

Avaliação do Espalhamento Eletromagnético em 2 Dimensões Usando o FEM

Rafaela Cardoso, Lucas Lopes, Ramon Dornelas Soares e Moacir de Souza Júnior

Resumo— Neste trabalho, o método dos elementos finitos (FEM) é usado para avaliar numericamente problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões. O algoritmo construído usando o referido método apresenta uma solução numérica para espalhamentos por um cilindro ou um prisma infinitos. Estes objetos podem ser constituídos por condutor elétrico perfeito ou imperfeito, e também por dielétrico. Todos os resultados obtidos pelo algoritmo construído para os espalhamentos são comparados às soluções analíticas, casos canônicos, ou a outras soluções numéricas já publicadas.

Palavras-Chave — Elementos Finitos, FEM, Espalhamento Eletromagnético

I. INTRODUÇÃO

O espalhamento eletromagnético é um problema físico decorrente da obstrução da trajetória de uma onda eletromagnética por um espalhador. A onda incidente, ao colidir com o espalhador gera uma onda espalhada. A soma dessas ondas compõe o campo eletromagnético total. Dentro do espalhador, dependendo do material, pode-se ter o campo transmitido. A análise de espalhamento eletromagnético proposta neste trabalho é um primeiro estudo no intuito de analisar problemas de propagação nas frequências da rede 5G.

Neste trabalho, são apresentados resultados numéricos usando um algoritmo usando o método FEM (*Finite Element Method*) para avaliar espalhamentos eletromagnéticos. Para a análise usando o FEM, é necessário a construção de um domínio computacional, o qual é limitado por uma fronteira artificial com condição de contorno absorvente (*Absorbent Boundary Condition-ABC*) [1]. O FEM particiona o domínio computacional em um número finito de elementos (subdomínios) que são usados para a construção de um sistema de equações lineares e chegar à solução do problema.

Foi avaliado o espalhamento eletromagnético por um cilindro infinito onde o espalhador pode ser constituído de três diferentes materiais: PEC (*Perfect Electric Conductor*), IEC (*Imperfect Electric Conductor*) ou dielétrico. Avaliou-se também o espalhamento eletromagnético por um prisma PEC infinito e o efeito causado pela variação da distância entre o espalhador e a fronteira absorvente. Os resultados obtidos dos cilindros PEC e dielétricos são comparados com suas soluções analíticas ([2] e [3]), e os resultados do IEC e do prisma PEC são comparados com os resultados numéricos dos métodos MoM (*Method of Moments*) [1] e FEM [4], respectivamente.

II. FORMULAÇÃO USADA NO ALGORITMO FEM

A solução numérica dos problemas de espalhamento analisados é obtida a partir das equações de Maxwell, considerando um ambiente simples (homogêneo, isotrópico e

sem fontes) composto pelo espaço livre. Usando estas equações e admitindo os campos eletromagnéticos invariantes na direção z obtém-se a equação de Helmholtz, Equação (1):

$$\nabla \cdot (\alpha_1 \nabla u) + k_0^2 \alpha_2 u = 0, \quad (1)$$

onde $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é o número de onda no espaço livre, $\alpha_1 = 1/\mu_r$, $\alpha_2 = \epsilon_r$ e $u = E_z$ (caso transversal magnético em z -TM_z) ou $\alpha_1 = 1/\epsilon_r$, $\alpha_2 = \mu_r$ e $u = H_z$ (caso transversal elétrico em z -TE_z).

A Equação (1) é uma equação diferencial e possuirá uma solução quando for associada às condições de contorno do problema analisado. Estas condições podem ser resumidas em:

$$a u + b \frac{du}{dn} = \Psi \quad \forall \rho \in \Gamma, \quad (2)$$

onde ρ é um ponto de observação do campo e du/dn é a derivada do campo em relação à direção da normal à superfície Γ e Ψ é uma função conhecida. Adota-se $a=1$ e $b=0$ para condição de contorno de Dirichlet, $a=0$ e $b=1$ para condição de Neumann e $a \neq 0$ e $b \neq 0$ para condição de contorno de Robin.

Para aplicar o método FEM é necessário a construção da forma fraca, uma equação integro-diferencial, que é usada no domínio computacional (área em volta e fronteira do espalhador e, no caso, do espalhador dielétrico, área interna). A forma fraca [5], obtida com o Método Resíduos Ponderados, é dada por:

$$\int_{\Gamma_a} \alpha_1 w \left[-u \left(jk_0 + \frac{k}{2} \right) + u^i \left(jk_0 + \frac{k}{2} \right) + \frac{du^i}{dn} \right] d\Gamma_a - \int_{\Omega} (\alpha_1 \nabla w \cdot \nabla u + k_0^2 \alpha_2 w u) d\Omega = 0, \quad (3)$$

onde w é uma função de teste, Γ_a é a fronteira absorvente e Ω é o domínio do problema, k é a distância do centro à Γ_a e u^i é o campo incidente, sendo igual a $e^{-jk_0 x}$ nos casos TE_z e TM_z.

Para resolver a Equação (3), usando o FEM, é necessário a construção de um sistema linear de equações, obtido utilizando a seguinte função linear de interpolação para u :

$$u \approx \sum_{q=1}^3 \beta_q \phi_q, \quad (4)$$

na qual os parâmetros β_q são os potenciais nos vértices da malha e as funções de base ϕ_q são funções lineares definidas usando elementos triangulares [1]. Substituindo a Equação (4) na Equação (3) e fazendo w igual a ϕ_q obtém-se [6]:

$$[K] \cdot [B] = [F], \quad (5)$$

onde K é uma matriz quadrada obtida a partir das integrais nos subdomínios e no contorno Γ_a , F é um vetor de integrais dos elementos no contorno Γ_a e B é o vetor coluna que contém as incógnitas β_p , ou seja, o campo elétrico (caso TM_z) ou magnético (caso TE_z) em cada vértice. Os elementos da matriz K e do vetor coluna F são dados, respectivamente, por:

Rafaela Cardoso, e-mail: rafaela.cardososilveira@gmail.com; Lucas Lopes, e-mail: ferreiralucaslopes@gmail.com, Ramon Dornelas Soares, e-mail: soares.ramon@ufsj.edu.br; Moacir de Souza Júnior, e-mail: moacir@ufsj.edu.br. Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Alto Paraopeba-C.A.P., Rod: MG 443, Km 7 Ouro Branco – MG.

$$k_{pq} = - \int_{\Omega} \alpha_1 \cdot \nabla \phi_p \cdot \nabla \phi_q + k_0^2 \alpha_2 \phi_p \phi_q \, d\Omega - \int_{\Gamma_a} \alpha_1 \phi_p \phi_q \left(jk_0 + \frac{k}{2} \right) \, d\Gamma_a \quad (6)$$

e

$$f_p = \int_{\Gamma_a} \alpha_1 \phi_p \left[u^i \left(jk_0 + \frac{k}{2} \right) + \frac{du^i}{dn} \right] \, d\Gamma_a \quad (7)$$

III. RESULTADOS

Os problemas de espalhamentos eletromagnéticos avaliados neste trabalho admitem uma onda eletromagnética plana propagando no vácuo com direção +x e frequência de 0,3 GHz (comprimento de onda de 1 metro, $\lambda=1\text{m}$). Adota-se o caso TMz (obtendo o $|E_z|$ na superfície do espalhador) para o cilindro dielétrico ($\mu_1=1 \mu_0$ e $\epsilon_1=3 \epsilon_0$) e o caso TEz (obtendo o $|H_z|$ na superfície do espalhador) para as análises do prisma PEC e dos cilindros: PEC e IEC. A impedância normalizada na superfície do IEC usada foi igual a 2 ($\eta = 2$), [1]. Admite-se, também, que os espalhadores cilíndricos PEC e IEC possuem raio de 1λ ($r=1\lambda$), o espalhador dielétrico possui $r=0,3\lambda$ e o espalhador com seção triangular isósceles possui lados de comprimento $1,8\lambda$, $1,8\lambda$ e $1,4\lambda$.

A Figura 1 apresenta o resultado de duas análises: o espalhamento eletromagnético por um cilindro PEC e por um cilindro IEC. A condição de Robin ($a=-j\eta k_0$, $b=1$ e $\Psi=0$) foi adotada para a superfície do cilindro IEC. Nesta figura, são apresentados os resultados numéricos para a análise do cilindro PEC usando diferentes valores de raio da ABC $R=3\lambda$ e $R=4\lambda$, sendo que o domínio computacional destas duas configurações possuíam, respectivamente, 5636 e 8995 vértices. Observa-se que estes dois resultados numéricos estão muito próximos da solução analítica, sendo o erro relativo máximo calculado para a ABC de $R=3\lambda$ igual a 3,66% e para a ABC de $R=4\lambda$ igual a 3,35%. Os resultados numéricos para o cilindro IEC obtido pelo algoritmo FEM (8995 vértices e com $R=4\lambda$) e usando o MoM [1] também estão próximos.

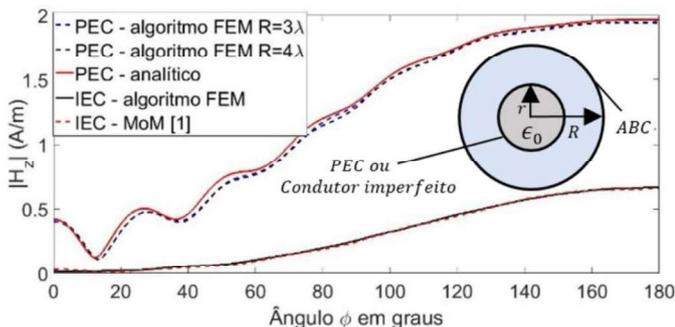


Fig. 1. Valores do $|H_z|$ obtido da solução analítica [2] e numérica (algoritmo FEM) para o cilindro PEC; valores do $|H_z|$ obtido da solução numérica usando o MoM [1] e o algoritmo FEM para o cilindro IEC.

Já na Figura 2 é apresentada a avaliação do espalhamento por um prisma PEC, a mesma apresenta dois resultados numéricos, o obtido pelo algoritmo FEM (13073 vértices e com $R=4\lambda$) e o do FEM [4]. Estes dois resultados também se mostraram próximos, apresentando uma maior diferença em alguns valores de máximo.

A Figura 3 apresenta o resultado para o espalhamento eletromagnético usando o algoritmo FEM (11207 vértices e com $R=1,5\lambda$) e a solução analítica, [3]. Observa-se que o resultado numérico está muito próximo ao resultado analítico, sendo o erro relativo máximo calculado entre eles de 2,25%.

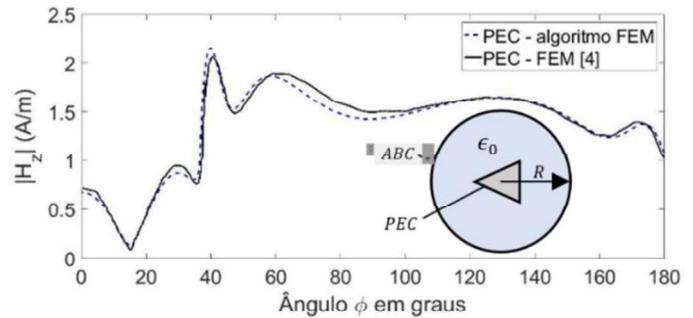


Fig. 2. Valores do $|H_z|$ obtido da solução numérica usando o FEM [4] e o algoritmo FEM para o prisma.

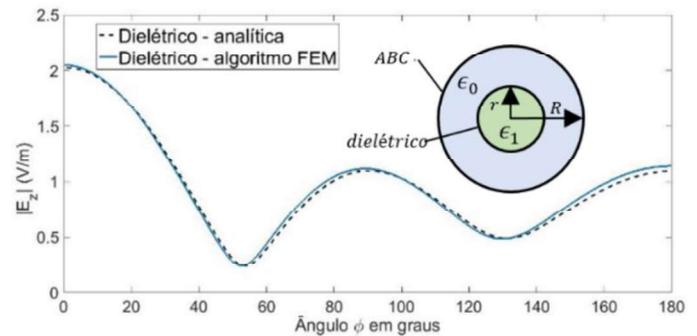


Fig. 3. Valores do $|E_z|$ obtido da solução analítica [3] e numérica (algoritmo FEM) para o cilindro dielétrico.

IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi construído um algoritmo usando a técnica numérica FEM. O problema avaliado foi o de espalhamento eletromagnético sobre estruturas espalhadoras bidimensionais, cilindros e prisma infinitos. Foi também determinado o efeito da distância entre o espalhador e o contorno absorvente na resposta numérica. Afim de comprovar a eficiência do algoritmo desenvolvido, calculou-se o erro relativo para os casos que apresentam soluções analíticas.

O valor máximo de erro relativo calculado para o cilindro PEC infinito foi de 3,66% (caso com menor raio da ABC) e para o cilindro dielétrico infinito 2,25%. Além disso, pode ser observado que respostas numéricas muito próximas foram encontradas tanto no espalhamento eletromagnético por um cilindro IEC infinito quanto para o espalhamento eletromagnético por um prisma PEC infinito.

REFERÊNCIAS

- [1] Jin, Jianming. (2002). *The finite elements method in electromagnetics*. Wiley, 2nd edition.
- [2] Harrington R. F. (2001). *Time harmonic electromagnect fields*. Wiley, 1st edition.
- [3] Balanis (1989). *Advanced engineering electromagnetics*. Wiley, 1st edition.
- [4] Valvassoura, G. “Análise do espalhamento eletromagnético em objetos com geometrias irregulares”. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – CEFET-MG – UFSJ.
- [5] Pinto, A. G. M. “Análise das condições absorventes de Engquist-Majda e Bayliss-Turkel aplicadas ao espalhamento eletromagnético”. 2012. Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2012.
- [6] Barbosa, L. S. “FEM-ABC Aplicado à solução de problemas de espalhamento eletromagnético”. 2010. Programa Pós de Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte.