

# Modelagem de antenas duplo-refletores axialmente simétricas através da concatenação de seções cônicas para controle de amplitude e fase na abertura

Adriano Z. F. Marques, Tcharles V. B. Faria e Fernando J. S. Moreira

**Resumo**—Este artigo apresenta uma técnica de modelagem de antenas duplo-refletores axialmente simétricas para controle de amplitude e de fase na abertura. O método baseia-se na concatenação de seções cônicas para descrever as geratrizes dos refletores. O procedimento é simples, utilizando leis básicas de cosseno e seno, além da equação de cônicas em coordenadas polares e a equação de reflexão em cônicas. A solução é obtida de forma numérica, otimizando apenas uma variável. A técnica é aplicada em dois exemplos, ambos na configuração ADC, uma com amplitude e fase uniformes na abertura, e a outra com amplitude e fase não uniformes.

**Palavras-Chave**—Antena Refletora, Antena ADC, Modelagem de Antenas, Abertura Modelada, Abertura Uniforme.

**Abstract**—This paper presents a shaping technique for Axis-Symmetric Dual-Reflector Antennas by combining Conic Sections for amplitude and phase control at the antenna aperture. The method is based on the concatenation of conic sections to describe the generators of the reflectors. The procedure is simple, using basic laws of cosine and sine, in addition to the equation of conics in polar coordinates and the equation of reflection in conics. The solution is obtained numerically, optimizing only one variable. The technique is applied in two examples, both in the ADC configuration, one with uniform amplitude and phase at the aperture, and another with non-uniform amplitude and phase.

**Keywords**—Reflector Antenna, ADC Antenna, Antenna Shaping, Shaped Aperture, Uniform Aperture.

## I. INTRODUÇÃO

A modelagem ótica de antenas duplo-refletores axialmente simétricas pela concatenação de seções cônicas foi apresentada em [1]. Contudo, a técnica apresentada anteriormente permite apenas controle da amplitude na abertura da antena. A técnica proposta neste artigo se assemelha à anterior [1], utilizando ótica geométrica, mas permite também o controle de fase na abertura da antena. Para tanto, utiliza-se a solução numérica, que é obtida de modo fácil, já que as equações apresentam apenas uma variável a ser descoberta, e todas as outras variáveis do sistema são obtidas através dela. Além disso, a modelagem descrita no presente trabalho não apresenta equações diferenciais para a construção das geratrizes dos refletores da antena, o que torna sua solução ainda mais simples.

O controle de amplitude e de fase na abertura permite modelar a antena para controlar o seu diagrama de radiação,

Adriano Z. F. Marques, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais (PPGEE UFMG), Belo Horizonte, MG, Brasil, e-mail: adrianozatti@ufmg.br; Tcharles V. B. Faria, (PPGEE UFMG), e-mail: tcharlesdefaria@ufmg.br; Fernando J. S. Moreira, Departamento de Engenharia Eletrônica da Universidade Federal de Minas Gerais (DELT UFMG), e-mail: fernando@eee.ufmg.br. Este trabalho foi parcialmente financiado por CAPES/PROCAD 068419/14-01, CNPq e FAPEMIG.

como exemplificado em uma das modelagens apresentadas neste artigo. Além desta, a modelagem é comprovada utilizando o exemplo de [1], ambas na configuração Axially-Displaced Cassegrain (ADC). Além destes dois exemplos, a formulação pode ser facilmente adaptada para antenas dos tipos Axially-Displaced Gregorian (ADG), Axially-Displaced Ellipse (ADE) e Axially-Displaced Hyperbola (ADH) [1], apenas modificando os focos sobre a abertura e o ponto inicial da modelagem da antena. Esta liberdade se estende ainda mais, podendo ser criadas aberturas de diversos formatos, não somente aberturas planas. A modelagem na configuração ADC é ilustrada pela Figura 1.

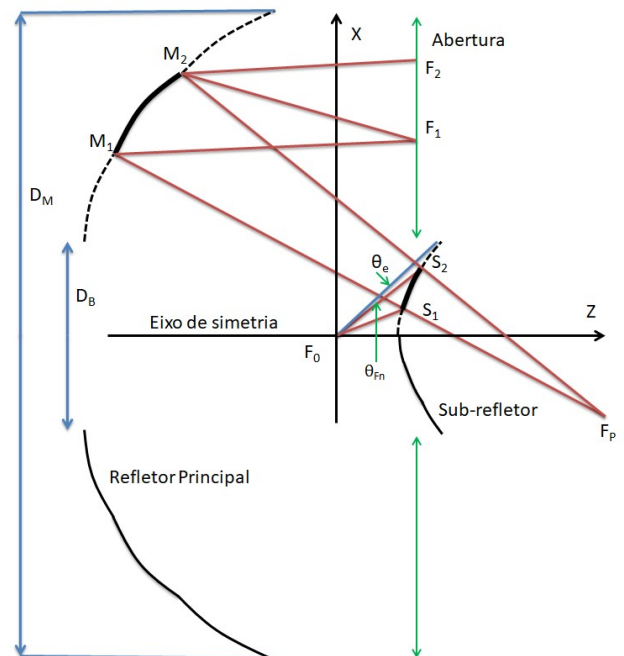


Fig. 1. Ilustração do método de modelagem da antena na configuração ADC.

Assim, esta técnica apresenta grande utilidade no projeto de antenas duplo-refletores, principalmente quando se estabelece um padrão de iluminação da abertura desejado para se obter determinado diagrama de radiação.

## II. FORMULAÇÃO

A formulação desta modelagem se baseia no uso de seções cônicas para representar as geratrizes do sub-refletor e do refletor principal. Em cada seção cônica, a lei de reflexão de Snell é respeitada, excluindo-se os pontos de interseção entre as seções cônicas.

A cada passo do método iterativo, duas destas cônicas são descobertas, formando um pequeno pedaço dos refletores. Para cada etapa do processo, são necessários: o ponto sobre a

abertura, que será um dos focos das cônicas, a fase neste ponto, e a potência que incidirá sobre este foco.

Os pontos sobre a abertura podem ser distribuídos arbitrariamente, sendo usualmente distribuídos de maneira uniforme. A fase é determinada diretamente nas equações através do percurso  $q$  até a abertura. Já a potência sobre cada um dos focos pode ser determinada através da conservação da energia que parte da origem, reflete no sub-refletor e no refletor principal, e chega até a abertura. A equação da distribuição de potência foi apresentada em [1], e é estendida para o caso onde a distribuição de potência da abertura é discreta.

Por utilizar ótica geométrica, os elementos da antena projetada, sub-refletor e refletor principal, devem ser muito maiores do que o comprimento de onda relativo à frequência de operação. Assim, limita-se o diâmetro do sub-refletor para pelo menos  $10 \lambda$ , para que a técnica funcione corretamente.

#### A. Fase e Amplitude na Abertura

A fase na abertura é estabelecida em (1), adaptando a equação de onda em [2]:

$$\text{Fase} = \angle e^{-jkq} \quad (1)$$

onde  $k$  é a constante de propagação e  $q$  é o percurso que a onda percorre desde a fonte, refletido nos dois refletores, até a abertura. Na definição da constante de propagação em (2),  $c$  é a velocidade da luz no meio,  $\omega$  é a frequência angular e  $\lambda$  é o comprimento de onda:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2)$$

O controle de amplitude na abertura é obtido aplicando a conservação da energia que parte da origem  $F_0$  e chega à abertura, como descrito em (3) e (4). A Figura 1 ilustra os feixes de raios que partem da origem e chegam até os focos na abertura.

$$\int_0^{\theta_{Fn}} G_F(\theta_F) r_F^2 \text{sen}(\theta_F) d\theta_F = N_F \int_{D_B/2}^{x_n} G_A(x) x dx \quad (3)$$

$$N_F = \frac{\int_0^{\theta_e} G_F(\theta_F) r_F^2 \text{sen}(\theta_F) d\theta_F}{\int_{D_B/2}^{D_M/2} G_A(x) x dx} \quad (4)$$

com  $G_F(\theta_F)$  sendo a densidade de potência radiada pela fonte,  $G_A(x)$  a densidade de potência desejada na abertura,  $N_F$  sendo um termo normalizador para assegurar que toda a potência irradiada pela fonte e interceptada pelo sub-refletor seja conservada na abertura da antena,  $D_B$  é o diâmetro do sub-refletor,  $D_M$  é o diâmetro do refletor principal e  $\theta_e$  é o ângulo de borda do sub-refletor. Para o caso em que a função  $G_A(x)$  é discreta, com variação suave da densidade de potência na abertura, temos (5) e (6):

$$\int_0^{\theta_{Fn}} G_F(\theta_F) r_F^2 \text{sen}(\theta_F) d\theta_F = N_F \sum_{m=2}^n G_A(x_m) (x_m^2 - x_{m-1}^2) \quad (5)$$

$$N_F = \frac{\int_0^{\theta_e} G_F(\theta_F) r_F^2 \text{sen}(\theta_F) d\theta_F}{\sum_{m=2}^{n_{max}} G_A(x_m) (x_m^2 - x_{m-1}^2)} \quad (6)$$

com  $m$  sendo número do foco sobre a abertura da iteração e  $n_{max}$  o número de focos sobre a abertura.

Utilizando (3) e (4), ou (5) e (6), são descobertos os ângulos  $\theta_{Fn}$  de cada iteração da modelagem.

#### B. Modelagem da Antena

Para a modelagem da antena, foram utilizadas (7), (8), (13), (14), (18) e (19), que foram obtidas através de leis trigonométricas simples, como a lei dos cossenos e a lei dos senos. Além destas, foram utilizadas as definições dos parâmetros das cônicas em (9), (10), (11), (12), (15) e (16), a equação de reflexão em cônicas em (17), obtida em [3], e a equação da cônica em coordenadas polares em (20). A Figura 2 ilustra a modelagem.

A Figura 2 é obtida da Figura 1 destacando as seções cônicas de uma iteração, e acrescentando as outras variáveis do problema. As seções cônicas estão de preto na figura, definidas entre os pontos  $S_1$  e  $S_2$  para o sub-refletor, e  $M_1$  e  $M_2$  para o refletor principal. As linhas vermelhas representam os raios das cônicas, e as linhas azuis as distâncias entre os focos. Os focos são simbolizados pela letra  $F$ , sendo  $F_0$  o foco na origem do sistema, onde é posicionado o alimentador,  $F_P$  o foco comum entre as cônicas do sub-refletor e refletor principal, e  $F_1$  e  $F_2$  os focos sobre a abertura.

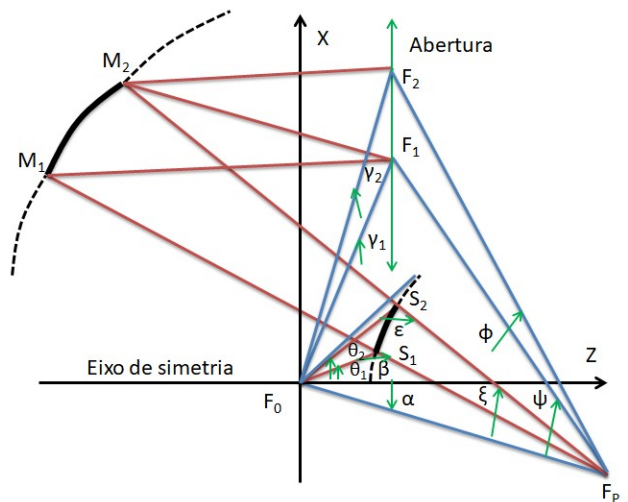


Fig. 2. Ilustração do método de modelagem da antena.

Para a modelagem, também são necessários os ângulos entre os diversos segmentos, sendo que os ângulos são quase todos definidos como positivos no sentido anti-horário, e negativos no sentido horário, se diferenciando apenas dos ângulos que circundam o foco  $F_P$ , que são definidos como positivos no sentido horário.

Assim, a incógnita do sistema de equações  $\alpha$  é definida como o ângulo entre o eixo  $z$  e o segmento  $\overline{F_0 F_P}$ . O ângulo  $\beta$  é o ângulo entre o segmento  $\overline{F_0 S_1}$  e o segmento  $\overline{S_1 F_P}$ . O ângulo  $\epsilon$  é o ângulo entre o segmento  $\overline{F_0 S_2}$  e o segmento  $\overline{S_2 F_P}$ . Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são definidos como os ângulos entre o eixo  $z$ , e os segmentos  $\overline{F_0 S_1}$  e  $\overline{F_0 S_2}$  respectivamente. Já os ângulos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os ângulos entre o eixo  $z$ , e os segmentos  $\overline{F_0 F_1}$  e  $\overline{F_0 F_2}$  nesta ordem. Os últimos ângulos  $\xi$ ,  $\psi$  e  $\phi$  que circundam o ponto  $F_P$  são definidos como os ângulos entre o segmento  $\overline{F_P F_0}$ , e os segmentos  $\overline{F_P M_2}$ ,  $\overline{F_P F_1}$  e  $\overline{F_P F_2}$  respectivamente.

Para completar, define-se  $q_1$  como o percurso ótico desde a fonte, refletido nos refletores, até o foco  $F_1$ ,  $q_2$  como o percurso ótico desde a fonte, refletido nos refletores, até o foco  $F_2$ ,  $q_{0P}$  como o eixo maior da cônica com focos  $F_0$  e  $F_P$ ,  $q_{P1}$  como o eixo maior da cônica com focos  $F_P$  e  $F_1$ , e  $q_{P2}$  como o eixo

maior da cônica com focos  $F_P$  e  $F_2$ . Também são definidas as excentricidades das cônicas como  $e_{0P}$  sendo a excentricidade da cônica com focos em  $F_0$  e  $F_P$ ,  $e_{P1}$  como a excentricidade da cônica com focos em  $F_P$  e  $F_1$ , e  $e_{P2}$  como a excentricidade da cônica com focos em  $F_P$  e  $F_2$ . Assim, definidos os termos das equações, o sistema é apresentado nas equações de (7) a (20).

$$\overline{F_0 F_P} = \overline{F_0 S_1} \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen}(-\alpha + \beta + \theta_1)} \quad (7)$$

$$\overline{F_P S_1} = \overline{F_0 F_P} \frac{\text{sen}(-\alpha + \theta_1)}{\text{sen } \beta} \quad (8)$$

$$q_{0P} = \overline{F_0 S_1} - \overline{F_P S_1} \quad (9)$$

$$e_{0P} = \frac{\overline{F_0 F_P}}{q_{0P}} \quad (10)$$

$$q_{P1} = q_1 - q_{0P} \quad (11)$$

$$q_{P2} = q_2 - q_{0P} \quad (12)$$

$$\overline{F_P F_1} = \sqrt{\overline{F_0 F_1}^2 + \overline{F_0 F_P}^2 - 2 \overline{F_0 F_1} \overline{F_0 F_P} \cos(\alpha - \gamma_1)} \quad (13)$$

$$\overline{F_P F_2} = \sqrt{\overline{F_0 F_2}^2 + \overline{F_0 F_P}^2 - 2 \overline{F_0 F_2} \overline{F_0 F_P} \cos(\alpha - \gamma_2)} \quad (14)$$

$$e_{P1} = \frac{\overline{F_P F_1}}{q_{P1}} \quad (15)$$

$$e_{P2} = \frac{\overline{F_P F_2}}{q_{P2}} \quad (16)$$

$$\tan \frac{\xi}{2} = \frac{(e_{0P} + 1) \tan\left(\frac{-\alpha + \theta_2}{2}\right)}{e_{0P} - 1} \quad (17)$$

$$\cos \psi = \frac{\overline{F_0 F_P}^2 + \overline{F_P F_1}^2 - \overline{F_0 F_1}^2}{\overline{F_0 F_P} \overline{F_P F_1}} \quad (18)$$

$$\cos \phi = \frac{\overline{F_0 F_P}^2 + \overline{F_P F_2}^2 - \overline{F_0 F_2}^2}{\overline{F_0 F_P} \overline{F_P F_2}} \quad (19)$$

$$\text{erro} = \frac{(-1 + e_{P1}^2) \overline{F_P F_1}}{2 e_{P1} (-1 + e_{P1} \cos(\xi - \psi))} - \frac{(-1 + e_{P2}^2) \overline{F_P F_2}}{2 e_{P2} (-1 + e_{P2} \cos(\xi - \phi))} \quad (20)$$

Com estas equações, utiliza-se um método numérico para minimizar o *erro* de (20), através do ângulo  $\alpha$ . Este *erro* representa na figura uma comparação do segmento  $\overline{F_P M_2}$  calculado com a cônica de focos  $F_P$  e  $F_1$ , e a cônica de focos  $F_P$  e  $F_2$ . Quando este *erro* é zerado, indica que no ponto  $M_2$  estão sendo respeitadas as condições de continuidade da antena e do percurso  $q$  para a próxima iteração.

Para realizar este passo do problema, alguns termos do sistema são obtidos da iteração anterior.  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $q_1$  e  $q_2$  são parâmetros dados inicialmente,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são obtidos pelas equações de amplitude, e  $\overline{F_0 S_1}$  e  $\beta$  são obtidas pela iteração anterior.

Após obter o valor de  $\alpha$  que minimiza o *erro*, são calculados o segmento  $\overline{F_0 S_1}$  e o ângulo  $\beta$  para a próxima

iteração em (21) e (23), sendo que o segmento  $\overline{F_0 S_1}$  da iteração seguinte é o segmento  $\overline{F_0 S_2}$  da iteração atual, e o ângulo  $\beta$  da próxima iteração é o ângulo  $\varepsilon$  da iteração atual. Além deles, são calculados em (22) e (26), os pontos  $S_2$  e  $M_2$  que compõem as superfícies refletoras da antena. Estes dois pontos são definidos por um módulo e por um ângulo, usando a notação em coordenadas polares entre parênteses:

$$\overline{F_0 S_2} = \frac{\overline{F_0 F_P}^2 - q_{0P}^2}{-2 q_{0P} + 2 \overline{F_0 F_P} \cos(\alpha - \theta_2)} \quad (21)$$

$$S_2 = (\overline{F_0 S_2}, \angle \theta_2) \quad (22)$$

$$\varepsilon = \pi + \alpha - \theta_2 - \xi \quad (23)$$

$$\overline{F_P M_2} = \frac{\left(\frac{1}{e_{P1}} - e_{P1}\right) \overline{F_P F_1}}{2(1 - e_{P1} \cos(\xi - \psi))} \quad (24)$$

$$\overline{S_2 M_2} = q_{0P} - \overline{F_0 S_2} + \overline{F_P M_2} \quad (25)$$

$$M_2 = (S_2 + \overline{S_2 M_2}, \angle \varepsilon + \theta_2) \quad (26)$$

### III. RESULTADOS

Para ilustrar o método de modelagem, o mesmo foi aplicado em dois casos distintos. O primeiro sendo uma antena ADC com abertura uniforme apresentado em [1], e o segundo sendo uma abertura modelada de acordo com [4]. Nos dois casos, foi gerado o diagrama de radiação utilizando método dos momentos.

#### A. Antena ADC Modelada

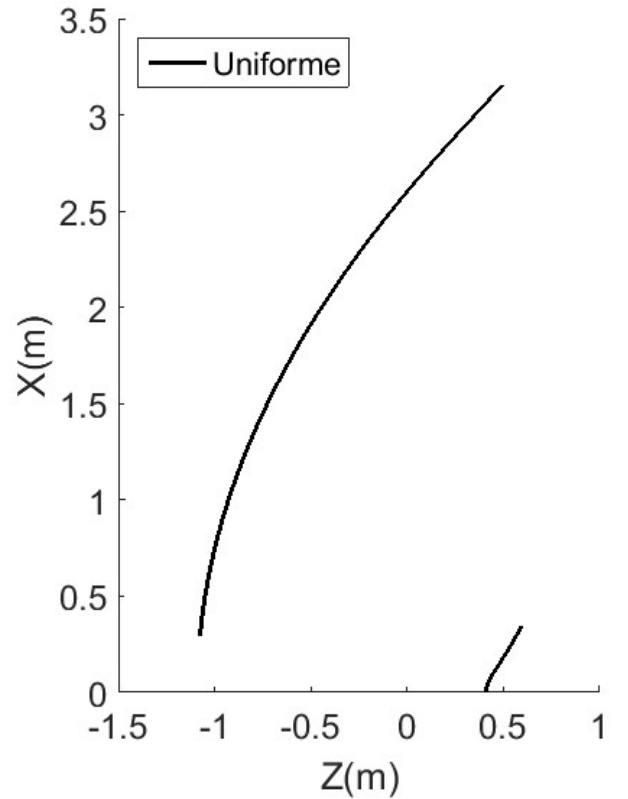


Fig. 3. Antena Modelada com abertura uniforme.

As dimensões da antena seguem como descritas em [1]. Assim,  $D_M = 6\text{m}$ ,  $D_B = 0,6\text{m}$ ,  $q = 3\text{m}$ ,  $\theta_e = 30^\circ$  e a abertura posicionada sobre o eixo  $z$ . A frequência de operação é de

5GHz, o que faz com que o diâmetro da abertura seja  $D_M \approx 100\lambda$ . Os refletores são modelados para criar uma abertura de fase e amplitude uniformes. O modelo do alimentador segue em (27), com  $p=83$ :

$$G_F(\theta_F) = \frac{1}{r_F^2} \cos^{2p} \frac{\theta_F}{2} \quad (27)$$

Assim, pode-se comparar o método desenvolvido neste trabalho com [1]. A antenna modelada é apresentada na Figura 3, e na Figura 4 é apresentado o diagrama de radiação que ela gera, comparado com o fornecido por [1].

Como se pode observar na Figura 4, a antenna obteve o mesmo diagrama de radiação, com as mesmas posições e ganhos dos lóbulos secundários, mostrando que a técnica funciona bem para este tipo de abertura.

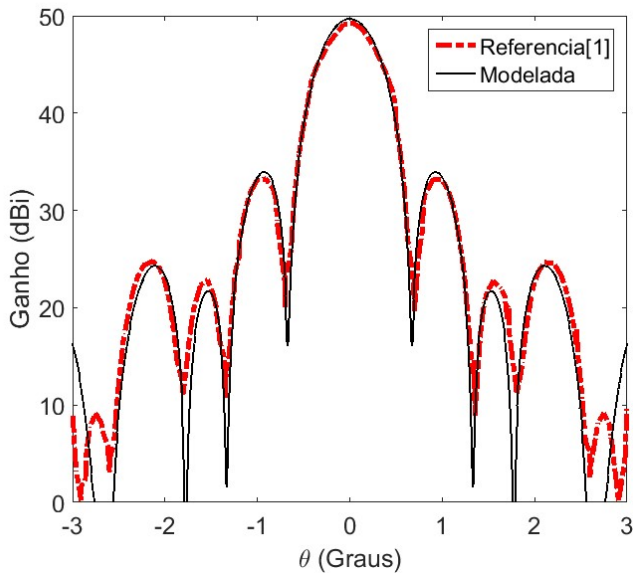


Fig. 4. Diagrama de radiação comparativo das antenas com distribuição uniforme entre o artigo de referência [1] e a antenna modelada.

### B. Abertura Não Uniforme

Foi utilizada como base para a aplicação da técnica de modelagem de antenna, a distribuição de fase e amplitude na abertura apresentada em [4]. Contudo, a abertura apresentada em [4] é pequena se comparada ao comprimento de onda, sendo da ordem de  $10\lambda$ , além de não apresentar bloqueio. Com isso, utilizou-se uma abertura como a do exemplo anterior (ADC uniforme), com o mesmo diâmetro de aproximadamente  $100\lambda$ , frequência de 5GHz, pontos iniciais e alimentador iguais para ser possível compará-las.

Como a abertura original não apresenta bloqueio, o controle de fase e amplitude se fez a partir do fim do bloqueio até a borda da abertura. O percurso ótico  $q$  foi estabelecido como 3m para o primeiro foco da abertura. A partir deste ponto, as diferenças de fase entre o foco da abertura e o utilizado para a modelagem eram acrescentados através da alteração da variável  $q$ , conforme (1).

A Tabela I apresenta a distribuição da abertura não uniforme, com a sua amplitude e fase para cada ponto, em função do raio do ponto na abertura de acordo com [4]. Esta tabela também apresenta como a amplitude e a fase foram aplicadas sobre a abertura da antenna modelada.

Aplicando o perfil indicado na Tabela I sobre a abertura, obteve-se a antenna modelada (Não Uniforme) comparada com a antenna modelada no exemplo anterior (Uniforme), na Figura 6. E na Figura 5 é apresentado o diagrama de radiação da antenna modelada comparado com o diagrama obtido em [4].

Para possibilitar a comparação entre [4] e a antenna modelada pela técnica apresentada, os diagramas de radiação foram normalizados. Assim, eles não representam o mesmo valor de potência radiada para um mesmo ganho.

TABELA I. Tabela de distribuição de amplitude e fase na abertura.

[4] $\rho/D_M$	Aplicação $\rho(m)$	Amplitude Normalizada	Fase Graus
0	0,6	1	180
0,05	0,87	0,961	179
0,1	1,14	0,851	176
0,15	1,41	0,689	169
0,2	1,68	0,51	155
0,25	1,95	0,377	128
0,3	2,22	0,36	92
0,35	2,49	0,429	66
0,4	2,76	0,497	51
0,45	3,03	0,521	41
0,5	3,3	0,494	32
0,55	3,57	0,427	22
0,6	3,84	0,34	10
0,65	4,11	0,257	-7
0,7	4,38	0,199	-31
0,75	4,65	0,178	-59
0,8	4,92	0,181	-82
0,85	5,19	0,191	-98
0,9	5,46	0,2	-108
0,95	5,73	0,204	-114
1	6	0,205	-115

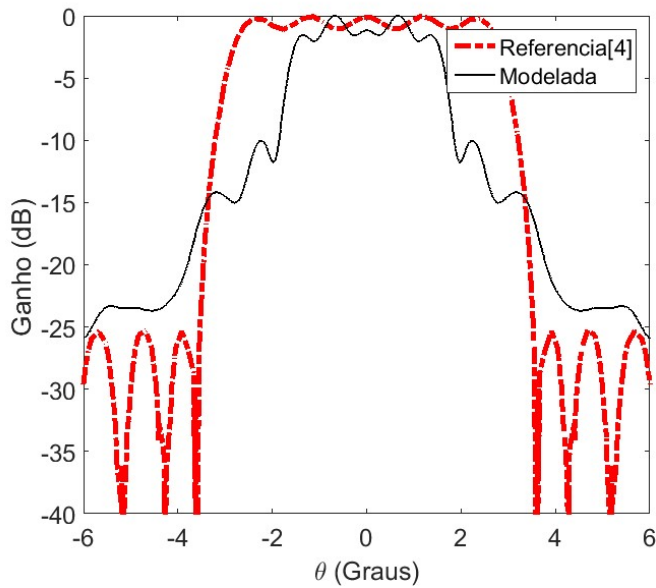


Fig. 5. Diagrama de radiação comparativo normalizado das antenas com distribuição não uniforme entre o artigo de referência [4] e a antena modelada.

Devido às diferenças entre as aberturas de [4] e deste trabalho, os diagramas de radiação apresentaram discrepâncias. Contudo, os resultados obtidos se mostram relevantes, já que permitiu a aplicação da técnica, e observaram-se semelhanças entre os dois diagramas. Como se observa na Figura 5, a antena modelada apresentou o topo plano com pequeno ripple no centro, e foi mais diretiva por ser maior comparativamente em comprimentos de onda. Além disso, apresentou maior ripple e lóbulos laterais devido ao bloqueio no centro da abertura.

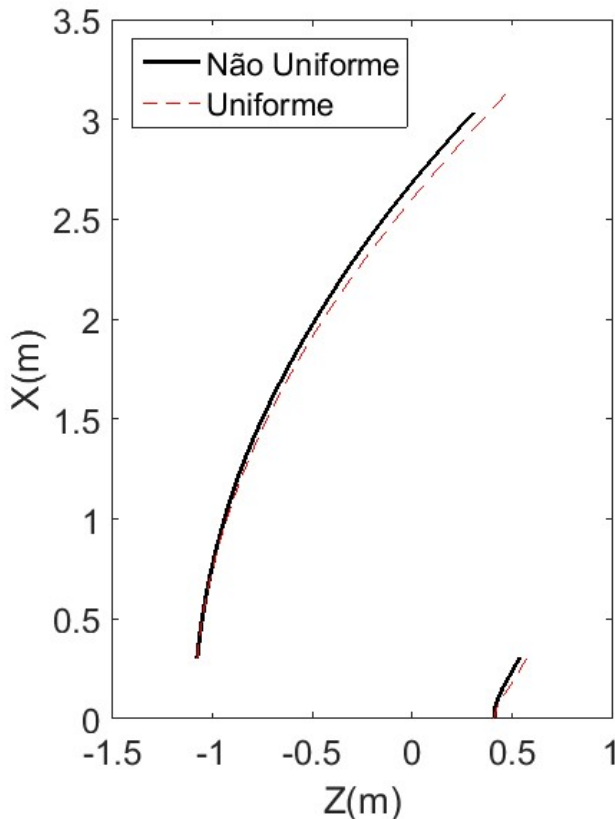


Fig. 6. Comparação entre a antena com abertura uniforme e a antena com abertura não uniforme.

#### IV. CONCLUSÕES

A técnica de modelagem apresentada mostrou-se eficaz para o projeto de antenas duplo-refletoras axialmente simétricas, possibilitando o controle de fase e amplitude na abertura, com o objetivo de se obter diferentes diagramas de radiação. Esta técnica ainda possibilita liberdade de modelagem para se criar antenas ADG, ADH e ADE, além das configurações de antena ADC apresentadas neste artigo.

A utilização de seções cônicas na modelagem possibilitou diversas facilidades, como no traçado de raios da reflexão nos refletores até a abertura, além da simplicidade das equações apresentadas, pois possibilitou que leis básicas de seno e cosseno fossem utilizadas. Além disso, esta técnica não apresenta equações diferenciais na modelagem das geratrizes dos refletores, o que torna as equações mais simples.

Esta técnica pode ser adaptada para antenas refletoras com diferentes inclinações de abertura plana, ou outros formatos de abertura, permitindo assim a criação de antenas omnidirecionais como a de [5].

#### AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado por CAPES/PROCAD 068419/14-01, CNPq e FAPEMIG.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Fernando J. S. Moreira and José R. Bergmann, "Shaping Axis-Symmetric Dual-Reflector Antennas by Combining Conic Sections", *IEEE Transactions On Antennas And Propagation*, Vol. 59, No. 3, March 2011
- [2] C. A. Balanis, "Antenna Theory Analysis and Design" 2<sup>nd</sup> Ed, New York, John Wiley & Sons, 1997, pp. 121-125.
- [3] B. S. Westcott, "Shaped Reflector Antenna Design", New York, Research Studies Press, 1983, pp. 15-21.
- [4] R. S. Elliott and G. J. Stern, "Shaped patterns from a continuous planar aperture distribution", *IEE Proceedings*, Vol. 135, Pt. H, No. 6, March 1988
- [5] Rafael A. Penchel, Sandro R. Zang, José R. Bergmann and Fernando J. S. Moreira, "Design of Wideband Omnidirectional Dual-Reflector Antennas in Millimeter Waves", *IEEE Antennas And Wireless Propagation Letters*, Vol. 18, No. 5, May 2019.