

# Modelo estocástico para roteamento de fluxos em redes sem fio restrito ao comprimento dos caminhos

Kátia C. C. Fernandes\*, Phelipe A. de Souza†, Leizer de L. Pinto†, Kleber V. Cardoso†

**Resumo**—Em redes sem fio, a qualidade do canal tende a flutuar regularmente e essa incerteza não é capturada em otimização determinística. Recomputar rotas sempre que a condição do canal se altera é computacionalmente caro e gera instabilidade de rotas que é inadequada para muitas aplicações. Este trabalho apresenta um novo modelo de otimização estocástica de dois estágios, minimizando o gargalo da rede e tendo como restrição “suave” o comprimento total dos caminhos de todos os fluxos. Ilustramos como flutuações em poucos enlaces degradam a solução de uma abordagem determinística, enquanto a estocástica é preparada para lidar com essa incerteza.

**Palavras-chave**—Modelo estocástico de dois estágios, roteamento de fluxos em redes sem fio, gargalo, comprimento dos caminhos.

**Abstract**—In wireless networks, channel quality tends to fluctuate regularly and this uncertainty is not captured in deterministic optimization. Recomputing routes whenever the channel condition changes it is computationally expensive and generates route instability that is unsuitable for many applications. This paper presents a new two-stage stochastic optimization model, minimizing the network bottleneck and having a “soft” constraint the total path length of all streams. We illustrate how fluctuations in few links degrade the solution from a deterministic approach, while stochastic is prepared to deal with this uncertainty.

**Keywords**—Two-stage stochastic model, flow routing in wireless networks, bottleneck, length of paths.

## I. INTRODUÇÃO

Redes sem fio de múltiplos saltos são investigadas há bastante tempo pela comunidade científica [1]. No entanto, recentemente, esse tipo de tecnologia tem se popularizado, por exemplo, através de redes em malha sem fio usadas em empresas e domicílios, redes de sensores sem fio e redes veiculares usadas em cidades inteligentes [2], [3]. Nesse tipo de rede, o roteamento é essencial para garantir uma utilização eficiente dos recursos da rede, e.g., capacidade de processamento, comunicação e energia dos dispositivos.

Dadas as características da comunicação sem fio, em redes de múltiplos saltos, as qualidades dos enlaces tendem a flutuar regularmente, de maneira significativa e em curtas escalas de tempo. Portanto, soluções de roteamento precisam considerar essas flutuações, caso contrário, podem encaminhar os fluxos por enlaces que degradam seu desempenho. Isso tem motivado a preferência por abordagens heurísticas [4], [5], dada a dificuldade de capturar a incerteza gerada pelas flutuações na qualidade dos enlaces em modelos de otimização, especialmente

os clássicos modelos determinísticos. Em geral, alternativas como recomputação regular de rotas ótimas e análise de sensibilidade de modelos de otimização também apresentam limitações severas. Por exemplo, a simples recomputação de rotas ótimas pode levar a instabilidade do roteamento [6] e, dependendo do tamanho da rede, pode se tornar computacionalmente inviável. A análise de sensibilidade tem pouca utilidade nesse contexto, conforme ilustraremos na Seção II-A.

Redes sem fio de múltiplos saltos também costumam apresentar topologia em malha, i.e., uma quantidade significativa dos nós da rede possui mais de um vizinho. Essa característica, combinada com a incerteza sobre a qualidade dos enlaces, motiva o uso de soluções de roteamento que explorem a capilaridade da rede [7]. Nesse contexto, um tipo de problema amplamente investigado na literatura é o de minimização de gargalo no roteamento de fluxos [8], [9]. Em geral, as soluções propostas utilizam abordagens heurísticas [8] ou assumem que a qualidade dos enlaces da rede não flutuam de maneira significativa, ou flutuam apenas em largas escalas de tempo [9]. Neste trabalho, estamos interessados na variante do problema que utiliza um limite no comprimento total dos caminhos dos fluxos como uma restrição. A motivação é que o tráfego de redes sem fio ainda é dominado por fluxos TCP, ou seja, fluxos que são afetados pelo comprimento do caminho. Como é bem conhecido, quanto mais longo for o caminho de um fluxo TCP, maior será o seu laço de realimentação (retorno dos ACKs) e, portanto, menor será sua vazão média.

Neste trabalho, propomos um novo modelo de otimização estocástica de dois estágios para roteamento de fluxos, cujo objetivo é minimizar o gargalo da rede, tendo como uma restrição o comprimento total dos caminhos dos fluxos. Para representar as flutuações nas qualidades dos enlaces, são usadas funções de distribuição de probabilidade de variáveis aleatórias. Para a resolução do modelo estocástico, a qual consiste em uma transformação para um determinístico equivalente, são utilizadas duas técnicas de geração de cenários.

As nossas contribuições para este trabalho são: 1) descrição, através de um exemplo aplicado, da limitação de uma abordagem determinística para resolução do problema proposto, incluindo a análise de sensibilidade do modelo; 2) introdução de um modelo estocástico e sua comparação com o modelo determinístico, ilustrando como a abordagem estocástica é mais eficiente, em especial, quando a qualidade dos enlaces é baixa; 3) investigação da capacidade do modelo estocástico em representar a correlação entre os eventos que geram as flutuações nas qualidades dos enlaces.

\* Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Anápolis – Anápolis – GO – Brasil. E-mail: katia.fernandes@ifg.edu.br.

† Instituto de Informática (INF) – Universidade Federal de Goiás (UFG) – Goiânia – GO – Brasil. E-mail: {phelipedesouza,leizer,kleber}@inf.ufg.br.

## II. MODELO DETERMINÍSTICO

A topologia da rede é representada por um grafo orientado  $G = (V, E)$ , no qual  $V$  representa o conjunto de vértices, com  $|V| = n$ , e  $E$  o conjunto de arestas (enlaces), com  $|E| = m$ . Cada aresta  $(s, d) \in E$  é associado a um valor de qualidade  $q_{sd} \in \mathbb{Z}_{>0}$ , com  $q_{sd} \in \{q_1, q_2, \dots, q_\alpha\}$ . Sem perda de generalidade, assumimos  $q_1 < q_2 < \dots < q_\alpha$ , além disso, consideramos que quanto menor for o valor de  $q_i$ , com  $i \in \{1, \dots, \alpha\}$ , melhor é a qualidade do enlace.

Denominamos  $F$  o conjunto de fluxos que devem ser roteados na topologia  $G$ . Cada fluxo  $f \in F$  é roteado por um único caminho entre o vértice de origem  $s^f \in V$  e o vértice de destino  $d^f \in V$ . Para cada fluxo  $f \in F$  e aresta  $(s, d) \in E$ , com  $s, d \in V$ , definimos uma variável de decisão  $x_{sd}^f \in \{0, 1\}$ , assumindo valor 1, se o fluxo  $f$  passar pela aresta  $(s, d)$ . O custo do fluxo  $f$  atravessar a aresta  $(s, d) \in E$  é dado por  $c_{sd}^f$ .

Dado o conjunto de fluxos  $F$ , a topologia  $G$ , o custo mínimo de roteamento de cada fluxo,  $\Gamma^f$ , formulamos um problema de roteamento de fluxos com objetivo de minimizar o gargalo da rede da seguinte forma:

$$(P^*) \quad \text{minimizar} \left\{ \max_{(s,d) \in E} \left\{ \sum_{f \in F} q_{sd} \cdot x_{sd}^f \right\} \right\} \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{f \in F} \sum_{(s,d) \in E} c_{sd}^f \cdot x_{sd}^f \leq \epsilon \cdot \sum_{f \in F} \Gamma^f \quad (2)$$

$$\sum_{(s,d) \in E} x_{sd}^f - \sum_{(d,s) \in E} x_{ds}^f = \begin{cases} 1, & \text{if } s = s^f \\ 0, & \forall s \in V - \{d^f, s^f\} \\ -1, & \text{if } s = d^f, \forall f \in F \end{cases} \quad (3)$$

$$x_{sd}^f \in \{0, 1\}, \forall (s, d) \in E \text{ e } \forall f \in F, \quad (4)$$

onde a função objetivo (1) minimiza o gargalo da rede, levando em conta as qualidades dos enlaces. Como comentado na Introdução, existem situações que os fluxos (ex., TCP) são afetados pelo comprimento do caminho. Quanto mais longo for o caminho desse fluxo, maior será o tempo (médio) de retorno das confirmações e, portanto, menor será sua vazão média [9]. Por esse motivo, criamos a restrição (2) que controla o custo total de todos os fluxos (comprimento dos caminhos) com base no custo total mínimo do roteamento dos fluxos, sendo  $\epsilon \geq 1$ , o fator de esticamento dado. Observe, por exemplo, que se  $\epsilon = 1$  então os fluxos são roteados por caminhos onde o custo total de todos os fluxos é o mínimo e se  $\epsilon = 1,5$  então os fluxos são roteados por caminhos onde o custo total de todos os fluxos será, no máximo, 50% maior do que o custo total mínimo de todos os fluxos.

As restrições (3) garantem que cada fluxo  $f \in F$  saia de sua origem  $s^f$  e alcance seu destino  $d^f$ , passando por um único caminho.

### A. Análise de sensibilidade

A análise de sensibilidade consiste em investigar a estabilidade da solução ótima em vista de possíveis variações nos parâmetros do modelo. O objetivo desta seção é mostrar, através de análises de soluções, incluindo a análise de sensibilidade, se o modelo  $(P^*)$  é eficiente para resolver problemas de roteamento de fluxos em redes sem fio, quando há flutuações nos valores das qualidades dos enlaces.

Assim, apresentamos uma análise da solução ótima do problema  $(P^*)$ , considerando uma rede aleatória sendo que a topologia é gerada utilizando o modelo de Barabási-Albert [10]. Assumimos que os valores das qualidades dos enlaces,  $q_{sd}$ , são escolhidos aleatoriamente, dentre os valores do conjunto  $\{10, 40, 70, 90\}$  e  $c_{sd}^f = 1, \forall f \in F$  e  $\forall (s, d) \in E$ . Consideramos, ainda, que se  $q_{sd} = q$  com  $q \in \{40, 70, 90\}$ , esses valores podem sofrer flutuações, ou seja, a aresta  $(s, d)$  de qualidade  $q_{sd} = q$  pode assumir todos os valores inteiros pertencentes ao intervalo  $[q-20, q+20]$ . Além disso, os fluxos são distribuídos, aleatoriamente, de acordo com as duas configurações: (1) origens e destinos múltiplos, e (2) origens múltiplas e um único destino. Em cada configuração, avaliamos cenários com  $r = 10$  fluxos sobre a rede com  $n = 10$  nós e  $\epsilon = 1,5$ .

Na análise das soluções ótimas, variando os valores das qualidades dos enlaces, analisamos três situações: (i) o valor da qualidade de uma única aresta, escolhida aleatoriamente, com valor de qualidade  $q$  assumindo todos os valores inteiros pertencentes ao intervalo  $[q-20, q+20]$ , (ii) duas arestas, escolhidas aleatoriamente, com valores de qualidades  $q$  assumindo todos os valores inteiros pertencentes ao intervalo  $[q-20, q+20]$ , (iii) todas as arestas, com valores de qualidade  $q$ , assumindo todos os valores inteiros pertencentes ao intervalo  $[q-20, q+20]$ . Nesses três casos os demais enlaces não sofrem alterações nas qualidades.

Resolvemos o modelo  $(P^*)$  para todas essas variações, assim, obtemos o vetor de solução ótima  $\bar{x}_{q+i}$  e o valor ótimo  $F(\bar{x}_{q+i})$  de  $(P^*)$ , com  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $-20 \leq i \leq 20$ . Posteriormente, comparamos as rotas ótimas das variações das qualidades com as rotas ótimas quando o(s) enlace(s) de qualidade  $q$ , assume: a pior qualidade,  $q+20$ , a qualidade mediana,  $q$ , e a melhor qualidade,  $q-20$ . Isso foi feito para todos os casos ((i), (ii) e (iii)).

Por exemplo, quando variamos os enlaces com qualidade  $q = 70$ , nas duas configurações de distribuição dos fluxos, observamos que as rotas ótimas,  $\bar{x}_{q-20}$ ,  $\bar{x}_q$  e  $\bar{x}_{q+20}$ , são diferentes das demais rotas ótimas  $\bar{x}_{q+i}$ . Essa mesma análise, variando os enlaces de qualidade  $q = 40$ , para a configuração (1) de distribuição dos fluxos, quando comparamos todas as soluções ótimas  $\bar{x}_{q+i}$  com as três soluções  $\bar{x}_{q-20}$ ,  $\bar{x}_q$  e  $\bar{x}_{q+20}$ , apenas em um único caso ocorreu de ter a mesma rota ótima ( $\bar{x}_{q+20} = \bar{x}_{q+16}$ ). Para configuração (2) de distribuição dos fluxos, observamos que, no caso (i), variando uma única aresta, apenas em uma única situação as rotas são iguais ( $\bar{x}_{q-20} = \bar{x}_q$ ); no caso (ii), variando duas arestas, ocorreram apenas duas situações em que as rotas são iguais ( $\bar{x}_q = \bar{x}_{q+3}$  e  $\bar{x}_{q+20} = \bar{x}_{q+19}$ ); e, considerando o caso (iii), todas as rotas são diferentes.

Portanto, a variação no valor da qualidade dos enlaces mostra que novas rotas de roteamento de fluxos são necessárias, pois o modelo é muito sensível à variação das entradas. Mas, reprocessar as rotas, sempre que a condição do canal se altera, provoca instabilidade das rotas, impactando as aplicações que utilizam essa rede.

Outra análise feita foi usarmos as rotas  $\bar{x}_{q-20}$ ,  $\bar{x}_q$  e  $\bar{x}_{q+20}$  para os roteamentos dos fluxos na rede quando os enlaces de qualidade  $q$  tenham sofrido as demais oscilações. Daí,

calculamos o gargalo da rede para cada uma dessas oscilações, que denotamos por  $F_{q+i}(\bar{x}_q)$ , onde  $\bar{q} \in \{q-20, q, q+20\}$  e  $i \in \mathbb{Z}$  tal que  $-20 \leq i \leq 20$ . A Fig. 1 mostra esses resultados para a configuração de distribuição dos fluxos com múltiplas origens e único destino, para  $q = 70$ . Na legenda dessa figura, usamos a notação  $A, B, C$  e  $D$ , para representar  $F_{q+i}(\bar{x}_{q-20})$ ,  $F_{q+i}(\bar{x}_q)$ ,  $F_{q+i}(\bar{x}_{q+20})$  e  $F(\bar{x}_{q+i})$ , respectivamente. Para esse tipo de distribuição dos fluxos, quando utilizamos a rota ótima  $\bar{x}_{q-20}$ , nos casos (ii) e (iii), em 97,5% das variações da qualidade  $q+i$ , o valor  $F_{q+i}(\bar{x}_{q-20})$  é pior do que o valor ótimo  $F(\bar{x}_{q+i})$ . Assim, nesse contexto, em muitos casos, onde a variação ocorre em mais de duas arestas, essas três soluções ( $\bar{x}_{q-20}$ ,  $\bar{x}_q$  e  $\bar{x}_{q+20}$ ) não são equivalentes com as soluções ótimas das demais variações dos valores das qualidades (veja Fig. 1).

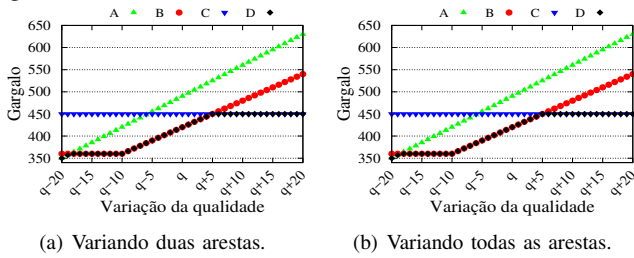


Fig. 1: Análise do gargalo de  $(P^*)$  para variação das qualidades  $q = 70$  quando os fluxos são distribuídos pela configuração (2).

Portanto, neste contexto de roteamento de fluxos em redes sem fio, a otimização estocástica nos permite capturar alguns aspectos que a determinística não é capaz, ou seja, ela é preparada para lidar com as flutuações dos valores das qualidades dos enlaces, independentemente da quantidade de enlaces que sofrem flutuações em suas qualidades. Assim, vimos a necessidade de trabalharmos com um modelo estocástico para problema de roteamento de fluxos em redes sem fio, onde os valores das qualidades dos enlaces são incertos, ou seja, eles são variáveis aleatórias.

### III. O MODELO ESTOCÁSTICO

Nesta seção apresentamos um modelo de programação estocástica de dois estágios. Nesse tipo de modelo, as variáveis de decisão são agrupadas em dois estágios, no qual o primeiro estágio contém as variáveis que representam a informação conhecida. O segundo estágio representa a informação que é aprendida, posteriormente, quando os eventos aleatórios ocorrem [11], [12].

Em problemas estocásticos de dois estágios, é necessário ter uma distribuição de probabilidade discreta de cardinalidade limitada que representa a aproximação do comportamento das variáveis aleatórias. As saídas da discretização são chamadas de *cenários*, e toda a distribuição, conjunto de cenários, é denominado de *árvore de cenários*. Essas árvores são estruturas de dados básicas para esses tipos de problemas, representando as discretizações dos processos estocásticos, portanto, uma aproximação dos fenômenos reais. Além disso, para representação do verdadeiro processo estocástico, uma possibilidade é construir uma árvore, denominada de *árvore de referência*. Essa árvore deve ser a maior possível, ou seja, a maior árvore para o qual, ainda, podemos resolver o problema de otimização [12], [13].

Agora, apresentamos o nosso modelo estocástico de roteamento de fluxos em redes sem fio, minimizando o gargalo da rede e, na restrição, controlamos o custo total de todos os fluxos (comprimento total dos caminhos). Seja  $\tau$  a árvore de cenários descrevendo a incerteza do problema e os cenários desse conjunto representado por  $\xi$ . Considere  $q_{sd}^\xi \in \mathbb{Z}_{>0}$  uma variável aleatória discreta associada a cada aresta (enlace),  $(s, d) \in E$ , correspondendo o valor da qualidade dessa aresta no cenário  $\xi \in \tau$  e seja  $c_{sd}^f$ , o custo, não negativo, para o fluxo  $f$  atravessar a aresta  $(s, d) \in E$ .

Assim, dados um conjunto de fluxos  $F$ , a topologia da rede  $G$ , o custo total mínimo de cada fluxo  $f \in F$  roteado, denotado por  $\Gamma^f$ , e o gargalo da rede, definido como a carga mais pesada sobre a(s) aresta(s), dado por  $\max_{(s,d) \in E} \left\{ \sum_{f \in F} q_{sd}^\xi \cdot x_{sd}^f \right\}$ . Formulamos um modelo estocástico de dois estágios de programação não linear, para o problema de roteamento de  $r$  fluxos, minimizando o gargalo da rede como segue:

$$(P) \text{ minimizar } \left\{ \max_{(s,d) \in E} \left\{ \sum_{f \in F} q_{sd}^\xi \cdot x_{sd}^f \right\} + \hat{c} \sum_{\xi \in \tau} p^\xi \cdot w^\xi \right\} \quad (5)$$

sujeito a:

$$\sum_{f \in F} \sum_{(s,d) \in E} c_{sd}^f \cdot x_{sd}^f - w^\xi \leq \epsilon \cdot \sum_{f \in F} \Gamma^f, \quad \forall \xi \in \tau \quad (6)$$

$$w^\xi \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \xi \in \tau, \quad (7)$$

onde  $\hat{c}$  é a penalidade unitária para o sobre peso do custo total,  $w^\xi$ , no cenário  $\xi$ . Além disso,  $p^\xi$  é a probabilidade desse sobre peso ocorrer no cenário  $\xi$  e  $\sum_{\xi \in \tau} p^\xi \cdot w^\xi$  representa a esperança dos valores de sobre peso do problema.

Em (6),  $\epsilon \geq 1$  é um fator de esticamento do comprimento total dos caminhos, dado, como definido na seção anterior. Observe que essas restrições e a função objetivo são acopladas através do sobre peso  $w^\xi$ , cuja influência depende da probabilidade,  $p^\xi$ , do sobre peso ocorrer no cenário  $\xi$ . Assim, é possível exceder essas restrições se a penalidade total for inferior ao benefício obtido na redução do gargalo. Ou seja, elas garantem que o comprimento total (custo total) de todos os fluxos, em cada cenário  $\xi$ , não sejam maiores do que o limite dado pelo parâmetro  $\epsilon \sum_{f \in F} \Gamma^f$ , mas se ocorrer um sobre peso  $w^\xi$ , para cada cenário  $\xi$ , o modelo sofrerá uma penalidade de custo  $\hat{c}$  para cada unidade de sobre peso. O modelo (P) conta, também, com as restrições (3) e (4) do modelo determinístico  $(P^*)$ .

Para avaliar a qualidade dos métodos de geração de cenários e estabelecer o tamanho adequado das árvores de cenários, com o intuito de achar uma solução eficiente para (P), devemos aplicar testes denominados de *testes de estabilidade*.

Suponhamos que para cada um dos  $p$  tamanhos distintos,  $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p]$ , de árvores de cenários geradas,  $k$  árvores foram geradas. Denotamos essas árvores por  $\tau_i^{(j)}$ , com  $i \in \{1, \dots, p\}$  e  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Assim, o número total de árvores geradas são  $\kappa = k \cdot p$  árvores. Denotamos por  $\tilde{\tau}$  a árvore de referência. No modelo estocástico (P) podemos observar que temos  $\eta_i = m \cdot r + \zeta_i$  variáveis de decisão, com  $i \in \{1, \dots, p\}$ , ou seja, o número de variáveis do problema varia com o tamanho ( $\zeta_i$ ) da árvore de cenários considerado.

**Definições.** Considere  $x_i^{(j)}$ , a solução eficiente do problema ( $P$ ) para a árvore de cenários  $\tau_i^{(j)}$ ,  $x^*$ , a solução eficiente de ( $P$ ) para a árvore de referência,  $F(x_i^{(j)}; \tau_i^{(j)})$ , o valor da função objetivo eficiente para cada cenário  $\tau_i^{(j)}$ ,  $F(x^*; \bar{\tau})$ , o valor objetivo eficiente para a árvore de referência e  $F(x_i^{(j)}; \bar{\tau})$ , o valor da função objetivo verdadeiro, temos que:

- (i) Se  $F(x_i^{(j)}; \tau_i^{(j)}) \approx F(x_i^{(j')}; \tau_i^{(j')})$ , com  $j \neq j'$  e  $j, j' \in \{1, \dots, k\}$ , tem-se *estabilidade in-sample* para as árvores com  $\zeta_i$  cenários, com  $i \in \{1, \dots, p\}$ .
- (ii) Se  $F(x_i^{(j)}; \bar{\tau}) \approx F(x_i^{(j')}; \bar{\tau})$ , com  $j \neq j'$  e  $j, j' \in \{1, \dots, k\}$ , tem-se *estabilidade out-of-sample* para as árvores com  $\zeta_i$  cenários, com  $i \in \{1, \dots, p\}$ .
- (iii) Se  $F(x^*; \bar{\tau}) \approx F(x_i^{(j)}; \tau_i^{(j)})$ , com  $i \in \{1, \dots, p\}$ , para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$ , não há *bias* para as árvores com  $\zeta_i$  cenários.

#### IV. AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO

Nesta seção, avaliamos o problema estocástico ( $P$ ). Os métodos de geração de cenários para otimização estocástica foram implementados em Python v2.7. Para resolver ( $P$ ), utilizamos o pacote de otimização CPLEX® v12.8 em C++. Todos os testes foram executados sobre um Ubuntu 18.04.1 LTS em um equipamento Intel® Xeon(R), CPU Silver 4114 de 2.20GHz, 10 vCPUs, 64 GB de RAM e 100 GB de disco (virtual).

A topologia da rede é gerada aleatoriamente, utilizando o modelo de Barabási–Albert (BA) [10]. O fator de esticamento adotado foi  $\epsilon = 1,5$ . Os fluxos são distribuídos aleatoriamente de acordo com as duas configurações seguintes: 1) origens e destinos múltiplos e 2) origens múltiplas e um único destino. Em cada configuração, avaliamos cenários com  $r = 10$  fluxos sobre a rede com  $n = 10$  nós.

A abordagem estocástica, além de capturar as flutuações nas qualidades dos enlaces, permite representar a correlação entre os eventos que influenciam a qualidade dos enlaces. Assim, estamos interessados em determinar a solução eficiente do modelo ( $P$ ) nos seguintes casos: (i) as qualidades dos enlaces são não-correlacionadas, (ii) as qualidades dos enlaces são correlacionadas (Tabela I). Em todos os casos adotamos que as qualidades aleatórias são representadas por uma distribuição normal.

TABELA I. DISTRIBUIÇÃO DA MATRIZ CORRELAÇÃO.

$\rho_{ij}$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0
$F_i$	52%	64%	80%	92%	95%	95%	100%

Para geração de árvores, utilizamos uma técnica para as árvores de cenários e, outra técnica, para a árvore de referência [14]. O intuito é garantir a confiabilidade e a imparcialidade dos resultados. Para geração das árvores de cenários utilizamos o método de *aproximação por média amostral* (sample average approximation - SAA) [15]. Os elementos da matriz de correlação foram  $\rho_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\rho_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ , quando não há correlação entre as qualidades dos enlaces e, quando há correlação nas qualidades dos enlaces utilizamos  $\rho_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\rho_{ij} = \rho_{ji} = p_{ij}$ , se  $i \neq j$ , onde  $p_{ij}$  é um valor real do intervalo  $[0, 1]$ , gerados aleatoriamente, como apresentado na Tabela I. Para gerar a árvore de referência foi utilizado o método *moment-matching* [13] sendo que os elementos da

matriz de covariância foram calculados utilizando as matrizes de correlação definida anteriormente.

Como proposto em [12], o modelo é resolvido sobre cada uma das árvores de cenários geradas. Consideramos quatro tamanhos,  $\zeta_i$ , diferentes de árvores de cenários, com  $\zeta_i \in \zeta = [10 \ 20 \ 40 \ 60]$ . Além disso, geramos  $k = 25$  árvores de cenários de tamanho,  $\zeta_i \in \zeta$ , com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ :  $\tau_i^{(j)} = \left( \tau_i^{(j)} \right)$ , sendo que cada vetor  $q_u^{\tau_i^{(j)}} = [q_u^{\xi_1} \ q_u^{\xi_2} \ \dots \ q_u^{\xi_{\zeta_i}}]$  com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $j \in \{1, \dots, 25\}$  e  $u \in \{1, \dots, \frac{m}{2}\}$ , onde definimos as qualidades como segue:

$$q_{sd}^{\xi_\ell} = 10 \quad \text{se } 0 \leq q_u^{\xi_\ell} < 20; \quad q_{sd}^{\xi_\ell} = 40 \quad \text{se } 20 \leq q_u^{\xi_\ell} < 60; \\ q_{sd}^{\xi_\ell} = 70 \quad \text{se } 60 \leq q_u^{\xi_\ell} \leq 80; \quad q_{sd}^{\xi_\ell} = 90 \quad \text{se } 80 \leq q_u^{\xi_\ell} \leq 100.$$

Portanto, temos as árvores resultantes  $\hat{\tau}_i^{(j)} = \left( q_{sd}^{\xi_\ell} \right)$ . Consideramos, ainda, que  $q_{sd}^{\xi_\ell} = q_{ds}^{\xi_\ell}$ ,  $\forall (s, d) \in E$  e  $\forall \xi_\ell \in \tau$ .

As Tabelas II e III, apresentam a média e o desvio padrão dos valores objetivo das soluções eficientes e dos valores verdadeiros da função objetivo, para os diferentes tamanhos de árvores de cenários. Já, a Tabela IV mostra os valores  $F(x^*, \bar{\tau})$  do modelo ( $P$ ) para cada caso considerado.

TABELA II. TESTE DE ESTABILIDADE - SEM CORREL.

Múltiplas origens e um único destino						
Descrição do teste			Número de cenários			
Tipo	F. Objetivo	Valor	10	20	40	60
In	$F(x_i^{(j)}; \tau_i^{(j)})$	Média	425,0	421,0	421,0	421,0
		Desv. Pad.	0,0	0,0	0,0	0,0
Out	$F(x_i^{(j)}; \bar{\tau})$	Média	421,0	421,0	421,0	421,0
		Desv. Pad.	0,0	0,0	0,0	0,0
Múltiplas origens e múltiplos destinos						
Descrição do teste			Número de cenários			
Tipo	F. Objetivo	Valor	10	20	40	60
In	$F(x_i^{(j)}; \tau_i^{(j)})$	Média	72,0	71,0	71,0	71,0
		Desv. Pad.	0,0	0,0	0,0	0,0
Out	$F(x_i^{(j)}; \bar{\tau})$	Média	71,0	71,0	71,0	71,0
		Desv. Pad.	0,0	0,0	0,0	0,0

TABELA III. TESTE DE ESTABILIDADE - COM CORREL.

Múltiplas origens e um único destino						
Descrição do teste			Número de cenários			
Tipo	F. Objetivo	Valor	10	20	40	60
In	$F(x_i^{(j)}; \tau_i^{(j)})$	Média	455,0	451,0	451,0	451,0
		Desv. Pad.	0,0	0,0	0,0	0,0
Out	$F(x_i^{(j)}; \bar{\tau})$	Média	451,0	451,0	451,0	451,0
		Desv. Pad.	0,0	0,0	0,0	0,0
Múltiplas origens e múltiplos destinos						
Descrição do teste			Número de cenários			
Tipo	F. Objetivo	Valor	10	20	40	60
In	$F(x_i^{(j)}; \tau_i^{(j)})$	Média	92,0	91,0	91,0	91,0
		Desv. Pad.	0,0	0,0	0,0	0,0
Out	$F(x_i^{(j)}; \bar{\tau})$	Média	101,0	94,2	91,0	91,0
		Desv. Pad.	20,4	11,5	0,0	0,0

TABELA IV. VALORES  $F(X^*; \bar{\tau})$  DE ( $P$ ).

	Sem correl.	Com correl.
Múltiplas origens e múltiplos destinos	71	91
Múltiplas origens e um único destino	421	451

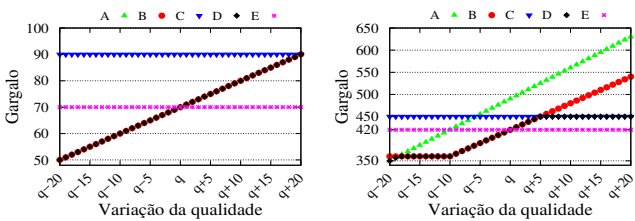
Para as duas configurações de distribuição de fluxos, o método de geração de cenário testado é viável para o modelo ( $P$ ). No caso das qualidades de enlaces não-correlacionadas, os resultados sugerem que não devemos usar árvores menores que 20 cenários (veja Tabela II). Para qualidades correlacionadas, usar árvores maiores ou igual a 20, para configuração de fluxos origens múltiplas e único destino, e, árvores maiores ou

igual a 40, para origens e destinos múltiplos (veja Tabela III). Os resultados, ainda, mostram que o valor objetivo atinge um valor bem menor quando a configuração dos fluxos é de origens e destinos múltiplos, existindo ou não correlação entre as qualidades dos enlaces. Isso ocorre, pois, nessa configuração, os fluxos ficam mais espalhados na rede, acarretando gargalos menores.

Quando as qualidades dos enlaces não são correlacionadas, as estabilidades (*in-sample* e *out-of-sample*) ocorrem mais rápido do que quando há correlação. Além disso, nesses casos, independente da configuração dos fluxos, ( $P$ ) consegue um valor objetivo eficiente bem melhor do que quando há correlação entre as qualidades (veja Tabelas II e III).

Como observado na seção II-A, os valores do gargalo  $F(\bar{x}_{q+i})$  do modelo ( $P^*$ ) oscilam muito, quando variamos as qualidades dos enlaces.

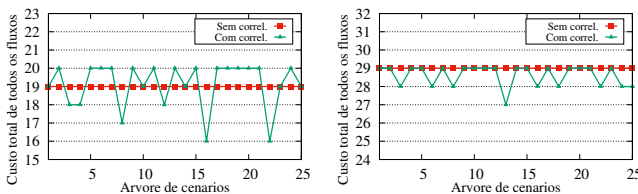
O nosso objetivo, agora, é comparar esses gargalos com o gargalo de ( $P$ ). Na legenda da Fig. 2,  $A, B, C, D$  e  $E$  representam  $F_{q+i}(\bar{x}_{q-20}), F_{q+i}(\bar{x}_q), F_{q+i}(\bar{x}_{q+20}), F(\bar{x}_{q+i})$  e o gargalo de ( $P$ ), respectivamente. Essa figura mostra que o gargalo de ( $P$ ) é melhor do que os gargalos de ( $P^*$ ) quando os valores das qualidades dos enlaces assumem valores de qualidades maiores, ou seja, quando as qualidades das conexões estão baixas.



(a) Origens e destinos múltiplos (b) Origens múltiplas e dest. único

Fig. 2: Comparação dos gargalos dos modelos determinístico e estocástico, variando todas as arestas de qualidade  $q = 70$ .

A Fig. 3 mostra o custo total de todos os fluxos (total de saltos) quando resolvemos o modelo estocástico ( $P$ ) para as 25 árvores de cenários de tamanho 60. Note que, podemos escolher, dentre as 25 rotas eficientes, a rota do cenário que obteve o menor custo total de todos os fluxos (menor rota), pois o gargalo para todos esses cenários é o mesmo. Por exemplo, quando há correlação, para a configuração (2) de distribuição dos fluxos, isso ocorre na árvore 13 (Fig. 3(b)). Evitando, assim, rotas mais longas que podem causar atraso de transmissão e aumento na taxa de perda de pacotes.



(a) Origens e destinos múltiplos (b) Origens múltiplas e dest. único

Fig. 3: Custo total de todos os fluxos para as 25 árvores de cenários de tamanho 60.

## V. CONCLUSÕES

Neste artigo, introduzimos um modelo estocástico de dois estágios para resolver um problema clássico de minimização de gargalo no roteamento de fluxos, o qual tem como uma das restrições o comprimento total dos caminhos de todos os fluxos. Mostramos como a abordagem estocástica encontra uma solução eficiente ao incorporar no modelo o conhecimento sobre como as qualidades dos enlaces flutuam. Adicionalmente, ilustramos como esse modelo é capaz de representar eventuais correlações entre as flutuações das qualidades.

A capacidade de representação sofisticada dessa técnica implica em um modelo de alto custo computacional. Por essa razão, como trabalho futuro, pretendemos investigar técnicas de redução de cenários com o intuito de resolver o problema abordado para redes maiores. Pretendemos também implementar a solução em um simulador ou emulador para avaliar outras métricas, como vazão, atraso e perda de pacotes.

## ACKNOWLEDGEMENT

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) na chamada No. 05/2016, processo No. 201610267001193.

## REFERÊNCIAS

- [1] I. F. Akylidiz, X. Wang, and W. Wang, "Wireless mesh networks: a survey," *Computer Networks*, vol. 47, no. 4, pp. 445–487, 2005.
- [2] P. Patil, A. Hakiri, Y. Barve, and A. Gokhale, "Enabling Software-Defined Networking for Wireless Mesh Networks in smart environments," in *IEEE 15th International Symposium on Network Computing and Applications (NCA)*, Oct 2016, pp. 153–157.
- [3] W. Lu, Y. Gong, X. Liu, J. Wu, and H. Peng, "Collaborative Energy and Information Transfer in Green Wireless Sensor Networks for Smart Cities," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 14, no. 4, pp. 1585–1593, Apr 2018.
- [4] S. Biswas and R. Morris, "ExOR: Opportunistic Multi-hop Routing for Wireless Networks," *SIGCOMM Comput. Commun. Rev.*, vol. 35, no. 4, pp. 133–144, Aug 2005.
- [5] T. Meng, F. Wu, Z. Yang, G. Chen, and A. V. Vasilakos, "Spatial Reusability-Aware Routing in Multi-Hop Wireless Networks," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 65, no. 1, pp. 244–255, Jan 2016.
- [6] K. Ramachandran, I. Sheriff, E. Belding, and K. Almeroth, "Routing Stability in Static Wireless Mesh Networks," in *Passive and Active Network Measurement*, 2007, pp. 73–82.
- [7] N. S. Nandiraju, D. S. Nandiraju, and D. P. Agrawal, "Multipath Routing in Wireless Mesh Networks," in *IEEE International Conference on Mobile Ad Hoc and Sensor Systems*, Oct 2006, pp. 741–746.
- [8] M. Boushaba, A. Hafid, and M. Gendreau, "Source-Based Routing in Wireless Mesh Networks," *IEEE Systems Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 262–270, Mar 2016.
- [9] L. L. Pinto, K. C. C. Fernandes, K. V. Cardoso, and N. Maculan, "An Exact and Polynomial Approach for a Bi-Objective Integer Programming Problem Regarding Network Flow Routing," *Computers & Operations Research*, vol. 106, pp. 28–35, 2019.
- [10] A.-L. Barabási and R. Albert, "Emergence of Scaling in Random Networks," *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [11] N. V. Sahinidis, "Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 28, no. 6, pp. 971–983, 2004.
- [12] M. Kaut and S. Wallace, "Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming," *Pacific Journal of Optimization*, vol. 3, Jun 2003.
- [13] K. Høyland, M. Kaut, and S. W. Wallace, "A Heuristic for Moment-Matching Scenario Generation," *Computational Optimization and Applications*, vol. 24, no. 2, pp. 169–185, Feb 2003.
- [14] M. Kaut, H. Vladimirov, S. W. Wallace, and S. A. Zenios, "Stability analysis of portfolio management with conditional value-at-risk," *Quantitative Finance*, vol. 7, no. 4, pp. 397–409, 2007.
- [15] A. Shapiro, "Monte Carlo sampling approach to stochastic programming," in *ESAIM: Proceedings*, vol. 13, 2003, pp. 65–73.