

O Algoritmo PNLMS Realmente Explora a Esparsidade dos Coeficientes?

Gabriel S. Chaves, Markus V. S. Lima, Tadeu N. Ferreira

Resumo—O algoritmo *proportionate normalized least-mean-square* (PNLMS) e suas variantes são frequentemente usados na literatura para atacar problemas relacionados à estimação/identificação de sistemas esparsos. O objetivo deste trabalho é mostrar que existem vários cenários esparsos em que o desempenho do algoritmo PNLMS é inferior ao do algoritmo NLMS. Para isso, apresentamos duas propriedades do algoritmo PNLMS e discutimos suas consequências práticas. A Propriedade I explica o que de fato é explorado pelo algoritmo PNLMS, enquanto a Propriedade II descreve o papel fundamental de uma boa inicialização dos coeficientes do filtro adaptativo para esse algoritmo. Diversos resultados numéricos são apresentados de forma a corroborar as propriedades discutidas. O algoritmo ℓ_0 -NLMS é usado apenas para ilustrar o desempenho de um algoritmo que realmente explora a esparsidade dos coeficientes.

Palavras-Chave—filtros adaptativos, esparsidade, NLMS, PNLMS, ℓ_0 -NLMS.

Abstract—The *proportionate normalized least-mean-square* (PNLMS) algorithm and its variants are frequently used in the literature to tackle problems related to the estimation/identification of sparse systems. The goal of this paper is to show that there exist many sparse systems in which the performance of the PNLMS algorithm is inferior than the NLMS algorithm. Hence, we present two properties of the PNLMS algorithm and discuss their practical consequences. Property I explains what the PNLMS algorithm exploits, whereas Property II describes the fundamental role of a good coefficient initialization for this algorithm. Several numerical results are presented to corroborate these two properties. The ℓ_0 -NLMS algorithm is used only to illustrate the performance of an algorithm that really exploits the coefficients sparsity.

Keywords—adaptive filters, sparsity, NLMS, PNLMS, ℓ_0 -NLMS.

I. INTRODUÇÃO

Filtros adaptativos têm sido utilizados em muitas aplicações ao longo das últimas décadas [1], [2]. O algoritmo *least-mean-square* (LMS) [3] é um dos mais populares, tendo inspirado o desenvolvimento de diversos outros, em especial do algoritmo *normalized LMS* (NLMS) [1], [2].

Muitos sistemas práticos apresentam respostas ao impulso esparsas, onde a maioria dos coeficientes são nulos. Com o objetivo de explorar esta característica, muitos algoritmos foram criados. Em geral, existem duas grandes famílias de algoritmos usadas para explorar a esparsidade. A primeira corresponde à família de algoritmos *proportionate*, em que os coeficientes do filtro são atualizados de maneira proporcional

Gabriel S. Chaves, Markus V. S. Lima, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) / Escola Politécnica (Poli) / Programa de Engenharia Elétrica (PEE) / Sinais, Multimídia e Telecomunicações (SMT), Rio de Janeiro - RJ, Brasil, E-mails: {gabriel.chaves, markus.lima}@smt.ufrj.br. Tadeu N. Ferreira, Universidade Federal Fluminense (UFF) / Escola de Engenharia / Niterói - RJ, Brasil, E-mail: tadeu_ferreira@id.uff.br

às suas magnitudes [4]–[7], enquanto a segunda corresponde a algoritmos que usam uma regularização promovedora de esparsidade nos coeficientes, tal qual a norma ℓ_1 ou uma aproximação da norma ℓ_0 [8]–[11].

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento do algoritmo *proportionate NLMS* (PNLMS) aplicado na identificação de sistemas esparsos. As principais contribuições dizem respeito à duas propriedades do algoritmo PNLMS, discutidas e depois comprovadas via experimentos numéricos, que evidenciam limitações deste algoritmo mesmo quando aplicado à sistemas esparsos.

Este artigo é organizado da seguinte forma. A Seção II introduz brevemente os algoritmos usados nos experimentos. A Seção III descreve algumas propriedades do algoritmo PNLMS, comprovadas através de experimentos numéricos apresentados na Seção IV. Finalmente, a Seção V mostra as conclusões.

Notação: Escalares são representados por letras minúsculas. Vetores (matrizes) são denotados por letras minúsculas (maiúsculas) em negrito. Para uma determinada iteração k , o vetor de coeficientes estimados e o vetor de sinal de entrada são denotados por $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{N+1}$, respectivamente, onde N é a ordem do filtro adaptativo. O coeficiente do sistema ótimo é denotado por $w_o(k)$. O sinal de erro na k -ésima iteração é definida como $e(k) \triangleq d(k) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)$, onde $d(k) \in \mathbb{R}$ é o sinal desejado.

II. ALGORITMOS

Nesta seção, os algoritmos usados nos experimentos são brevemente revisados.

A. O Algoritmo NLMS

O algoritmo NLMS resolve o seguinte problema de minimização

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|_2^2 \\ \text{s.t. } d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k+1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ao resolver o problema apresentado na Eq. (1), tem-se a equação de atualização do algoritmo NLMS, mostrada a seguir

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\mu \mathbf{x}(k)e(k)}{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \delta}, \quad (2)$$

onde $\mu \in (0, 1]$ é o fator de convergência, responsável por relaxar a restrição do problema (1), e $\delta \in \mathbb{R}_+$ é o fator de regularização responsável por evitar problemas numéricos que podem ocorrer quando $\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)$ tende a 0. A presença de $\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \delta$ no denominador do segundo termo no lado direito da Eq.(2) introduz o fator de convergência variável, característico do algoritmo NLMS [1].

B. O Algoritmo PNLMS

Há algumas décadas o algoritmo PNLMS surgiu com o objetivo de explorar a esparsidade em sistemas canceladores de ecos [4]. Em vários casos, este algoritmo é capaz de reduzir o tempo de convergência médio nestes tipos de cenários, alcançando velocidades de convergência superiores às do algoritmo NLMS [4], [6].

Por ser da família *proportionate*, o algoritmo PNLMS atribui diferentes fatores de convergência para cada coeficiente do filtro adaptativo, sendo esses fatores proporcionais às suas respectivas magnitudes. O algoritmo PNLMS resolve o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|_{\mathbf{G}^{-1}(k)}^2 \\ \text{s.t. } d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k+1) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

onde $\|\cdot\|_{\mathbf{G}^{-1}(k)}^2 = [\cdot]^T \mathbf{G}^{-1}(k) [\cdot]$ é um norma induzida pela matriz $\mathbf{G}^{-1}(k)$.

Na Eq. (3) foi introduzida uma norma induzida pela matriz $\mathbf{G}^{-1}(k)$, que é responsável pelo “rebalanceamento” dos fatores de convergência. A equação de atualização do algoritmo PNLMS é definida por

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\mu \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) e(k)}{\mathbf{x}^T(k) \mathbf{G}(k) \mathbf{x}(k) + \delta}, \quad (4)$$

sendo μ e δ os mesmos que no algoritmo NLMS e $\mathbf{G}(k)$ é uma matriz diagonal com elementos definidos por

$$g_i(k) \triangleq \frac{\gamma_i(k)}{\sum_{n=0}^N \gamma_n(k)}, \text{ for } i = 0, \dots, N, \quad (5)$$

onde

$$\gamma_i(k) \triangleq \max \{ \rho \max [\delta_p, |w_0(k)|, \dots, |w_N(k)|], |w_i(k)| \}, \quad (6)$$

sendo $\rho \in (0, 1]$ uma constante que evita atualizações errôneas quando algum coeficiente alcança o valor zero, e $\delta_p \in \mathbb{R}_+$ evita esses mesmos problemas quando todos os coeficientes estão zerados. Valores típicos para ρ e δ são $5/N$ e 0.01 , respectivamente [5].

A Eq. (4) apresenta a matriz $\mathbf{G}(k)$, comum a todos os algoritmos dessa família. Cada $\mathbf{G}(k)$ diferente define um novo algoritmo da família *proportionate*. Assim, o algoritmo PNLMS é caracterizado pelas Eqs. (5) e (6).

C. O Algoritmo ℓ_0 -NLMS

Recentemente surgiu uma nova família de algoritmos também com o objetivo de explorar a esparsidade dos sistemas [8], [9]. Essa família utiliza regularizações promovedoras de esparsidade nos coeficientes do filtro adaptativo, de forma que a esparsidade é explicitamente modelada.

O algoritmo ℓ_0 -NLMS explora a esparsidade de um sistema ao incorporar uma penalidade baseada em uma função que aproxima a norma- ℓ_0 dos coeficientes na mesma função custo

do algoritmo NLMS [9], [10], [12]. O novo problema de otimização resolvido pelo algoritmo ℓ_0 -NLMS é dado por

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{w}(k)\|_0 \\ \text{s.t. } d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k+1) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

onde $\|\cdot\|_0$ representa a norma- ℓ_0 que basicamente conta a quantidade de entradas não nulas de um vetor e $\gamma > 0$ é um fator usado para balancear a nova penalidade.

Na prática, a norma- ℓ_0 é de difícil implementação, sendo necessária a utilização de aproximações da norma- ℓ_0 por funções contínuas. Uma aproximação bastante usual é [8], [9]

$$\|\mathbf{w}(k)\|_0 \approx \sum_{i=0}^N \left(1 - e^{-\beta |w_i(k)|} \right), \quad (8)$$

onde a igualdade da Eq. (8) vale quando β tende ao infinito [9]. Assim, a Eq. (7) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{w}(k)\|_2^2 + \gamma \sum_{i=0}^N \left(1 - e^{-\beta |w_i(k)|} \right) \\ \text{s.t. } d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k+1) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Ao resolver a Eq. (9), tem-se a equação de atualização do algoritmo ℓ_0 -NLMS. Dada por

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\mu \mathbf{x}(k) e(k)}{\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) + \delta} + \kappa f_\beta [\mathbf{w}(k)], \quad (10)$$

onde $\kappa = \mu\gamma$ e $f_\beta(\cdot)$ é definida como

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \beta^2 x + \beta, & -\frac{1}{\beta} \leq x < 0; \\ \beta^2 x - \beta, & 0 < x \leq \frac{1}{\beta}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (11)$$

O terceiro termo do lado direito da Eq. (10) pode ser interpretado como um atrator para zeros. Quando um coeficiente está no intervalo $\left[-\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta} \right]$, f_β o atrai para zero.

III. PROPRIEDADES DO ALGORITMO PNLMS

Nesta seção são apresentadas duas propriedades do algoritmo PNLMS observadas em diversos experimentos.

A. A função da matriz $\mathbf{G}(k)$

Como dito anteriormente, $\mathbf{G}(k)$ guarda relações de proporcionalidade em seus elementos. As diferentes maneiras como essas relações podem ser criadas definem um novo algoritmo dessa família. As atualizações feitas pelo algoritmo PNLMS são as mais naturais e simples entre os algoritmos proporcionais.

Algumas considerações devem ser feitas antes de iniciar a análise da matriz $\mathbf{G}(k)$. Seu comportamento é imprevisível durante a inicialização do algoritmo. Com isso, assume-se que passaram algumas iterações, de forma que seja possível diferenciar os coeficientes grandes dos pequenos. Além disso, os parâmetros ρ e δ_ρ foram corretamente escolhidos de forma que os elementos de $\mathbf{G}(k)$ sejam proporcionais ao módulo dos seus respectivos coeficientes.

A partir da Eq. (6), percebe-se que $\gamma_i = |w_i(k)|$. Assim, tem-se a estimativa do coeficiente no numerador da Eq. (5) e a norma- ℓ_1 no denominador, promovendo estabilidade para o algoritmo [4]. Portanto, coeficientes com maior magnitude vão receber maiores valores de $g_i(k)$, resultando em um fator de convergência equivalente maior, possibilitando que esse coeficiente convirja mais rapidamente. Por outro lado, coeficientes com menor magnitude recebem menores valores para $g_i(k)$, ficando com um fator de convergência equivalente pequeno, fazendo com que esses coeficientes convirjam mais lentamente.

Em um problema de identificação de sistema com a resposta ao impulso sendo esparsa, naturalmente, o algoritmo PNLMS tende a apresentar melhor desempenho em comparação com o algoritmo NLMS. Porém, isso não acontece pelo sistema desconhecido ter a maioria dos coeficientes iguais a zero (esparso), mas sim pela diferença de magnitude entre o maior coeficiente e os menores ser bastante elevada, e essa característica não é única dos sistemas com esparsidade. Portanto, o algoritmo PNLMS explora algo mais geral que a esparsidade.

Propriedade I: A matriz $\mathbf{G}(k)$ introduz um fator de convergência equivalente que é proporcional à magnitude dos coeficientes. Dessa forma, coeficientes com maior magnitude recebem um fator de convergência maior, convergindo mais rápido que os coeficientes de menor magnitude, que recebem fator de convergência menor. Portanto, o algoritmo PNLMS explora a elevada diferença de magnitude entre os coeficientes de um sistema, e não necessariamente a esparsidade do sistema.

B. Inicialização é crítica

O algoritmo PNLMS é favorecido da maneira usual como os algoritmos adaptativos são inicializados. Comumente, a convergência de um algoritmo adaptativo independe do vetor de inicialização. Com isso, quando não se tem conhecimento a priori da resposta ao impulso do sistema, foi convencionado que uma boa inicialização para os algoritmos é feita com o vetor $\mathbf{w}(0) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Entretanto, com essa inicialização em um sistema esparsa, a maioria dos coeficientes já estão próximos do valor ótimo. No caso do algoritmo PNLMS, esta inicialização combinada com a rápida convergência dos coeficientes de maior magnitude, ele alcança desempenho superior ao algoritmo NLMS.

Caso o algoritmo PNLMS seja inicializado com valores distantes dos coeficientes ótimos de menor magnitude (em uma resposta ao impulso esparsa, distantes de $[0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$) o algoritmo PNLMS tem sua velocidade de convergência prejudicada. Os fatores de convergência equivalentes atribuídos para os coeficientes de menor magnitude são muito pequenos, tornando o desempenho do algoritmo PNLMS pior que o do algoritmo NLMS.

Propriedade II: No algoritmo PNLMS, da mesma forma que coeficientes grandes convergem rápido, os pequenos convergem muito lentamente. Portanto, é fundamental que os coeficientes do filtro adaptativo relacionados aos coeficientes pequenos do sistema desconhecido sejam bem inicializados, isto é, sejam inicializados próximo dos seus valores ótimos.

IV. RESULTADOS

Nesta seção são apresentadas as simulações e resultados referentes às propriedades expostas na Seção III. Todas as simulações feitas possuem os seguintes parâmetros, o sinal de entrada é um *binary phase shifting keying* (BPSK) com variância unitária. A razão sinal-ruído (SNR) é de 20 dB. Para o algoritmo PNLMS, $\rho = \delta_p = 10^{-12}$. Para o algoritmo ℓ_0 -NLMS, foi usada forma Laplaciana com truncamento de primeira ordem, $\beta = 5$ e $\kappa = 2 \times 10^{-3}$ [8], [9]. As curvas de *mean squared error* (MSE) são computadas a partir da média de 2000 rodadas independentes.

A. Primeiro Experimento

O primeiro experimento consiste em verificar como a matriz $\mathbf{G}(k)$ afeta o processo de aprendizagem de um sistema desconhecido. Nestas simulações foram aplicados os três algoritmos apresentados ao longo do texto para identificar dois sistemas simples. Os resultados apresentados mostram a atualização dos coeficientes estimados por cada algoritmo ao longo das iterações. Para essas simulações, os algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS tiveram fatores de convergência de 0,9, 0,8 e 0,9, respectivamente.²

A primeira simulação foi feita para verificar o comportamento do algoritmo PNLMS em um sistema com dois coeficientes, onde um deles tem a magnitude muito maior que a do outro. Esse sistema tem sua resposta ao impulso definida como $\mathbf{w}_o^{(1)} = [0,9 \ 0,04]^T$.

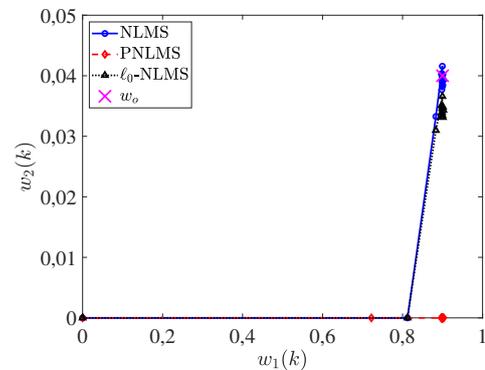


Fig. 1: Atualização de $\mathbf{w}^{(1)}(k)$ dos algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS. Marcadores foram colocados nas iterações $k = 1, 2, 5, 10, 60, 110, 160, \dots, 460$.

Percebe-se pela Fig. 1 como o algoritmo PNLMS converge rapidamente para o coeficiente $w_{o1}^{(1)} = 0,9$, pois este possui um fator de convergência equivalente maior, atribuído pela inserção de $\mathbf{G}(k)$. Por outro lado, a convergência do menor coeficiente é lenta a ponto de ser imperceptível nesta figura. Os algoritmos NLMS e ℓ_0 -NLMS apresentam um caminho de convergência feito através da combinação dos dois coeficientes [1].

A segunda simulação foi feita para observar o impacto de $\mathbf{G}(k)$ quando a relação entre a magnitude dos coeficientes é

¹Esse valor foi escolhido com o intuito de as características proporcionais do algoritmo PNLMS serem mais aparentes.

²O algoritmo PNLMS teve $\mu = 0,8$ para poder atingir o mesmo valor de MSE em regime permanente dos demais algoritmos.

pequena. Para essa simulação, a resposta ao impulso a ser descoberta é dada por $\mathbf{w}_o^{(2)} = [0, 9 \ 0, 7]^T$. Em relação à simulação anterior, o primeiro coeficiente não foi alterado e o segundo foi aumentado consideravelmente.

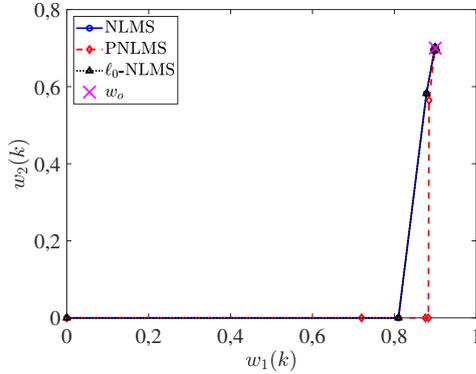


Fig. 2: Atualização de $\mathbf{w}^{(2)}(k)$ dos algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS. Marcadores foram colocados nas iterações $k = 1, 2, 5, 10, 60, 110, 160, \dots, 460$.

Na Fig. 2, percebe-se que a convergência promovida pelo algoritmo PNLMS é proporcional à magnitude dos coeficientes. Diferente da simulação anterior, a proporção entre os coeficientes é menor, por isso a convergência para $w_{o1}^{(2)} = 0,9$ ocorre mais lentamente. Em contrapartida, a convergência para $w_{o2}^{(2)} = 0,7$ é claramente mais rápida que no caso da Fig. 1.

B. Segundo Experimento

O segundo experimento foi realizado com a intenção de mostrar como uma “má” inicialização prejudica o desempenho do algoritmo PNLMS. Estas simulações foram feitas em sistemas esparsos, onde o algoritmo PNLMS deveria apresentar vantagem sobre o algoritmo NLMS. Para essas simulações, todos os sistemas desconhecidos têm ordem 63, ou seja, possuem 64 coeficientes. Os algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS tiveram fatores de convergência de 0,3, 0,25 e 0,8, respectivamente.

O primeiro sistema é definido como

$$\mathbf{w}_o^{(3)}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n = 1, \dots, 63. \end{cases} \quad (12)$$

Como pode ser percebido, a resposta ao impulso da Eq. (12) é idealmente esparsa, com apenas um coeficiente não nulo, cenário perfeito para a aplicação do algoritmo PNLMS.

Na Fig. 3, são mostradas as curvas de MSE ao considerar o sistema $\mathbf{w}_o^{(3)}$. Como observado na Fig. 3a, ao inicializar com o vetor $\mathbf{w}(0) = [0 \ \dots \ 0]^T$, tem-se o resultado esperado para o algoritmo PNLMS. Ele converge rapidamente para o *steady-state*, se igualando com o algoritmo ℓ_0 -NLMS e ambos com melhor desempenho que o algoritmo NLMS. Entretanto, pela Fig. 3b, percebe-se uma piora no desempenho do algoritmo PNLMS ao inicializar o sistema com o vetor $\mathbf{w}(0) = [0,05 \ \dots \ 0,05]^T$. Ele demonstra desempenho pior que o do algoritmo NLMS. Como exposto na Seção III-B, a má inicialização dos menores coeficientes é responsável pela convergência mais lenta do PNLMS.

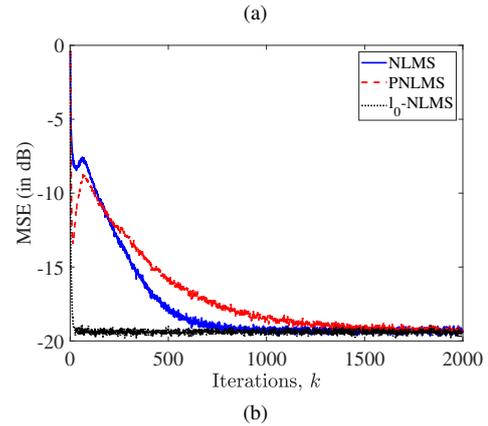
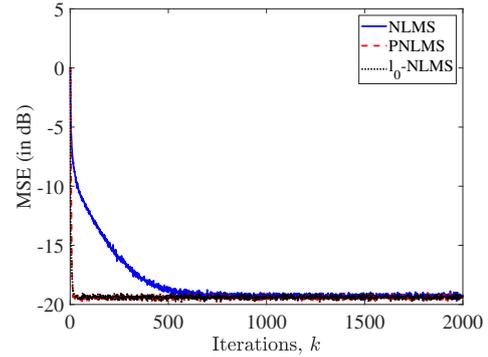


Fig. 3: Curvas de MSE para os algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS considerando $\mathbf{w}_o^{(3)}$. Ao inicializar os algoritmos com os vetores: (a) $\mathbf{w}(0) = [0 \ \dots \ 0]^T$; (b) $\mathbf{w}(0) = [0,05 \ \dots \ 0,05]^T$.

Com este experimento, comprova-se a Propriedade II e ilustra-se que o algoritmo PNLMS nem sempre se sai bem em cenários esparsos, ou melhor, que a sua atualização não explora a esparsidade. De fato, a exploração da esparsidade ocorre apenas quando inicializa-se os coeficientes do filtro em zero. Observa-se também que um algoritmo que realmente explora a esparsidade em suas atualizações, caso do algoritmo ℓ_0 -NLMS, apresenta bom desempenho independente de como inicializamos seus coeficientes.

O sistema do segundo conjunto de simulações é dado por

$$\mathbf{w}_o^{(4)}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1; \\ 0, & n = 2, \dots, 63. \end{cases} \quad (13)$$

A resposta ao impulso $\mathbf{w}_o^{(4)}$ é muito parecida com a do sistema $\mathbf{w}_o^{(3)}$, porém com dois coeficientes não nulos.

Pela Fig. 4a é possível ver que ao inicializar o algoritmo PNLMS com o vetor $\mathbf{w}(0) = [0 \ \dots \ 0]^T$ tem-se o resultado esperado. Ele converge rapidamente nas primeiras iterações, alcançando resultado melhor que o algoritmo NLMS, porém pior que o algoritmo ℓ_0 -NLMS. Os resultados presentes na Fig. 4b mostram uma piora no desempenho do algoritmo PNLMS, por ele ter sido inicializado com o vetor $\mathbf{w}(0) = [0,05 \ \dots \ 0,05]^T$. Com a má inicialização dos coeficientes de menor magnitude no algoritmo PNLMS, ele alcançou um resultado pior que os algoritmos ℓ_0 -NLMS e NLMS.

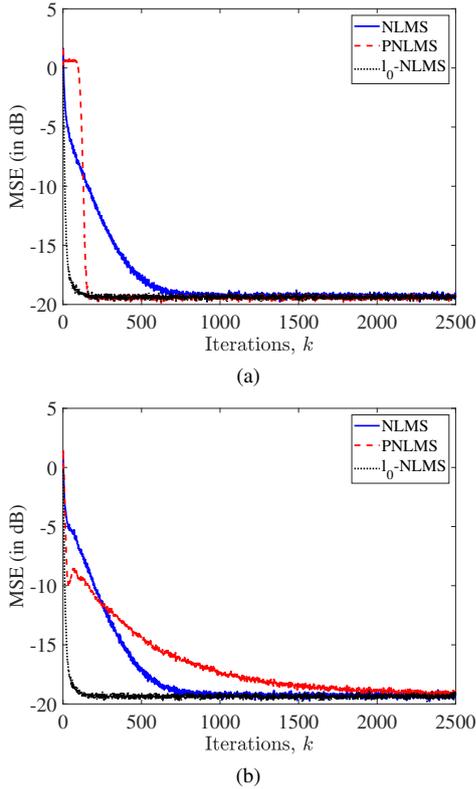


Fig. 4: Curvas de MSE para os algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS considerando $\mathbf{w}_o^{(4)}$. Ao inicializar os algoritmos com os vetores: (a) $\mathbf{w}(0) = [0 \dots 0]^T$; (b) $\mathbf{w}(0) = [0,05 \dots 0,05]^T$.

C. Terceiro Experimento

Este experimento consiste em avaliar o desempenho dos algoritmos em um cenário compressível³ com a inicialização padrão $\mathbf{w}(0) = [0 \dots 0]^T$. Para esta simulação os algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS tiveram seus fatores de convergência de 0,3, 0,3 e 0,8, respectivamente. O sistema a ser descoberto possui a seguinte resposta ao impulso

$$\mathbf{w}_o^{(5)}(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1; \\ 0,01, & n = 2, \dots, 63. \end{cases} \quad (14)$$

Um cenário compressível possui a maioria de seus coeficientes próximos de zero. Ao alterar os menores coeficientes para valores diferentes de zero, o fator de convergência equivalente dado por $\mathbf{G}(k)$ é menor. Pode ser visto na Fig. 5 que o algoritmo PNLMS precisa de muitas iterações pra alcançar o mesmo nível de MSE que o algoritmo NLMS. O algoritmo ℓ_0 -NLMS converge para um nível de MSE diferente dos outros algoritmos pois o sistema em questão não é esparso e, portanto, seria necessário escolher β de outra forma [8], o que não foi feito aqui pois objeto de estudo é o algoritmo PNLMS.

V. CONCLUSÃO

Neste texto foram apresentadas duas propriedades importantes do algoritmo PNLMS. Ambas indicam que o algoritmo PNLMS não explora a esparsidade de um sistema, na verdade, ele se aproveita da grande variação na magnitude dos coeficientes do sistema desconhecido e requer boa inicialização dos

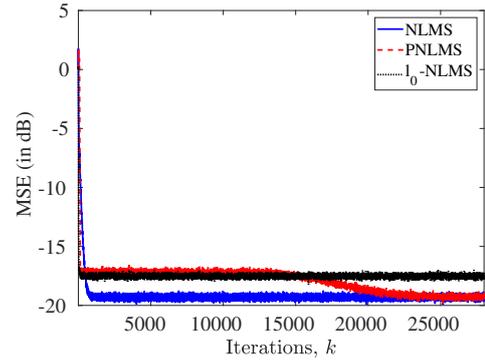


Fig. 5: Curvas de MSE para os algoritmos NLMS, PNLMS e ℓ_0 -NLMS para o terceiro experimento.

coeficientes do filtro adaptativo (eles devem ser inicializados próximo dos coeficientes de menor magnitude do sistema desconhecido) para apresentar bom desempenho. Diversas simulações mostraram como o desempenho do algoritmo PNLMS pode variar quando alteramos esses fatores, mesmo estando em um sistema que a resposta ao impulso é esparsa, corroborando as propriedades discutidas. A inicialização do algoritmo PNLMS mostrou-se muito determinante no seu desempenho. Caso ocorra uma má inicialização dos coeficientes de menor magnitude, eles vão precisar de muitas iterações para convergir.

AGRADECIMENTOS

Este estudo foi financiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001. Ele também foi parcialmente financiado pelo CNPq Universal 431381/2016-0 e FAPERJ.

REFERENCES

- [1] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*, 4th ed. New York, USA: Springer, 2013.
- [2] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [3] B. Widrow and M. E. Hoff, "Adaptive switching circuits," *IRE WESCOM Conv. Rec.*, vol. 4, pp. 96–104, 1960.
- [4] D. L. Duttweiler, "Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers," *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 8, no. 5, pp. 508–518, Sept. 2000.
- [5] J. Benesty and S. L. Gay, "An improved PNLMS algorithm," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2002)*, vol. 2, Dallas, USA, May 2002, pp. 1881–1884.
- [6] H. Deng and M. Doroslovacki, "Improving convergence of the PNLMS algorithm for sparse impulse response identification," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 3, pp. 181–184, Mar. 2005.
- [7] L. Liu, M. Fukumoto, and S. Saiki, "An improved mu-law proportionate NLMS algorithm," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2008)*, Las Vegas, USA, 2008, pp. 3797–3800.
- [8] M. V. S. Lima, T. N. Ferreira, W. A. Martins, and P. S. R. Diniz, "Sparsity-aware data-selective adaptive filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 17, pp. 4557–4572, Sept. 2014.
- [9] Y. Gu, J. Jin, and S. Mei, " ℓ_0 norm constraint LMS algorithm for sparse system identification," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 16, no. 9, pp. 774–777, Sept. 2009.
- [10] Y. Chen, Y. Gu, and A. Hero, "Sparse LMS for system identification," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP 2009)*, Taipei, Taiwan, April 2009, pp. 3125–3128.
- [11] P. S. R. Diniz, H. Yazdanpanah, and M. V. S. Lima, "Feature LMS algorithms," in *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, April 2018, pp. 4144–4148.
- [12] K. d. S. Olinto, D. B. Haddad, and M. R. Petraglia, "Transient analysis of l_0 -lms and l_0 -nlms algorithms," *Signal Processing*, vol. 127, pp. 217–226, 2016.

³A energia do sistema está concentrada em poucos coeficientes.