

# Aproximações para Somas de Envoltórias Nakagami- $m$ e $\alpha$ - $\mu$ via Casamento de Assíntotas

José David Vega Sánchez, Victor Gonçalves de Carvalho Feitosa Perim e José Cândido Silveira Santos Filho

**Resumo**— Neste trabalho, é introduzido um novo método para a aproximação da função densidade de probabilidade de somas de variáveis aleatórias positivas. Além disso, como exemplos importantes de aplicação em comunicações sem fio, o método é particularizado para somas de envoltórias Nakagami- $m$  e  $\alpha$ - $\mu$ . Na abordagem proposta, os parâmetros da distribuição aproximada são ajustados para que seu comportamento assintótico equivalha ao da distribuição exata da soma. Por conta disso, o novo método é extremamente preciso para relações sinal-ruído médias a altas, desbancando as soluções existentes na literatura.

**Palavras-Chave**— Análise assintótica, canais de desvanecimento, distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , distribuição Nakagami, métodos aproximados, somas de variáveis aleatórias.

**Abstract**— In this work, we introduce a new method for approximating the probability density function of sums of positive random variables. In addition, as important application examples in wireless communications, we specialize the new method to sums of Nakagami- $m$  and  $\alpha$ - $\mu$  envelopes. In the proposed approach, the parameters of the approximate distribution are calibrated by matching its asymptotic behavior to that of the exact sum distribution. As a result, the new method is strikingly accurate at medium to high signal-to-noise ratio, outperforming existing solutions in the literature.

**Keywords**—  $\alpha$ - $\mu$  distribution, approximation methods, asymptotic analysis, fading channels, Nakagami- $m$  distribution, sum distributions.

## I. INTRODUÇÃO

Esquemas de combinação de diversidade, equalização e fenômenos de interferência são apenas alguns dos muitos cenários de aplicação em sistemas de comunicação sem fio caracterizados por somas de variáveis aleatórias. Nesses casos, conhecer as estatísticas de tais somas é crucial para analisar o desempenho dos sistemas. Entretanto, a avaliação exata da função densidade de probabilidade (FDP) da soma de variáveis aleatórias pode ser uma tarefa complicada, uma vez que se apresenta na forma de uma convolução das FDPs individuais. Essa convolução necessita por vezes de rotinas numéricas para ser estimada, e mesmo essa abordagem se torna rapidamente inviável à medida que o número de variáveis da soma se eleva.

Em vista da complexidade inerente às estatísticas exatas da soma, soluções aproximadas se apresentam como uma alternativa importante. Foi o próprio Nakagami quem primeiro propôs ajustar os parâmetros de uma envoltória Nakagami- $m$

para aproximar uma soma de envoltórias Nakagami- $m$  independentes e identicamente distribuídas (iid) [1]. Com base nas ideias apresentadas em [1], uma aproximação Nakagami- $m$  foi proposta em [2] para a soma de duas envoltórias Nakagami- $m$  correlacionadas e em [3] para a soma de múltiplas envoltórias Nakagami- $m$  independentes e arbitrariamente distribuídas (iad). Mais recentemente, propôs-se o uso da envoltória generalizada  $\alpha$ - $\mu$  (da qual a envoltória Nakagami- $m$  é um caso especial) para aproximar a soma de envoltórias Nakagami- $m$  iad [4] e a soma de envoltórias  $\alpha$ - $\mu$  iid [5].

Em todos os trabalhos supracitados, os parâmetros da FDP aproximada são ajustados de modo a atender a determinados momentos estatísticos da soma exata (os de mais baixa ordem, em geral). Esse método é conhecido como casamento de momentos. Neste trabalho, propõe-se um novo método de ajuste de parâmetros, aqui denominado casamento de assíntotas<sup>1</sup>. A ideia central é forçar que a FDP aproximada tenha uma assíntota na origem equivalente àquela da FDP da soma exata. Note que, para um nível prefixado de envoltória, isso equivale a casar os comportamentos assintóticos das FDPs exata e aproximada para alta relação sinal-ruído (RSR) média. Trata-se de uma região importante de ajuste, já que retrata o ganho energético potencial de cada sistema de comunicação, sendo por isso amplamente empregada como critério de comparação entre sistemas. O novo método é aplicado a dois casos: (i) uma aproximação Nakagami- $m$  para a soma de múltiplas envoltórias Nakagami- $m$  iad e (ii) uma aproximação  $\alpha$ - $\mu$  para a soma de múltiplas envoltórias  $\alpha$ - $\mu$  iad.

O restante do texto está organizado como segue. Na Seção II, formula-se o problema da soma de envoltórias. Na Seção III, o arcabouço geral da solução exata conhecida é revisitado. Na Seção IV, introduz-se o novo método de ajuste para a FDP aproximada da soma, o qual é então aplicado para somas de envoltórias Nakagami- $m$  e  $\alpha$ - $\mu$ . Resultados numéricos e discussões são apresentados na Seção V. Finalmente, as principais conclusões deste trabalho são sintetizadas na Seção VI.

Ao longo do texto,  $f_Z(\cdot)$  denota a FDP de uma variável aleatória genérica  $Z$  e  $E[\cdot]$  denota média estatística.

## II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja  $R$  a soma de  $M$  envoltórias iad  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , ou seja,

$$R = \sum_{i=1}^M R_i. \quad (1)$$

<sup>1</sup>De fato, o novo método pode ser aplicado a somas genéricas de variáveis positivas independentes.

Em particular, serão consideradas somas de envoltórias Nakagami e  $\alpha$ - $\mu$ . No caso Nakagami, a FDP de  $R_i$  é dada por [1]

$$f_{R_i}(r) = \frac{2m_i^{m_i} r^{2m_i-1}}{\Gamma(m_i)\Omega_i^{m_i}} \exp\left(-\frac{m_i r^2}{\Omega_i}\right), \quad (2)$$

em que  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama,  $\Omega_i = E[R_i^2]$  é a potência média e  $m_i = \Omega_i^2/(E[R_i^4] - E^2[R_i^2])$  é o parâmetro de desvanecimento. No caso  $\alpha$ - $\mu$ , a FDP de  $R_i$  é dada por [6]

$$f_{R_i}(r) = \frac{\alpha_i \mu_i^{\mu_i} r^{\alpha_i \mu_i - 1}}{\Gamma(\mu_i)\Omega_i^{\mu_i}} \exp\left(-\frac{\mu_i r^{\alpha_i}}{\Omega_i}\right), \quad (3)$$

em que  $\Omega_i = E[R_i^{\alpha_i}]$  é um parâmetro de escala, enquanto que  $\mu_i = \Omega_i^2/(E[R_i^{2\alpha_i}] - E^2[R_i^{\alpha_i}])$  e  $\alpha_i > 0$  são parâmetros de forma associados ao desvanecimento do canal. Na análise que segue, serão utilizados os enésimos momentos de  $R_i$ , ou seja,  $E[R_i^n]$ . Para envoltórias Nakagami [1]

$$E[R_i^n] = \left(\frac{\Omega_i}{m_i}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + m_i)}{\Gamma(m_i)} \quad (4)$$

e para envoltórias  $\alpha$ - $\mu$  [6]

$$E[R_i^n] = \left(\frac{\Omega_i}{\mu_i}\right)^{\frac{n}{\alpha_i}} \frac{\Gamma(\frac{n}{\alpha_i} + \mu_i)}{\Gamma(\mu_i)}. \quad (5)$$

O problema em questão é encontrar uma boa aproximação para a FDP de  $R$  nos cenários Nakagami e  $\alpha$ - $\mu$  considerados. Antes disso, entretanto, será revisitada a formulação geral para a solução exata do problema, a fim de evidenciar a enorme (proibitiva, por vezes) complexidade dessa solução.

### III. SOLUÇÕES EXATAS REVISITADAS

A avaliação exata da FDP de uma soma de variáveis aleatórias iad pode ser formulada segundo duas abordagens. Na abordagem convencional, resulta na convolução das FDPs individuais. Na abordagem alternativa, no domínio transformado de Fourier, resulta no produto das funções características (FCs) individuais. Ambas as formulações são apresentadas a seguir.

#### A. Convolução e Integral de Brennan

Em vista da hipótese de independência entre as variáveis da soma, a FDP de  $R$  é obtida como a convolução das FDPs das variáveis  $R_i$  [7]. Tal convolução se escreve na forma de uma integral múltipla com dimensão igual a  $M-1$ , tendo como integrando o produto das FDPs individuais. Na verdade, em se tratando de variáveis positivas, como é o caso de envoltórias, é possível reformular os limites de integração a partir de uma abordagem geométrica, como apresentado em [8]. A vantagem de tal abordagem (conhecida como integral de Brennan) sobre a integral de convolução é contemplar também os casos em que as variáveis são mutuamente correlacionadas. Por conta disso, apresenta-se aqui a integral de Brennan, dada por [8]

$$f_R(r) = \int_0^r \int_0^{r-r_M} \dots \int_0^{r-\sum_{i=3}^M r_i} f_{R_1, \dots, R_M}\left(r - \sum_{i=2}^M r_i, r_2, \dots, r_M\right) dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M. \quad (6)$$

Note que a solução em (6) é dada em termos da FDP conjunta de  $R_1, \dots, R_M$ . Em nosso caso, como as variáveis aleatórias são independentes, tal FDP corresponde ao produto das FDPs marginais, ou seja,

$$f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, \dots, r_M) = \prod_{i=1}^M f_{R_i}(r_i). \quad (7)$$

Embora a integral de Brennan seja uma formulação geral e exata, apenas em casos muito limitados ela admite solução em forma fechada. Além disso, o seu uso em rotinas de integração numérica se mostra inviável na prática a partir de poucas variáveis ( $M > 5$ , por exemplo).

#### B. Produto de Funções Características

A FC de uma variável aleatória  $R_i$  é definida como  $\Phi_i(\omega) \triangleq E[\exp(j\omega R_i)]$ , o que equivale à antitransformada de Fourier da FDP de  $R_i$ . Assim, já que a FDP de  $R$  é dada pela convolução das FDPs de  $R_i$ , então a FC  $\Phi_R(\cdot)$  de  $R$  é dada pelo produto das FCs individuais correspondentes, ou seja,

$$\Phi_R(\omega) = \prod_{i=1}^M \Phi_{R_i}(\omega). \quad (8)$$

Finalmente, a FDP de  $R$  pode ser calculada a partir sua FC via transformada de Fourier, obtendo-se

$$f_R(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega r) \prod_{i=1}^M \Phi_{R_i}(\omega) d\omega. \quad (9)$$

Uma limitação dessa abordagem é que nem sempre se conhece a FC das variáveis envolvidas. Em nosso caso, por exemplo, a FC não é conhecida para envoltórias  $\alpha$ - $\mu$ , enquanto que para envoltórias Nakagami é dada por [9]<sup>2</sup>

$$\Phi_{R_i}(\omega) = {}_1F_1\left(m_i; \frac{1}{2}; -\frac{\Omega_i \omega^2}{4m_i}\right) + j\omega \frac{\Gamma(m_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_i)} \sqrt{\frac{\Omega_i}{m_i}} {}_1F_1\left(m_i; \frac{1}{2}; -\frac{\Omega_i \omega^2}{4m_i}\right), \quad (10)$$

sendo  ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$  a função hipergeométrica confluyente. Além disso, mesmo nos casos em que se conhecem as FCs individuais, a integral unidimensional em (9) raramente pode ser resolvida em forma fechada, e sua avaliação por rotinas numéricas se torna mais suscetível a problemas de má convergência à medida que o número  $M$  de variáveis aumenta.

### IV. SOLUÇÕES APROXIMADAS PROPOSTAS

Antes das aproximações propriamente ditas, alguns resultados preliminares serão apresentados, como base analítica para um novo método geral de ajuste de parâmetros via casamento de assíntotas.

<sup>2</sup>Em [9], com base na expressão da FC de envoltórias Nakagami- $m$ , foi apresentada uma solução em forma fechada para a FDP exata da soma de envoltórias Nakagami- $m$  iad. A solução é dada em termos da função hipergeométrica multivariada de Lauricella. Por outro lado, como apontado pelos próprios autores em [9], tal função não se acha disponível em pacotes computacionais como Matlab e Mathematica. Em última instância, ela deve portanto ser estimada via integração numérica, da mesma forma que já o seria com uso de (9).

### A. Preliminares

Considere a expansão em série de Maclaurin para a PDF de  $R_i$ , escrita na forma

$$f_{R_i}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} r_i^{b_{i,n}}, \quad (11)$$

em que  $b_{i,n}$  é uma função de  $n$  monotonicamente crescente. Os termos  $a_{i,n}$  e  $b_{i,n}$  dependem do modelo de desvanecimento em questão. Por exemplo, a partir de (2) e (3), com uso da série de Maclaurin da função exponencial, é possível mostrar que

$$a_{i,n} = \frac{(-1)^n 2m_i^{m_i+n}}{n! \Gamma(m_i) \Omega_i^{m_i+n}} \quad (12a)$$

$$b_{i,n} = 2(m_i + n) - 1 \quad (12b)$$

para desvanecimento Nakagami- $m$  e

$$a_{i,n} = \frac{(-1)^n \alpha_i \mu_i^{\mu_i+n}}{n! \Gamma(\mu_i) \Omega_i^{\mu_i+n}} \quad (13a)$$

$$b_{i,n} = \alpha_i (\mu_i + n) - 1 \quad (13b)$$

para desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$ . Sabendo-se que a FDP da soma é dada pela convolução das FDPs individuais, ou seja,

$$f_R(r) = f_{R_1}(r) \otimes f_{R_2}(r) \otimes \dots \otimes f_{R_M}(r), \quad (14)$$

em que  $\otimes$  denota convolução, é então possível utilizar (11) para representar tal FDP em termos de uma série, obtendo-se

$$f_R(r) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \dots \sum_{n_M=1}^{\infty} a_{1,n_1} r^{b_{1,n_1}} \otimes a_{2,n_2} r^{b_{2,n_2}} \otimes \dots \otimes a_{M,n_M} r^{b_{M,n_M}}. \quad (15)$$

O objetivo aqui é obter uma expressão assintótica para a FDP da soma exata em torno da origem. Em outras palavras, considerando-se a expansão em série de Maclaurin

$$f_R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{b_n} \quad (16)$$

para a soma e sabendo-se que seu comportamento assintótico em torno da origem é governado pelo termo de menor expoente, ou seja,

$$f_R(r) \simeq a_0 r^{b_0}, \quad (17)$$

então o nosso objetivo é obter uma expressão para  $a_0$  e  $b_0$ . Em (15), é possível mostrar que a convolução entre cada conjunto de termos  $a_{1,n_1} r^{b_{1,n_1}}, \dots, a_{M,n_M} r^{b_{M,n_M}}$  resulta num termo de mesmo formato, isto é,

$$a_{1,n_1} r^{b_{1,n_1}} \otimes \dots \otimes a_{M,n_M} r^{b_{M,n_M}} = a r^b, \quad (18)$$

em que os valores de  $a$  e  $b$  são obtidos como

$$a = \frac{\prod_{i=1}^M [a_{i,n_i} \Gamma(1 + b_{i,n_i})]}{\Gamma\left(M + \sum_{i=1}^M b_{i,n_i}\right)} \quad (19a)$$

$$b = (M - 1) + \sum_{i=1}^M b_{i,n_i}. \quad (19b)$$

Considerando que cada termo  $b_{i,n_i}$  é uma função de  $n_i$  monotonicamente crescente, o menor valor para o expoente

$b$  em (19b) ocorre para  $n_1 = n_2 = \dots = n_M = 0$ . Assim,  $a_0$  e  $b_0$  são finalmente obtidos como

$$a_0 = \frac{\prod_{i=1}^M [a_{i,0} \Gamma(1 + b_{i,0})]}{\Gamma\left(M + \sum_{i=1}^M b_{i,0}\right)} \quad (20a)$$

$$b_0 = (M - 1) + \sum_{i=1}^M b_{i,0}. \quad (20b)$$

### B. Soma de Envoltórias Nakagami- $m$

Neste trabalho, propõe-se aproximar a soma  $R$  de envoltórias Nakagami iad por uma envoltória Nakagami  $\tilde{R}$ , cuja FDP é dada por

$$f_{\tilde{R}}(r) = \frac{2\tilde{m}\tilde{r}^{2\tilde{m}-1}}{\Gamma(\tilde{m})\tilde{\Omega}^{\tilde{m}}} \exp\left(-\frac{\tilde{m}r^2}{\tilde{\Omega}}\right). \quad (21)$$

Assim, a questão passa a ser encontrar um bom ajuste para  $\tilde{\Omega}$  e  $\tilde{m}$  tal que (21) seja uma boa aproximação para a FDP exata de  $R$ . Uma abordagem comum na literatura é o método de casamento de momentos, ou seja, ajustar os parâmetros da distribuição aproximada de forma a igualar alguns de seus momentos àqueles da soma exata. Embora essa abordagem forneça bons resultados no corpo e na cauda direita da FDP, os resultados são menos satisfatórios na cauda esquerda, próximo à origem. Isso ficará evidente nos exemplos numéricos apresentados na próxima seção. Aqui, a fim de se contornar essa deficiência, propõe-se uma nova abordagem, denominada casamento de assíntotas. No método proposto, os parâmetros da distribuição aproximada são ajustados de forma a igualar a sua assíntota na origem

$$f_{\tilde{R}}(r) \simeq \tilde{a}_0 r^{\tilde{b}_0} \quad (22)$$

à da soma exata. É importante lembrar que a assíntota da FDP *na origem* enquanto função do nível de envoltória equivale à assíntota da FDP *no infinito* enquanto função da RSR média para um dado valor prefixado de envoltória. Além disso, vale mencionar que o comportamento assintótico de um sistema de comunicações em regime de alta RSR é um retrato crucial de sua eficiência energética, sendo pois uma métrica importante de desempenho. O intuito do método aqui proposto é proporcionar um melhor ajuste da aproximação sob regime de alta SNR.

Em vista do exposto, a estratégia é escolher  $\tilde{\Omega}$  e  $\tilde{m}$  tais que  $\tilde{a}_0 = a_0$  e  $\tilde{b}_0 = b_0$ . Trata-se de um sistema de duas equações e duas incógnitas. Com uso de  $n = 0$  em (12), segue que

$$\tilde{a}_0 = \frac{2\tilde{m}\tilde{r}^{\tilde{m}}}{\Gamma(\tilde{m})\tilde{\Omega}^{\tilde{m}}} \quad (23a)$$

$$\tilde{b}_0 = -1 + 2\tilde{m}. \quad (23b)$$

Quanto a  $a_0$  e  $b_0$ , estes são dados por (20), sendo os termos  $a_{i,0}$  e  $b_{i,0}$  calculados com  $n = 0$  em (12). Feitas as devidas

substituições, a solução do sistema é finalmente obtida como

$$\tilde{m} = \sum_{i=1}^M m_i \quad (24a)$$

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\frac{2\tilde{m}^{\tilde{m}}}{\Gamma(\tilde{m}) \left[ \frac{2^M}{\Gamma(2\sum_{j=1}^M m_j)} \prod_{i=1}^M \left( \frac{\binom{m_i}{\Omega_i}^{m_i} \Gamma(2m_i)}{\Gamma(m_i)} \right) \right]}}. \quad (24b)$$

### C. Soma de Envoltórias $\alpha$ - $\mu$

O desenvolvimento é similar para o cenário  $\alpha$ - $\mu$ . Nesse caso, propõe-se aproximar a soma  $R$  de envoltórias  $\alpha$ - $\mu$  iad por uma envoltória  $\alpha$ - $\mu$   $\tilde{R}$ , cuja FDP é dada por

$$f_{\tilde{R}}(r) = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}^{\tilde{\mu}} r^{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}-1}}{\Gamma(\tilde{\mu})\tilde{\Omega}^{\tilde{\mu}}} \exp\left(-\frac{\tilde{\mu}r^{\tilde{\alpha}}}{\tilde{\Omega}}\right). \quad (25)$$

Por outro lado, agora são três os parâmetros a serem ajustados:  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\mu}$ . Dessa forma, além de  $\tilde{a}_0 = a_0$  e  $\tilde{b}_0 = b_0$ , necessita-se de uma terceira equação de ajuste. Propõe-se aqui que tal equação seja dada pelo casamento do  $n$ ésimo momento da soma, ou seja,  $E[\tilde{R}^n] = E[R^n]$ . A princípio, o valor de  $n$  pode ser escolhido arbitrariamente. Entretanto, o papel da terceira equação é garantir um bom ajuste da aproximação na cauda direita da FDP, com a qual as duas outras equações (casamento assintótico) não mantêm qualquer compromisso. Além disso, verifica-se que a qualidade desse ajuste melhora à medida que  $n$  cresce. Em contrapartida, a partir de certo valor de  $n$ , o sistema resultante deixa de ter uma solução viável. Em outras palavras,  $n$  deve ser escolhido tão grande quanto possível, mas suficientemente pequeno para viabilizar uma solução para o sistema. Em suma, os valores de  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\mu}$  são obtidos como solução do seguinte sistema de equações:

$$\tilde{a}_0 = a_0 \quad (26a)$$

$$\tilde{b}_0 = b_0 \quad (26b)$$

$$E[\tilde{R}^n] = E[R^n]. \quad (26c)$$

É necessário explicitar cada um dos termos do sistema. Em sendo  $\tilde{R}$  uma variável  $\alpha$ - $\mu$ , com  $n = 0$  em (13) segue que

$$\tilde{a}_0 = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}^{\tilde{\mu}}}{\Gamma(\tilde{\mu})\tilde{\Omega}^{\tilde{\mu}}} \quad (27a)$$

$$\tilde{b}_0 = -1 + \tilde{\alpha}\tilde{\mu}. \quad (27b)$$

Além disso, com (13) em (20), obtêm-se, após algumas simplificações,

$$a_0 = \frac{1}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_i\right)} \prod_{i=1}^M \left[ \frac{\alpha_i \mu_i^{\mu_i} \Gamma(\alpha_i \mu_i)}{\Omega_i^{\mu_i} \Gamma(\mu_i)} \right] \quad (28a)$$

$$b_0 = -1 + \sum_{i=1}^M \alpha_i \mu_i. \quad (28b)$$

Finalmente, de (5), resulta que

$$E[\tilde{R}^n] = \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\tilde{\mu}}\right)^{\frac{n}{\tilde{\alpha}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\tilde{\alpha}} + \tilde{\mu}\right)}{\Gamma(\tilde{\mu})}, \quad (29)$$

e de [3, Eq. (6)] resulta que o  $n$ ésimo momento da soma exata pode ser obtido em termos dos momentos das envoltórias individuais como

$$E[R^n] = \sum_{n_1}^n \sum_{n_2}^n \cdots \sum_{n_{M-1}}^{n_{M-2}} \binom{n}{n_1} \binom{n_1}{n_2} \cdots \binom{n_{M-2}}{n_{M-1}} \times E[R_1^{n_1-n_2}] E[R_2^{n_2-n_3}] \cdots E[R_M^{n_{M-1}}], \quad (30)$$

em que cada  $E[R_i^n]$  é dado por (5).

O sistema de equações em (26) não admite solução analítica em forma fechada para  $\tilde{\Omega}$ ,  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\mu}$ , uma vez que contém equações transcendentais. Por outro lado, esse sistema pode ser resolvido facilmente por meio de rotinas numéricas disponíveis em pacotes computacionais como Matlab e Mathematica.

## V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção, as aproximações propostas são comparadas à solução exata obtida com uso de (6) via integração numérica. Além disso, são também incluídas na comparação as aproximações correspondentes ajustadas por casamento de momentos, a saber: a aproximação Nakagami- $m$  para somas de envoltórias Nakagami- $m$  em [3] e a aproximação  $\alpha$ - $\mu$  para somas de envoltórias  $\alpha$ - $\mu$  em [5]<sup>3</sup>. Em todos os exemplos, consideram-se envoltórias com potência média unitária.

As Figs. 1, 2 e 3 apresentam as FDPs exata e aproximadas para a soma Nakagami- $m$ , considerando duas envoltórias iid, três envoltórias iid e três envoltórias iad, respectivamente. Nos casos iid, utiliza-se  $m_i = 0.5, 1, 2$  e  $3$ ; no caso iad,  $(m_1, m_2, m_3) = (0.5, 2, 3.5)$  e  $(m_1, m_2, m_3) = (2, 5, 7)$ . As Figs. 4, 5 e 6 apresentam as curvas correspondentes para a soma  $\alpha$ - $\mu$ . Nos casos iid, utilizam-se  $\alpha_i = 5$  e  $\mu_i = 0.5, 1, 2$  e  $3$ ; no caso iad,  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (3, 4, 5, 0.5, 1, 1.5)$  e  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (5, 6, 5, 1, 3, 6.5)$ . O intuito aqui é retratar as aproximações sobre uma ampla gama de cenários, abrangendo diferentes condições de desvanecimento.

A partir das figuras, observa-se que na cauda esquerda da FDP, como esperado, as aproximações propostas seguem precisamente o comportamento da soma exata, não apenas no cenário iid mas também no cenário iad. Em contraste, as aproximações em [3] e [5] apresentam uma inclinação diferente da FDP exata, de modo que a discrepância entre elas se eleva rumo à origem. A situação se torna crítica no cenário iad, para o qual a discrepância é enorme. Por outro lado, na cauda direita da FDP, as aproximações propostas têm desempenho menos satisfatório, particularmente para o cenário iad. No cenário iid, entretanto, o desempenho é comparável ao das aproximações em [3] e [5].

## VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, são propostas aproximações para a função densidade de probabilidade de somas de variáveis Nakagami e  $\alpha$ - $\mu$  independentes e arbitrariamente distribuídas. As aproximações propostas são extremamente precisas na região assintótica para alta relação sinal-ruído, sendo muito superiores nessa região às aproximações disponíveis na literatura.

<sup>3</sup>Embora as aproximações em [3] e [5] tenham sido originalmente propostas para somas de variáveis iid, não há qualquer restrição matemática à sua aplicação para somas de variáveis iad.

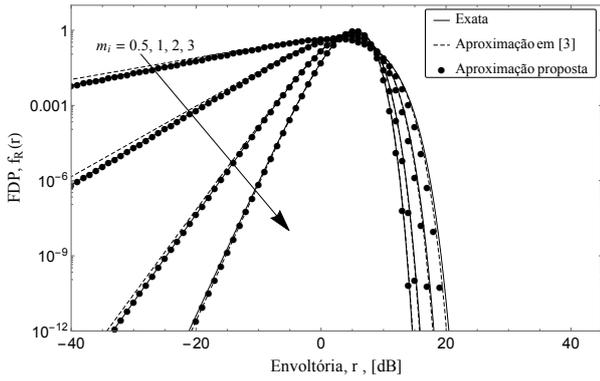


Fig. 1. FDP da soma de duas variáveis aleatórias Nakagami- $m$  iid.

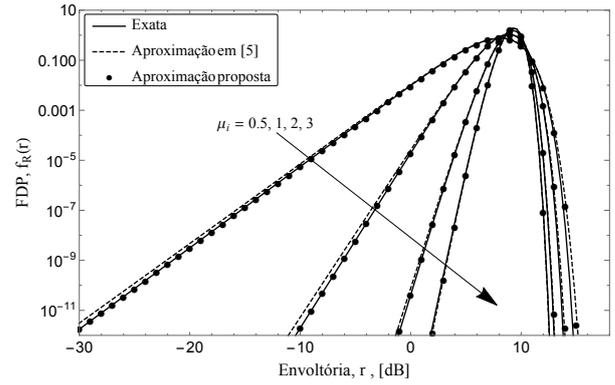


Fig. 5. FDP da soma de três variáveis aleatórias  $\alpha$ - $\mu$  iid.

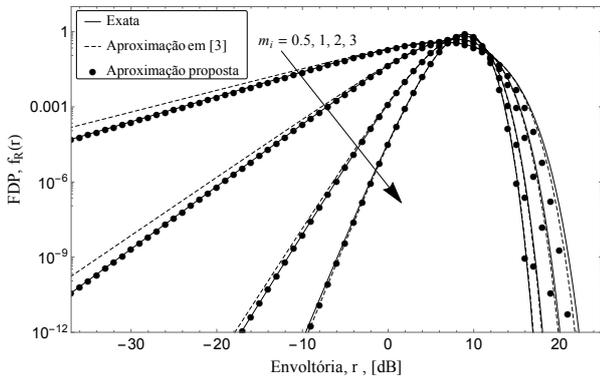


Fig. 2. FDP da soma de três variáveis aleatórias Nakagami- $m$  iid.

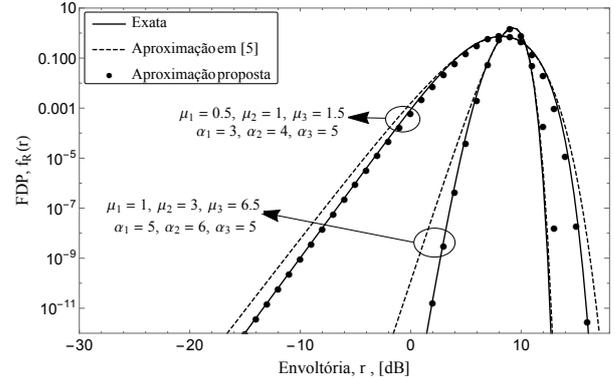


Fig. 6. FDP da soma de três variáveis aleatórias  $\alpha$ - $\mu$  iid.

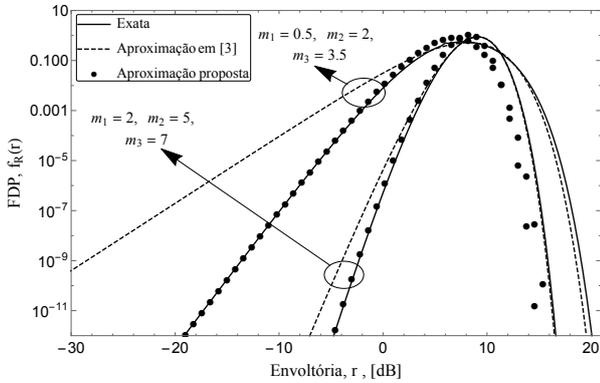


Fig. 3. FDP da soma de três variáveis aleatórias Nakagami- $m$  iid.

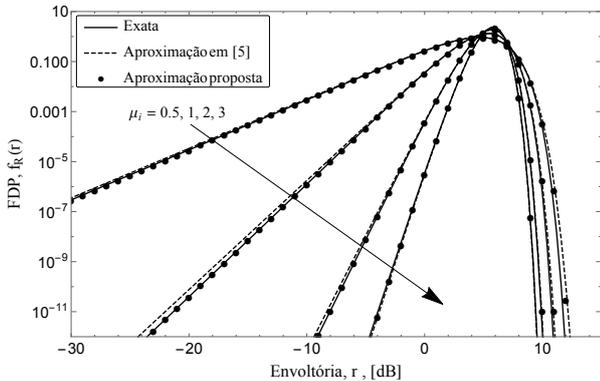


Fig. 4. FDP da soma de duas variáveis aleatórias  $\alpha$ - $\mu$  iid.

### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro.

### REFERÊNCIAS

- [1] M. Nakagami, "The  $m$ -distribution - a general formula of intensity distribution of rapid fading," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman, Ed. Oxford, England: Pergamon, 1960.
- [2] J. Reig, L. Rubio, and N. Cardona, "Bivariate Nakagami- $m$  distribution with arbitrary fading parameters," *Electron. Lett.*, vol. 38, no. 25, pp. 1715–1717, Dec. 2002.
- [3] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, "Nakagami- $m$  approximation to the sum of  $M$  non-identical independent Nakagami- $m$  variates," *Electron. Lett.*, vol. 40, no. 15, pp. 951–952, Jul. 2004.
- [4] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, "An improved closed-form approximation to the sum of arbitrary Nakagami- $m$  variates," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 6, pp. 3854–3858, Nov. 2008.
- [5] —, "Highly accurate closed-form approximations to the sum of  $\alpha$ - $\mu$  variates and applications," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 9, pp. 3301–3306, Sep. 2008.
- [6] M. D. Yacoub, "The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: a physical fading model for the Stacy distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, Jan. 2007.
- [7] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
- [8] D. G. Brennan, "Linear diversity combining techniques," vol. 47, pp. 1075–1102, Jun. 1959.
- [9] M. Rahman and H. Harada, "New exact closed-form PDF of the sum of Nakagami- $m$  random variables with applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 2, pp. 395–401, Feb. 2011.