Modelo Complexo α-μ Bivariável com Correlações Cruzadas

Thiago A. M. de Bairros, Alessandro P. de Oliveira, Rausley A. A. de Souza e Michel D. Yacoub

***Resumo*— Um modelo de desvanecimento para o processo α-μ bivariável complexo é proposto. Neste modelo, um parâmetro de deslocamento de fase é introduzido para contemplar as correlações cruzadas entre as componentes em fase e em quadratura. Uma expressão exata para a função densidade de probabilidade conjunta envolvendo duas envoltórias e duas fases é então obtida. Da mesma forma, são desenvolvidas funções densidade de probabilidade conjunta das componentes em fase e em quadratura. O modelo proposto pode ser usado para análise de sistemas de comunicações sem fio em que correlações de envoltórias e fases possam interferir no seu desempenho.**

***Palavras-Chave*— Distribuição α-μ, distribuição conjunta de envoltória-fase bivariável, deslocamento de fase.**

***Abstract*— A fading model for the bivariate α-μ complex processs is proposed. In this model, a phase shift parameter is introduced that takes into account the cross-correlations between the in-phase and quadrature components. An exact expression for the joint probability density function involving two envelopes and two phases is then obtained. Likewise, joint probability density functions of the in-phase and quadrature components are developed. The proposed model can be used for the analysis of wireless systems in which envelope and phase correlations may affect the system performance.**

***Keywords*— α-μ distribution, bivariate phase-envelope joint distribution, phase shifting.**

I. Introdução

Um sinal de rádio trafegando por um canal de comunicação sem fio pode sofrer desvanecimento, de forma a ter sua amplitude e fase alteradas aleatoriamente. Assim, atributos como ganho e fase tornam-se importantes na tarefa de caracterização de tais canais. Devido ao grande número de fatores (i.e atenuação, atraso de propagação e deslocamento de fase) que distorcem o sinal ao se propagar pelo canal, esses parâmetros são tratados de forma estocástica. No caso das comunicações sem fio, o ganho do canal com multipercursos pode ser modelado por distribuições bem estabelecidas, como Rayleigh, Hoyt e Rice. Nakagami-m surgiu empiricamente com medidas de campo e possui um tratamento matemático razoavelmente simples. Esse modelo aproxima Hoyt e Rice e tem Rayleigh como caso particular. Nakagami-m, assim, se popularizou de forma extraordinária tendo tido ampla aceitação pela comunidade científica. Por outro lado, algumas estatísticas aplicadas à análise de desempenho dos sistemas de comunicação sem fio baseadas no ganho e na fase do canal foram obtidas utilizando as distribuições Rayleigh, Hoyt e Rice, mas não Nakagami-m. Isso foi devido ao fato de ela ter sido obtida empiricamente a partir da envoltória, não se considerando informações relativas à fase do sinal desvanecido. Esse fato gerou uma variedade de possibilidades a serem exploradas, objetivando caracterizar, de forma completa, o processo Nakagami-m.

Thiago A. M. de Bairros e Rausley A. A. de Souza, Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Santa Rita do Sapucaí-MG, Brasil, E-mails: thiagob@mtel.inatel.br, rausley@inatel.br. Alessandro P. de Oliveira e Michel D. Yacoub¸ Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas-SP-Brasil, E-mails: [ale,michel]@decom.fee.unicamp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq (contratos: 141489/2018-9, 308365/2017-8 e 304248/2014-2), pela Capes e pela RNP, com recursos do MCTIC, processo No 01250.075413/2018-04, sob o projeto Centro de Referência em Radiocomunicações (CRR) do Instituto Nacional de Telecomunicações – Inatel, Brasil.

Na caracterização a partir da envoltória, estatísticas tais como taxa de cruzamento de nível, tempo médio de desvanecimento e a derivada da envoltória do processo foram obtidas por meio de um modelo físico proposto para Nakagami-m. Novos modelos de canais foram propostos em termos de suas estatísticas de primeira ordem, a saber: α-μ [1], κ-μ [2] e η-μ [3], tendo a distribuição Nakagami-m como caso particular. Posteriormente, estatísticas de ordem superior foram deduzidas. Da mesma forma, investigações relacionadas à caracterização do ganho do canal, como por exemplo, correlação, tempo de coerência e distância de coerência também foram feitas [4], [5]. Nenhuma informação de fase pôde ser obtida a partir do modelo original Nakagami-m e, portanto, por muito tempo, as estatísticas de fase foram consideradas como uniformemente distribuídas. Admitindo-se o desbalanceamento de potência entre as componentes em fase e em quadratura, um modelo de fase foi apresentado para Nakagami-m em [6], em que apenas para a condição $m = 1$ (Rayleigh) a fase é uniforme. Outros modelos de fase surgiram para as distribuições α-μ [1], η-μ [3] e κ-μ [2], sendo que em seguida foram validados em situações práticas [7], [8]. O modelo de fase proposto [6] foi utilizado em diversos estudos de desempenho de sistemas OFDM [1] e capacidade de canais MIMO [9]. Esse modelo foi aprofundado com a obtenção de expressões para a função de distribuição cumulativa de fase e de sua inversa [8] e no desenvolvimento de simuladores [10]. A partir da função densidade de probabilidade (FDP) da diferença de fase foram obtidas para Nakagami-m expressões para a probabilidade de erro de bit sobre a modulação BPSK [11], para a probabilidade de erro de símbolo para as modulações M-DPSK [12], [13] e M-PSK [14].

Em [15] foi apresentada a distribuição conjunta envoltória-fase para dois sinais complexos Nakagami-m correlacionados. Foram apresentadas, também, as FDPs das componentes em fase e quadratura. Um modelo complexo α-μ bivariável com desbalanceamento de potência foi apresentado em [16], tendo o modelo apresentado em [15] como caso particular. Os modelos em [15] e [16] consideram que as componentes fase-fase e quadratura-quadratura são correlacionadas, porém não há nenhuma correlação cruzada entre as componentes fase-quadratura ou quadratura-fase. A motivação para se considerarem as correlações cruzadas fase-quadratura é para, no mínimo, manter-se a compatibilidade com um de seus casos particulares, qual seja Rayleigh. Mais do que isso, no entanto, a motivação maior é contemplar-se o fenômeno físico implícito nessa correlação, qual seja o efeito do *delay spread* na propagação do sinal.

A proposta deste artigo é apresentar um modelo complexo α-μ bivariável em que além de considerar a correlação entre as componentes fase-fase e quadratura-quadratura também contemple as correlações cruzadas, fase-quadratura e quadratura-fase. São apresentadas tanto a FDP conjunta de envoltória-fase, como também as FDPs das componentes em fase e em quadratura.

II. Preliminares

Sejam W_1 e W_2 variáveis aleatórias complexas α-μ dadas por

$$\begin{aligned} W_1 &= X_1 + jY_1 = R_1 e^{j\Theta_1} \\ W_2 &= X_2 + jY_2 = R_2 e^{j\Theta_2} \end{aligned} \tag{1}$$

As variáveis X_1 e X_2 são as componentes em fase e Y_1 e Y_2 são as componentes em quadratura dos processos W_1 e W_2 com parâmetros (α_1, μ, $\hat{r}_1$) e (α_2, μ, $\hat{r}_2$), respectivamente. $R_1 = |W_1|^{\frac{\alpha_1}{2}}$ e $R_2 = |W_2|^{\frac{\alpha_2}{2}}$ correspondem às envoltórias e Θ_1 e Θ_2 representam as fases do modelo α-μ. Os parâmetros α_1 e α_2 modelam a não linearidade do canal de propagação, μ, o número de *clusters* de multipercursos, $\hat{r}_1^{\alpha_1} = \mathbb{E}\left[R_1^{\alpha_1}\right]$ e $\hat{r}_2^{\alpha_2} = \mathbb{E}\left[R_2^{\alpha_2}\right]$, sendo $\mathbb{E}[\cdot]$ o operador esperança matemática.

Sabe-se que as FDPs[1] das componentes em fase e em quadratura, para o modelo α-μ são obtidas como [16]

$$f(z) = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{|z|^{\mu-1}}{\Gamma\left(\mu/2\right)} \exp\left(-\frac{\mu z^2}{\hat{r}^\alpha}\right), -\infty < z < \infty, \tag{2}$$

com $Z = X_1$ ou $Z = X_2$ e $Z = Y_1$ ou $Z = Y_2$.

A componente em fase (X_1 ou X_2) e a componente em quadratura (Y_1 ou Y_2) são variáveis aleatórias independentes, resultando em uma FDP conjunta obtida pelo produto de suas respectivas FDPs marginais, ou seja

$$f(x,y) = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\mu} \frac{|xy|^{\mu-1}}{\Gamma\left(\mu/2\right)^2} \exp\left(-\frac{\mu(x^2+y^2)}{\hat{r}^\alpha}\right), \tag{3}$$

com $-\infty < X, Y < \infty$ e seus respectivos índices.

Por meio da transformação de variáveis $X = R^{\frac{\alpha}{2}} \cos\Theta$, $Y = R^{\frac{\alpha}{2}} \operatorname{sen}\Theta$ e $f(r,\theta) = |J| f(x,y)$, sendo J o Jacobiano da transformação, a FDP conjunta envoltória-fase é obtida como

$$f(r,\theta) = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\mu} \frac{\alpha r^{\alpha\mu-1} |\operatorname{sen}\theta\cos\theta|^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu/2)^2 \exp\left(\mu\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\alpha\right)}, \tag{4}$$

com $r > 0$ e $-\pi \leq \theta < \pi$ e seus respectivos índices.

As FDPs marginais da envoltória e fase são obtidas por meio de procedimento padrão, ou seja

$$f(r) = \int_0^{2\pi} f(r,\theta) d\theta = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\mu} \frac{\alpha r^{\alpha\mu-1}}{\Gamma(\mu) \exp\left(\mu\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\alpha\right)}, \tag{5}$$

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} f(r,\theta) dr = \frac{\Gamma(\mu) |\operatorname{sen}(2\theta)|^{\mu-1}}{2^\mu \Gamma\left(\mu/2\right)^2}. \tag{6}$$

Para o caso mais simples, já conhecido na literatura [16], admite-se a existência de correlação entre as componentes em fase X_1 e X_2, assim como uma correlação entre as componentes em quadratura Y_1 e Y_2. Em [16], obteve-se uma FDP conjunta das componentes em fase $f(x_1, x_2)$ para $Z = X$, e em quadratura, $f(y_1, y_2)$ para $Z = Y$, para o modelo α-μ, dada por

$$\begin{aligned} f(z_1,z_2) &= \frac{|z_1 z_2|^{\frac{\mu}{2}} \mu^{\frac{\mu}{2}+1} \lambda^{\left(1-\frac{\mu}{2}\right)} (\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu/2)} \\ &\times \exp\left(\frac{-\mu(z_2^2 \hat{r}_1^{\alpha_1} + z_1^2 \hat{r}_2^{\alpha_2}) + 2\mu\lambda \hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (z_1 z_2)}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\ &\times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu|z_1 z_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu|z_1 z_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1-\lambda^2)}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

com $-\infty < z_1, z_2 < \infty$ e $\mathrm{I}_v(.)$ denotando a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem arbitrária v. O parâmetro $0 \leq \lambda^2 \leq 1$, neste cenário de correlação cruzada nula, é o coeficiente de correlação de potência entre as componentes em fase do modelo complexo α-μ, que é igual ao coeficiente de correlação de potência entre as componentes em quadratura do modelo complexo α-μ.

Admitindo inicialmente que as componentes em fase (X_1, X_2) e em quadratura (Y_1, Y_2) são conjuntamente independentes, a densidade conjunta fase-quadratura bivariável pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & f(x_1,y_1,x_2,y_2) = f(x_1,x_2) f(y_1,y_2) = \\ & \frac{|x_1 x_2 y_1 y_2|^{\frac{\mu}{2}} \mu^{\mu+2} \lambda^{2-\mu} (\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-\lambda^2)^2 \Gamma(\mu/2)^2} \\ & \times \exp\left(-\frac{\mu\left((x_2^2+y_2^2)\hat{r}_1^{\alpha_1} + (x_1^2+y_1^2)\hat{r}_2^{\alpha_2}\right)}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{-2\mu\lambda \hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\ & \times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu|x_1 x_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1-\lambda^2)}\right) \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu|y_1 y_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1-\lambda^2)}\right) \\ & \times \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu|x_1 x_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu|y_1 y_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1-\lambda^2)}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

As equações (7) e (8) correspondem às equações (18) e (19) de [16], porém para o caso com balanceamento de potência.

Note que a equação (8) só é válida para o caso em que as componentes cruzadas X_1 e Y_2, e também X_2 e Y_1, são descorrelacionadas. Ou seja, a componente em fase X_1 do processo α-μ complexo W_1 é descorrelacionada da componente em quadratura Y_2 do processo α-μ complexo W_2. De maneira semelhante, a componente em fase X_2 do processo α-μ complexo W_2 é descorrelacionada da componente em quadratura Y_1 do processo α-μ complexo W_1. O objetivo deste trabalho é resolver esta restrição ao propor um modelo bivariável complexo α-μ que considere também a correlação

[1] Por simplicidade na notação, o subscrito na identificação da função da densidade de probabilidade $f_X(x)$ será omitido, portanto $f_X(x) \triangleq f(x)$.

cruzada entre as componentes em fase e quadratura, assim como deduzir suas principais estatísticas.

III. Modelo Proposto

A. FDP Conjunta Envoltória-Fase Bivariável com Correlação Cruzada

Dadas duas variáveis aleatórias complexas, em se havendo correlação cruzada entre as componentes fase de uma e quadratura de outra e de quadratura de uma e fase de outra um deslocamento de fase em uma das variáveis complexas ocorre. Da mesma forma, em se havendo um deslocamento de fase em uma das variáveis em relação à outra, haverá correlação cruzada entre suas componentes fase e quadratura e quadratura e fase. Assim, partindo-se de (8), e seguindo [17, eq. 1.5-17], um parâmetro ϕ de deslocamento de fase sobre as variáveis aleatórias X_2 e Y_2 é inserido de tal maneira que $X_1 = R_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \cos\Theta_1, Y_1 = R_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \operatorname{sen}\Theta_1, X_2 = R_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cos(\Theta_2 - \phi), Y_2 = R_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \operatorname{sen}(\Theta_2 - \phi)$ e $|J| = \alpha_1\alpha_2 R_1^{\frac{\alpha_1}{2}-1} R_2^{\frac{\alpha_2}{2}-1}/4$. De fato, há uma relação direta entre o referido deslocamento de fase e os parâmetros de correlação fase-fase, quadratura-quadratura, fase-quadratura e quadratura-fase. Seguindo o mesmo procedimento descrito em [17, eq. 1.5-17], o parâmetro de deslocamento de fase ϕ é obtido como por $\phi = \arg[\tan(\lambda_2/\lambda_1)]$. A inserção do parâmetro ϕ é efetuada devido ao fato de essa informação de fase ser perdida durante a obtenção da FDP conjunta da envoltória Rayleigh [17, eq. 1.5-22]. Uma vez que o modelo Nakagami-m, base para o modelo α-μ, é derivado do modelo Rayleigh, esta informação de fase também deve fazer parte do modelo proposto. Neste novo cenário com correlação cruzada entre as componentes em fase e quadratura dos processos W_1 e W_2, originalmente ausente no modelo apresentado em [16], define-se $\lambda_1 = \mathbb{C}(X_1, X_2) = \mathbb{C}(Y_1, Y_2)$ e $\lambda_2 = \mathbb{C}(X_1, Y_2) = -\mathbb{C}(Y_1, X_2)$ [5], sendo $\mathbb{C}(\cdot)$ o operador covariância. O parâmetro λ_2, no modelo isotrópico, é dado por [5] $\lambda_2 = \Delta\omega\overline{T} J_0(\beta d)/(1 + (\Delta\omega\overline{T})^2)$ em que β é um constante de fase, d é a distância entre dois pontos de recepção, $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ é a diferença entre frequências angulares dos processos W_1 e W_2, $\overline{T}$ é o espalhamento de retardo (*delay spread*) e $J_n(\cdot)$ é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem n. Note que, para $\beta d = 0$, a correlação fase-quadratura e quadratura-fase será não nula sempre que $\Delta\omega\overline{T} \neq 0$, i.e. i) $\Delta\omega \neq 0$ (os processos W_1 e W_2 propagando-se com frequências ligeiramente diferentes, ou seja $\omega_1 \neq \omega_2$) e $\overline{T} > 0$ (banda de coerência finita) ou ii) $\Delta\omega \neq 0$ e $\overline{T} = 0$ (canal plano, ou de maneira semelhante, banda de coerência infinita). Portanto, é razoável, e necessário, admitir correlação cruzada fase-quadratura e quadratura fase dos processos W_1 e W_2 descritos em (1). A mesma argumentação aplica-se ao coeficiente λ_1 pois $\lambda_2 = \Delta\omega\overline{T}\lambda_1$. É possível expressar o coeficiente de correlação λ^2 em função de λ_1 e λ_2 tal que $\lambda^2 = 4\mu^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/(\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})$.

Após o processo de transformação de variáveis obtém-se (9), com $r_1, r_2 > 0$ e $-\pi \leqslant \theta_1, \theta_2 < \pi$. Notar que na suposição de correlação cruzada nula ($\lambda_2 = 0$), resulta em $\phi = 0$ e $\lambda^2 = 4\mu^2\lambda_1^2/(\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})$, a FDP conjunta envoltória-fase bivariável normalizada sem correlação cruzada dada em [16, eq. 20], para o caso balanceado de potência, é obtida a partir de (9).

A FDP conjunta de fase é obtida por meio de $f(\theta_1, \theta_2) = \int_0^\infty\int_0^\infty f(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) dr_1 dr_2$.

B. FDP Conjunta das Componentes em Fase e em Quadratura Bivariável com Correlação Cruzada

Para a obtenção da FDP conjunta das componentes em fase e em quadratura bivariável com correlação cruzada, utiliza-se em (9) o processo de transformação de variáveis $X_1 = R_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \cos\Theta_1, Y_1 = R_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \operatorname{sen}\Theta_1, X_2 = R_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cos\Theta_2$, $Y_2 = R_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \operatorname{sen}\Theta_2$ e $|J| = \alpha_1\alpha_2 R_1^{\frac{\alpha_1}{2}-1} R_2^{\frac{\alpha_2}{2}-1}/4$. Ainda, utilizando propriedades trigonométricas conhecidas, obtém-se (10). Para o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ e $\mu = 1$, (10) reduz-se à FDP conjunta Gaussiana complexa bivariável correlacionada, que de fato corresponde à distribuição conjunta bivariável correlacionada Rayleigh na envoltória e uniforme na fase [17, eq. 1.5-16].

C. FDP Conjunta das Componentes em Fase ou em Quadratura ou Fase-Quadratura Correlacionadas

A partir da FDP conjunta das componentes em fase e em quadratura bivariável dada em (10), é possível obter as FDPs conjuntas das componentes em fase ou em quadratura ou fase-quadratura correlacionadas. Para $\lambda_1 = 0$, $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_2) \times f(x_2, y_1)$ e para $\lambda_2 = 0$, $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, x_2) \times f(y_1, y_2)$. Substituindo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}/(2\mu)$ em (10) e repetindo o procedimento para $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}/(2\mu)$ são obtidas as seguintes FDPs

$$
\begin{aligned}
f(x_1, y_2) &= \frac{|x_1 y_2|^{\frac{\mu}{2}} \mu^{\frac{\mu}{2}+1} \lambda^{1-\frac{\mu}{2}} (\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu/2)} \\
&\times \exp\left(-\frac{\mu\left(y_2^2\hat{r}_1^{\alpha_1} + x_1^2\hat{r}_2^{\alpha_2}\right) - 2\mu\lambda\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} x_1 y_2}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\
&\times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu|x_1 y_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu|x_1 y_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right)
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_2, y_1) &= \frac{|y_1 x_2|^{\frac{\mu}{2}} \mu^{\frac{\mu}{2}+1} \lambda^{1-\frac{\mu}{2}} (\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu/2)} \\
&\times \exp\left(-\frac{\mu\left(x_2^2\hat{r}_1^{\alpha_1} + y_1^2\hat{r}_2^{\alpha_2}\right) + 2\mu\lambda\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} y_1 x_2}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\
&\times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu|y_1 x_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu|y_1 x_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \frac{|x_1 x_2|^{\frac{\mu}{2}} \mu^{\frac{\mu}{2}+1} \lambda^{1-\frac{\mu}{2}} (\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu/2)} \\
&\times \exp\left(-\frac{\mu\left(x_2^2\hat{r}_1^{\alpha_1} + x_1^2\hat{r}_2^{\alpha_2}\right) - 2\mu\lambda\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} x_1 x_2}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\
&\times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu|x_1 x_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu|x_1 x_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right)
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
f(r_1,\theta_1,r_2,\theta_2) = {} & \frac{\alpha_1\alpha_2 \hat{r}_1^{-\frac{\alpha_1}{2}(2+\mu)} \hat{r}_2^{-\frac{\alpha_2}{2}(2+\mu)} r_1^{\frac{\alpha_1}{2}(2+\mu)-1} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}(2+\mu)-1} \mu^{\mu+2}\lambda^{2-\mu}}{4(1-\lambda^2)^2\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 |\operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}(\theta_2-\phi)\cos\theta_1\cos(\theta_2-\phi)|^{-\frac{\mu}{2}}} \exp\left(-\frac{\mu\left(r_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}+r_2^{\alpha_2}\hat{r}_1^{\alpha_1}\right)}{\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}(1-\lambda^2)}\right) \\
& \times \exp\left(-\frac{-2\mu(r_1\hat{r}_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}(r_2\hat{r}_2)^{\frac{\alpha_2}{2}}\lambda\cos(\theta_1-\theta_2+\phi)}{\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}(1-\lambda^2)}\right) \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\lambda|\cos\theta_1\cos(\theta_2-\phi)|}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right) \\
& \times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\lambda|\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}(\theta_2-\phi)|}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\lambda|\cos\theta_1\cos(\theta_2-\phi)|}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu r_1^{\frac{\alpha_1}{2}} r_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\lambda|\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}(\theta_2-\phi)|}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1,y_1,x_2,y_2) = {} & \frac{2^\mu|x_1y_1|^{\frac{\mu}{2}}\left(\lambda^2\right)^{(1-\mu)}\mu^{2\mu+2}}{(1-\lambda^2)^2\Gamma(\mu/2)^2|(\lambda_1y_2-\lambda_2x_2)(\lambda_1x_2+\lambda_2y_2)|^{-\frac{\mu}{2}}(\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})^{(1+\mu)}} \\
& \times \exp\left(\frac{4\mu^2\left(\lambda_1(x_1x_2+y_1y_2)+\lambda_2(x_1y_2-x_2y_1)\right)-\mu\left((x_2^2+y_2^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}+(x_1^2+y_1^2)\hat{r}_2^{\alpha_2}\right)}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{4\mu^2|x_1(\lambda_1x_2+\lambda_2y_2)|}{\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}(1-\lambda^2)}\right) \\
& \times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{4\mu^2|y_1(\lambda_1y_2-\lambda_2x_2)|}{\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{4\mu^2|x_1(\lambda_1x_2+\lambda_2y_2)|}{\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{4\mu^2|y_1(\lambda_1y_2-\lambda_2x_2)|}{\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}(1-\lambda^2)}\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
f(y_1,y_2) = {} & \frac{|y_1y_2|^{\frac{\mu}{2}}\mu^{\frac{\mu}{2}+1}\lambda^{1-\frac{\mu}{2}}(\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}}{(1-\lambda^2)\Gamma(\mu/2)} \\
& \times \exp\left(-\frac{\mu\left(y_2^2\hat{r}_1^{\alpha_1}+y_1^2\hat{r}_2^{\alpha_2}\right)-2\mu\lambda\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}y_1y_2}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1}\hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\
& \times \mathrm{I}_{\frac{\mu}{2}-1}\left(\frac{2\mu|y_1y_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right)\operatorname{sech}\left(\frac{2\mu|y_1y_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Observe que (13) e (14) são equivalentes à equação do modelo sem correlação cruzada dada em (7). A Equação (11) também possui comportamento equivalente ao de (13) e (14). Porém, (12) difere de (11), (13) e (14), devido ao fato de que a covariância entre X_1 e Y_2 vale λ_2, já a covariância entre X_2 e Y_1 vale $-\lambda_2$.

IV. Resultados Numéricos

A Figura 1 apresenta alguns resultados da FDP conjunta de fase, para diferentes valores de μ, λ e ϕ com $\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = 1$. O parâmetro α está relacionado diretamente ao comportamento da envoltória do sinal desvanecido, ou seja, não possui influência nenhuma sobre o comportamento da fase. Para $\mu = 1$, observa-se na Figura 1(a) que a FDP conjunta de fase possui altura $1/(4\pi^2)$, como esperado, e o formato de um paralelepípedo de lados 2π, pois as variáveis aleatórias Θ_1 e Θ_2 são descorrelacionadas, ou seja $\lambda \to 0$ ($\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \to 0$) e $\phi \to 0$. Entretanto, à medida em que a correlação aumenta, conforme a Figura 1(b) no cenário $\lambda = 0.5$ ($\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0.25$) e $\phi = 0$, ocorre um aumento de seus valores ao longo da diagonal do plano $\theta_1\theta_2$. Esses dois casos são conhecidos na literatura [17, eq. 1.5-28] e são apresentados aqui para comparação com aqueles em que $\mu \neq 1$.

Para $\mu > 1$, a presença de *clusters* de multipercurso é perceptível pela segmentação planar da distribuição das variáveis. Para $\mu = 2$, $\lambda \to 0$ ($\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 \to 0$) e $\phi \to 0$, na Figura 1(c), há 16 picos simétricos de lados $\pi/2$. Com o aumento do parâmetro μ, ocorre um aumento na altura dos picos e uma diminuição da área da base como pode ser visto na Figura 1(d) para $\mu = 4.5$, tendendo a um impulso quando $\mu \to \infty$.

Para $0 < \lambda < 1$, à medida que o valor da correlação cresce, os picos tendem a desaparecer ao longo de algumas regiões do plano, concentrando-se apenas ao longo da diagonal do plano $\theta_1\theta_2$, como pode ser visto na Figura 1(e) no cenário $\lambda = 0.5$ ($\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0.125$) e $\phi \to 0$ e $\mu = 2$. Este fenômeno é similar para $-1 < \lambda < 0$, porém há uma mudança no posicionamento dos picos ao longo do plano (deslocamento de fase), conforme é mostrado na Figura 1(f), no cenário $\lambda = -0.5$ ($\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 0.125$) e $\phi \to 0$ e $\mu = 2$.

A Figura 1(g), no cenário $\lambda = 0.5$ ($\lambda_2 = 0.125$, $\lambda_1 \to 0$), $\phi = \pi/2$ e $\mu = 2$, a Figura 1(h), no cenário $\lambda = 0.5$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1/(8\sqrt{2})$), $\phi = \pi/4$ e $\mu = 2$, e a Figura 1(i) $\phi = 3\pi/4$ e $\mu = 2$, ilustram o comportamento da FDP conjunta para valores de $\phi \neq 0$. Observa-se que ocorre uma mudança no posicionamento dos picos ao longo do plano $\theta_1\theta_2$ devido à variação do parâmetro ϕ. Para o caso em que $\phi = \pi$ e $\lambda > 0$, o resultado da FDP é equivalente ao de $\lambda < 0$ e $\phi = 0$ (Figura 1(f)). Em outras palavras, podemos concluir que o parâmetro ϕ também é um parâmetro de correlação de fase. A Figura 1(h), no cenário $\lambda = 0.5$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1/(8\sqrt{2})$), $\phi = \pi/4$ e $\mu = 2$, e a Figura 1(i) ($\lambda_1 = -\lambda_2 = -1/(8\sqrt{2})$, $\phi = 3\pi/4$ e $\mu = 2$, ilustram dois casos em que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. A mudança de posicionamento de picos ao longo do plano $\theta_1\theta_2$ também pode ser observada.

V. Conclusões

Esse artigo apresentou um modelo complexo α-μ, de dois processos correlacionados, sobre condição balanceada de potência, contemplando, também, as correlações cruzadas. A inclusão do parâmetro ϕ de deslocamento de fase permite uma modelagem mais ampla do processo α-μ. Os resultados apresentados nesse artigo, preliminares mas inéditos, abrem novos horizontes de pesquisa sobre o comportamento das envoltórias e fases correlatas. Questões sobre a influência da

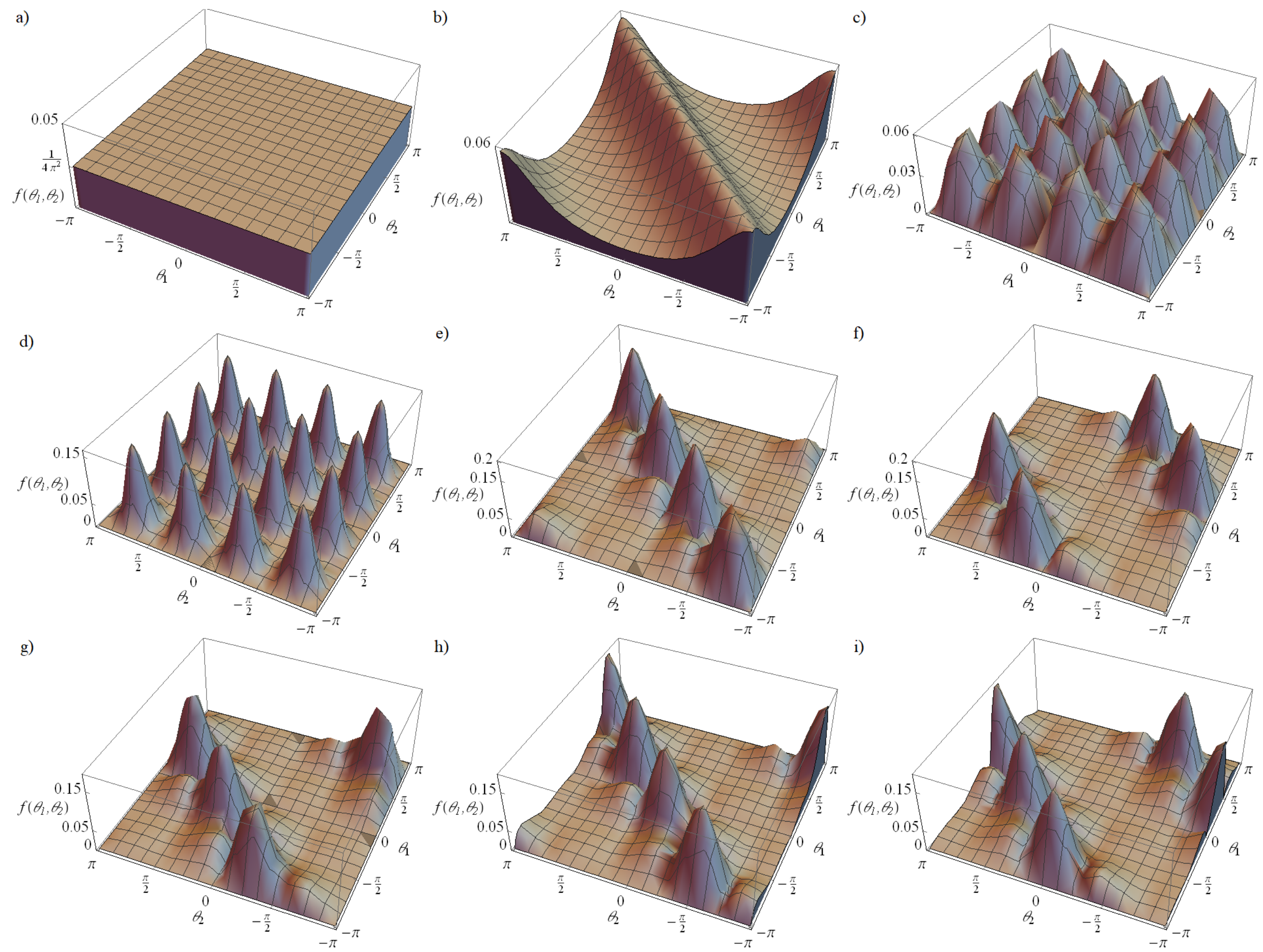

Fig. 1. FDP conjunta de fase para (a) $\mu = 1$, $\lambda \to 0$, $\phi = 0$, (b) $\mu = 1$, $\lambda = 0.5$, $\phi = 0$, (c) $\mu = 2$, $\lambda \to 0$, $\phi = 0$, (d) $\mu = 4.5$, $\lambda \to 0$, $\phi = 0$, (e) $\mu = 2$, $\lambda = 0.5$, $\phi = 0$ rad, (f) $\mu = 2$, $\lambda = -0.5$, $\phi = 0$, (g) $\mu = 2$, $\lambda = 0.5$, $\phi = \pi/2$, (h) $\mu = 2$, $\lambda = 0.5$, $\phi = \pi/4$ e (i) $\mu = 2$, $\lambda = 0.5$, $\phi = 3\pi/4$.

fase no desempenho de sistemas de modulação, na banda de coerência, no tempo de coerência e na distância de coerência poderão ser investigadas em trabalhos futuros.

Referências

[1] W. H. M. Freitas, R. C. D. V. Bomfin, R. A. A. de Souza, and M. D. Yacoub, "The complex α-μ fading channel with OFDM application," *International Journal of Antennas and Propagation*, vol. 2017, no. Article ID 2143541, p. 7 pages, Aug. 2017.

[2] U. S. Dias and M. D. Yacoub, "The κ-μ phase-envelope joint distribution," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 1, pp. 40–45, Jan. 2010.

[3] D. B. da Costa and M. D. Yacoub, "The η-μ joint phase-envelope distribution," *IEEE Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 6, pp. 195–198, Apr. 2007.

[4] S. Cotton and W. Scanlon, "Higher-order statistics for κ-μ distribution," *Electron. Lett.*, vol. 43, no. 22, pp. 1215–1217, Oct. 2007.

[5] J. R. Mendes, M. D. Yacoub, and U. S. Dias, "Power correlation coefficient of a very general fading model in maximal ratio combining," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 9, pp. 2472–2479, 2010.

[6] M. D. Yacoub, "Nakagami-m phase-envelope joint distribution: A new model," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.

[7] C. L. Selvati and U. S. Dias, "On the fading parameters characterization of the κ-μ distribution: Measurements and statistics," in *IEEE Latin-American Conf. on Commun. (LATINCOM)*, Oct. 2011, pp. 1–5.

[8] I. B. G. Porto, M. D. Yacoub, J. Santos Filho, S. L. Cotton, and W. G. Scanlon, "Nakagami-m phase model: Further results and validation," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 2, no. 5, pp. 523–526, Oct. 2013.

[9] T. R. C. Zhong, S. Jin and K. k. Wong, "On the capacity of non-uniform phase MIMO Nakagami-m fading channels," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 14, no. 6, pp. 536–538, Jun. 2010.

[10] Y. Ma and D. Zhang, "A method for simulating complex Nakagami fading time series with nonuniform phase and prescribed autocorrelation characteristics," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 1, pp. 29–35, Jan. 2010.

[11] C. M. Lo and W. H. Lam, "Error probability of binary phase shift keying in Nakagami-m fading channel with phase noise," *Electron. Lett.*, vol. 36, no. 21, pp. 1773–1774, Oct. 2000.

[12] C. C. Chai, "Distribution of phase difference between two Rice- or Nakagami-Lognormal processes perturbed by Gaussian noise," in *Gateway to 21st Century Communications Village. VTC 1999-Fall. IEEE VTS 50th Vehicular Technology Conf.*, vol. 1, 1999, pp. 82–86 vol.1.

[13] C. Fedele, L. Izzo, and M. Tanda, "Distribution of phase difference between two Nakagami faded signals perturbed by Gaussian noise," *Electron. Lett.*, vol. 31, no. 7, pp. 526–527, Mar. 1995.

[14] C. Polprasert and J. A. Ritcey, "A Nakagami fading phase difference distribution and its impact on BER performance," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 7, pp. 2805–2813, Jul. 2008.

[15] T. A. M. Bairros and M. D. Yacoub, "Distribuição conjunta fase-envoltória Nakagami-m bivariável," in *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2015)*, Set. 2015.

[16] A. P. Oliveira, T. A. M. Bairros, and M. D. Yacoub, "Modelo complexo α-μ bivariável com desbalanceamento de potência," in *Anais do XXXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2018)*, Set. 2018.

[17] W. C. Jakes and D. C. Cox, Eds., *Microwave Mobile Communications*. Wiley-IEEE Press, 1994.