mathbf{K}(n)$  forem conhecidas.

### D. Matrizes de Correlação

Nesta seção, com o propósito de completar a derivação do EQM, expressões recursivas para o cálculo das matrizes de correlação  $\mathbf{K}_1(n)$  e  $\mathbf{K}(n)$  são obtidas. Primeiramente, para determinar  $\mathbf{K}_1(n)$ , computa-se o produto  $\mathbf{w}_o(n) \mathbf{w}_o^T(n)$  e, então, toma-se o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante. Assim,

$$\mathbf{K}_1(n) = \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^T + \mathbf{w}_2 E[\tilde{\mathbf{w}}^T(n)] + E[\tilde{\mathbf{w}}(n)] \mathbf{w}_2^T + \mathbf{K}_2(n) \quad (20)$$

com  $E[\tilde{\mathbf{w}}(n)]$  dado por (10) e

$$\mathbf{K}_2(n+1) = \alpha^2 \mathbf{K}_2(n) + \sigma_{\phi}^2 \mathbf{I}_{N,N}. \quad (21)$$

Agora, com o intuito de derivar uma expressão recursiva para computar  $\mathbf{K}(n)$ , primeiramente, a regra de atualização (1) é reescrita em termos de  $\mathbf{v}(n)$ , isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n+1) &= \mu \frac{\mathbf{x}_M(n) z(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n) + \varepsilon} + \left[ \mathbf{I}_{M,M} + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n) \mathbf{x}_M^T(n)}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n) + \varepsilon} \right] \mathbf{v}(n) \\ &\quad + \mu \frac{\mathbf{x}_M(n) [\mathbf{x}_N^T(n) - \mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{\Lambda}_{M,N}]}{\mathbf{x}_M^T(n) \mathbf{x}_M(n) + \varepsilon} \mathbf{w}_o(n) \\ &\quad + (1-\alpha) \mathbf{\Lambda}_{M,N} \tilde{\mathbf{w}}(n) - \mathbf{\Lambda}_{M,N} \boldsymbol{\phi}(n). \end{aligned} \quad (22)$$

Então, determinando o produto externo  $\mathbf{v}(n+1) \mathbf{v}^T(n+1)$ , tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e utilizando as suposições S2-S4, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \left( 1 - \frac{2\mu}{M} \right) \mathbf{K}(n) + \mu^2 \left\{ \frac{\text{tr}[\mathbf{K}(n)] \mathbf{I}_{M,M} + 2\mathbf{K}(n)}{M(M+2)} \right\} \\ &\quad + \mu^2 \left\{ \frac{J_{\min} + \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(n)]}{\sigma_x^2 M(M+2)} \right\} \mathbf{I}_{M,M} + \boldsymbol{\Gamma}(n) \end{aligned} \quad (23)$$

com

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}(n) &= (1-\alpha) \left( 1 - \frac{\mu}{M} \right) [\mathbf{K}_3(n) \mathbf{\Lambda}_{M,N}^T + \mathbf{\Lambda}_{M,N} \mathbf{K}_3^T(n)] \\ &\quad + (1-\alpha)^2 \mathbf{\Lambda}_{M,N} \mathbf{K}_2(n) \mathbf{\Lambda}_{M,N}^T + \sigma_{\phi}^2 \mathbf{\Lambda}_{M,N} \mathbf{\Lambda}_{M,N}^T \end{aligned} \quad (24)$$

para

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_3(n+1) &= \alpha \left( 1 - \frac{\mu}{M} \right) \mathbf{K}_3(n) - \sigma_{\phi}^2 \mathbf{\Lambda}_{M,N} \\ &\quad + \alpha(1-\alpha) \mathbf{\Lambda}_{M,N} \mathbf{K}_2(n). \end{aligned} \quad (25)$$

Portanto, o EQM do algoritmo NLMS pode ser agora completamente determinado utilizando (15) juntamente com (20) e (23). Adicionalmente, as matrizes  $\mathbf{K}(n)$ ,  $\mathbf{K}_1(n)$ ,  $\mathbf{K}_2(n)$  e  $\mathbf{K}_3(n)$  são inicializadas como

$$\mathbf{K}(0) = \mathbf{\Lambda}_{M,N} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T \mathbf{\Lambda}_{M,N}^T \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_1(0) = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^T \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_2(0) = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T \quad (28)$$

e

$$\mathbf{K}_3(0) = -\mathbf{\Lambda}_{M,N} \mathbf{w}_1 (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)^T. \quad (29)$$

### E. EQM em Regime Permanente

Nesta seção, uma expressão analítica descrevendo o EQM em regime permanente é derivada. Para tal, toma-se o limite de (15) para  $n \rightarrow \infty$ . Assim,

$$J(\infty) = J_{\min} + J_{\delta}(\infty) + J_{\text{ex}}(\infty) \quad (30)$$

com

$$J_{\delta}(\infty) = \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)] \quad (31)$$

onde  $\mathbf{K}_1(\infty)$  é obtido tomando o limite de (20) para  $n \rightarrow \infty$ , resultando em

$$\mathbf{K}_1(\infty) = \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^T + \frac{\sigma_{\phi}^2}{1-\alpha^2} \mathbf{I}_{N,N}. \quad (32)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(\infty) &= \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{K}(\infty)] \\ &= \sigma_x^2 \mathbf{1}^T \mathbf{k}(\infty) \end{aligned} \quad (33)$$

denota o EQME em regime permanente, onde  $\mathbf{1}$  é um vetor com ordem  $M$  de 1's e  $\mathbf{k}(\infty)$ , o vetor com os elementos da diagonal principal de  $\mathbf{K}(\infty)$ . Particularmente, para determinar  $\mathbf{k}(\infty)$ , primeiramente, toma-se os elementos da diagonal de (23) e, então, computa-se o limite da expressão resultante para  $n \rightarrow \infty$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\infty) &= \mathbf{C}^{-1} \left\{ \frac{\mu^2 J_{\min} + \mu^2 \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)]}{\sigma_x^2 M(M+2)} \mathbf{1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu}{(1+\alpha)[M(1+\alpha) + \alpha\mu]} \boldsymbol{\tau} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

com

$$\mathbf{C} = \frac{2\mu}{M} \left[ \left( 1 - \frac{\mu}{M+2} \right) \mathbf{I}_{M,M} - \frac{\mu}{2(M+2)} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right] \quad (35)$$

e  $\boldsymbol{\tau}$  denotando um vetor de ordem  $M$  com os primeiros  $N$  elementos unitários e os demais nulos (particularmente, para  $M \leq N$ , tem-se  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{1}$ ). Para o cálculo de  $\mathbf{C}^{-1}$  [requerido em (34)], pode-se utilizar a fórmula de Sherman-Morrison [15]. Assim,

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{M}{2\mu(M+2-\mu)} \left[ \frac{(M+2)(2-\mu)\mathbf{I}_{M,M} + \mu\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{2-\mu} \right]. \quad (36)$$

Agora, substituindo (36) em (34) e a expressão resultante em (33), o EQME em regime permanente pode ser expresso como

$$J_{\text{ex}}(\infty) = J_{\text{ex},0}(\infty) + J_{\text{ex},1}(\infty) \quad (37)$$

com

$$J_{\text{ex},0}(\infty) = \frac{M}{(M+2)} \frac{\mu}{(2-\mu)} \{ J_{\min} + \sigma_x^2 \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)] \} \quad (38)$$

caracterizando a parcela do EQME relacionada ao ruído do gradiente decorrente do processo de adaptação [1]–[3] e

$$J_{\text{ex},1}(\infty) = \frac{2\sigma_x^2 \sigma_\phi^2 M \min(N, M)}{(1+\alpha)[M(1-\alpha) + \alpha\mu](2-\mu)} \quad (39)$$

a parcela do EQME correspondente ao rastreamento da planta variante no tempo.

É bem conhecido da literatura, [1]–[3] e [16], que  $J_{\text{ex},0}(\infty)$  é uma função crescente com respeito ao passo de adaptação  $\mu$ . Por outro lado,  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  é uma função decrescente com respeito ao passo  $\mu$  [tendo em vista que valores maiores de passo são requeridos para que o filtro adaptativo  $\mathbf{w}(n)$  possa rastrear adequadamente as variações da planta, reduzindo  $J_{\text{ex},1}(\infty)$ ]. Esse comportamento antagônico de  $J_{\text{ex},0}(\infty)$  e  $J_{\text{ex},1}(\infty)$  em relação ao passo de adaptação faz com que  $J_{\text{ex}}(\infty)$  [dado por (37)] apresente um ponto de mínimo sob certas condições de operações (como discutido em [11]). O valor de passo  $\mu_0$ , que leva o EQME ao menor valor possível em regime permanente, pode ser determinado encontrando o mínimo de (37). Assim, derivando (37) com respeito a  $\mu$ , igualando o resultado a zero e

considerando  $\mu = \mu_0$ , obtém-se

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{1 + \lambda[2\alpha + M(1-\alpha)]} - 1 - \lambda M(1-\alpha)}{\alpha\lambda} \quad (40)$$

para

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_\phi^2} \left\{ \frac{J_{\min}}{\sigma_x^2} + \text{tr}[\mathbf{Z}_{N,N} \mathbf{K}_1(\infty)] \right\} \frac{(1+\alpha)}{(M+2)\min(N, M)}. \quad (41)$$

#### IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, com o objetivo de avaliar a precisão do modelo proposto, resultados de simulação de MC (média de 300 realizações independentes) são comparados com as previsões do modelo para diferentes cenários de operação. Em todos os exemplos, a variância do ruído de medição é  $\sigma_z^2 = 10^{-2}$ , o parâmetro de regularização  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $x(n)$  é um ruído gaussiano branco com variância unitária (i.e.,  $\sigma_x^2 = 1$ ). Para  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$ , são utilizados vetores com ordem 60, cujas amostras são ilustradas na Fig. 2.

##### A. Exemplo 1

Neste exemplo, a precisão do modelo estocástico proposto é verificada (por meio da curva do EQM) considerando diferentes ordens para o filtro adaptativo, isto é,  $M = N = 60$ ,  $M = 50$  e  $M = 40$ . Além disso, utiliza-se aqui  $\sigma_\phi^2 = 10^{-6}$ ,  $\alpha = 0,999$  e  $\mu = 0,1$ . A Fig. 3 mostra as curvas do EQM obtidas via simulação de MC e através do modelo proposto. Observa-se que o modelo proposto descreve com precisão muita boa o comportamento do algoritmo adaptativo, tanto na fase transitória quanto em regime permanente. Além disso, como predito adequadamente pelas expressões de modelo, nota-se que o valor do EQM em regime permanente é degradado (isto é, aumenta) à medida que a ordem do filtro adaptativo é reduzida em relação à ordem da planta  $\mathbf{w}_0(n)$ .

##### B. Exemplo 2

Aqui, a precisão do modelo proposto é avaliada considerando diferentes níveis de perturbação na planta  $\mathbf{w}_0(n)$ , isto é,  $\sigma_\phi^2 = 10^{-7}$ ,  $10^{-6}$  e  $10^{-5}$ . Adicionalmente, considera-se  $\mu = 0,1$ ,  $\alpha = 0,999$  e  $M = 45$ . A Fig. 4 mostra as curvas do EQM obtidas por simulação de MC e através do modelo proposto. Observa-se novamente que o modelo proposto descreve satisfatoriamente o comportamento do algoritmo adaptativo, inclusive quando a planta  $\mathbf{w}_0(n)$  é submetida a um valor significativo de perturbação (isto é,  $\sigma_\phi^2 = 10^{-5}$ ).

##### C. Exemplo 3

Neste exemplo, as expressões de modelo descrevendo o EQM em regime permanente são avaliadas considerando o mesmo cenário do Exemplo 1, para diversos valores de passo de adaptação (veja Fig. 5). Observa-se que o modelo proposto prediz com precisão muita boa o EQM em regime permanente, para todos os valores utilizados de passo de adaptação e de ordem do filtro adaptativo.

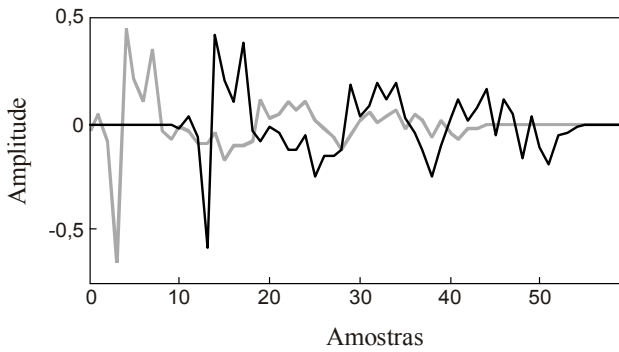


Fig. 2. Amostras dos vetores  $w_1$  (linha sólida cinza) e  $w_2$  (linha sólida escura).

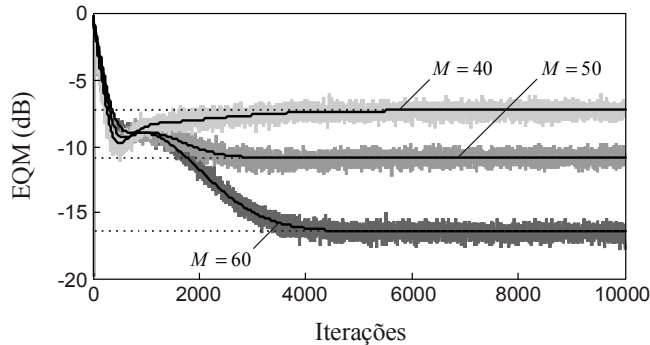


Fig. 3. Exemplo 1. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras) para diferentes dimensões do filtro adaptativo. Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras.

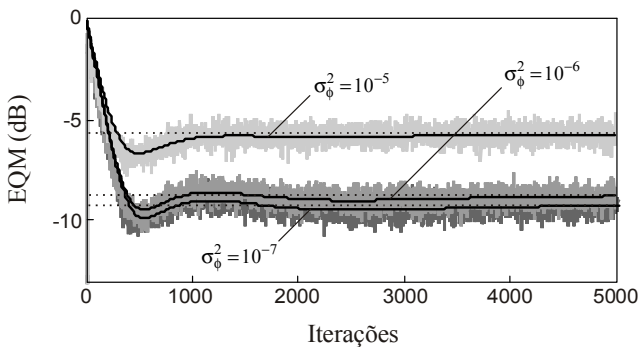


Fig. 4. Exemplo 2. Curvas do EQM obtidas por simulação de MC (linhas irregulares cinza) e através do modelo proposto (linhas sólidas escuras) considerando diferentes níveis de perturbação na planta  $w_0(n)$ . Os valores do EQM em regime permanente são indicados por linhas pontilhadas escuras.

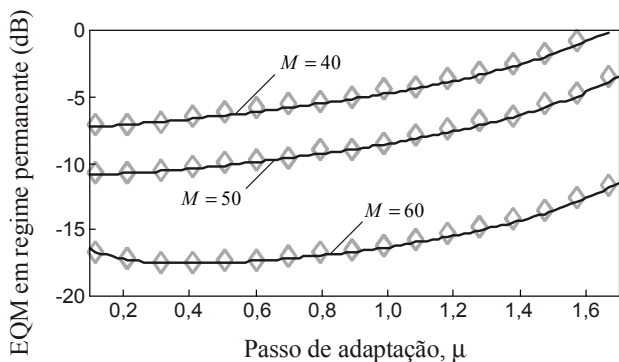


Fig. 5. Exemplo 3. Valores do EQM em regime permanente obtidos por simulação de MC (marcadores cinza) e através da expressão de modelo (30) (linhas sólidas escuras) considerando filtros adaptativos com dimensões distintas.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho de pesquisa, foi derivado um modelo estocástico para o algoritmo NLMS considerando ambiente não estacionário e filtro adaptativo com ordem diferente da planta a ser estimada. Particularmente, foram derivadas expressões de modelo descrevendo o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo e o EQM (ambos na fase transitória e em regime permanente). Adicionalmente, uma expressão para determinar o passo de adaptação ótimo foi obtida. Os resultados de simulação apresentados ratificaram a precisão das expressões de modelo aqui derivadas para uma ampla faixa de condições de operação.

VI. REFERÊNCIAS

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [2] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*, 1st ed. Hoboken, NJ: Wiley-IEEE Press, 2008.
- [3] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, 2nd ed. Chichester, UK: Wiley, 2013.
- [4] J. Liu, "Novel adaptation scheme in the NLMS algorithm for echo cancellation," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 8, no. 1, pp. 20-22, Jan. 2001.
- [5] L. Mailaender, "Linear MIMO equalization for CDMA downlink signals with code reuse," *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, vol. 4, no. 5, pp. 2423-2434, Sep. 2005.
- [6] C. Paleologu, S. Ciochina, and J. Benesty, "Variable step-size NLMS algorithm for under-modeling acoustic echo cancellation," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 15, pp. 5-8, 2008.
- [7] M. L. Gujrathi, J. Homer, I. V. L. Clarkson, R. Cendrillon, and M. Moonen, "A detection guided normalized least-mean-squares adaptive partial crosstalk canceller for multi-user DSL environments," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 16, no. 6, pp. 489-492, Jun. 2009.
- [8] N. R. Yousef and A. H. Sayed, "A unified approach to the steady-state and tracking analyses of adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 2, pp. 314-324, Feb. 2001.
- [9] N. R. Yousef and A. H. Sayed, "Ability of adaptive filters to track carrier offsets and channel nonstationarities," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 50, no. 2, pp. 1533-1544, Feb. 2002.
- [10] M. Moinuddin, A. Zerguine, and A. U. Sheikh, "Tracking analysis of the NLMF algorithm in the presence of both random and cyclic nonstationarities," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 10, no. 9, pp. 256-258, Sep. 2003.
- [11] E. V. Kuhn, J. E. Kolodziej, and R. Seara, "Stochastic modeling of the NLMS algorithm for complex Gaussian input data and nonstationary environment," *Digit. Signal Process.*, vol. 30, pp. 55-66, Jul. 2014.
- [12] N. J. Bershad, E. Eweda, and J. C. M. Bermudez, "Stochastic analysis of the LMS and NLMS Algorithms for cyclostationary white Gaussian inputs," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 62, no. 9, pp. 2238-2249, Sep. 2014.
- [13] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- [14] E. V. Kuhn, F. C. Souza, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the stochastic modeling of the IAF-PNLMS algorithm for complex and real correlated Gaussian input data," *Signal Process.*, vol. 99, pp. 103-115, Jun. 2014.
- [15] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2nd ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009.
- [16] B. Widrow, J. M. McCool, M. G. Larimore, and C. R. Johnson, "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter," *Proc. IEEE*, vol. 64, no. 8, pp. 1151-1162, Aug. 1976.
- [17] K. Mayyas, "Performance analysis of the deficient length LMS adaptive algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, no. 8, pp. 2727-2734, Aug. 2005.