

# Aplicação de Técnica Sem-Malha Híbrida na Solução de Espalhamento Eletromagnético

Tiago V. L. Amorim, Fernando J. S. Moreira e Úrsula C. Resende

**Resumo**— Este trabalho descreve uma formulação híbrida entre Método sem Malha Local Petrov-Galerkin e Método dos Momentos na solução de problemas de espalhamento eletromagnético em duas dimensões. O método sem malha, aplicado ao problema interno, usa funções de forma geradas por interpolação radial com reprodução polinomial. Já o problema externo, resolvido pelo método dos momentos, utiliza funções triangulares na solução das equações integrais. Os problemas são acoplados forçando a continuidade das componentes tangenciais do campo eletromagnético. O método é aplicado a problemas de espalhamento e seus resultados são comparados com soluções analíticas e FEM.

**Palavras-Chave**— Método sem Malha, Método dos Momentos, Espalhamento.

**Abstract**— This work describes a hybrid formulation meshless-MoM approach to solve 2-dimensional scattering problems. The Meshless Local Petrov-Galerkin, applied to the inner region, is used with shape functions generated by the Radial Point Interpolation Method with polynomial reproduction. The Method of Moments, applied to the outer region, is used to solve the electric and magnetic field integral equations. Both regions are coupled by forcing the electromagnetic field's tangent components continuity. The results are compared with analytical and FEM solutions.

**Keywords**— Meshless, Method of Moments, Scattering.

## I. INTRODUÇÃO

Durante os últimos anos, vários métodos sem malha foram desenvolvidos, como os métodos *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) [1], *Element Free Galerkin* (EFG) [2] e o *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) [3].

As técnicas EFG e MLPG foram vastamente estudadas em problemas de espalhamento eletromagnético, nas quais é utilizada uma condição de radiação absorvente para limitar o domínio do problema [4], [5].

Neste trabalho, a formulação adotada é baseada no método MLPG que possui uma formulação local fraca, resultando em matrizes esparsas e uma minimização de esforço computacional. Para construção das funções de forma, foi utilizado o *Radial Point Interpolation Method* (RPIM) com reprodução polinomial. Essa formulação é compatível, consistente com a ordem dos polinômios utilizados, possui matrizes sempre invertíveis e a propriedade do delta de Kronecker [6].

Tiago V. L. Amorim, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFMG, Av. Pres. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil, e-mail: tiagovla@ufmg.br; Fernando J. S. Moreira, Departamento de Engenharia Eletrônica, UFMG, Av. Pres. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil, e-mail: fernandomoreira@ufmg.br; Úrsula do Carmo Resende, Departamento de Engenharia Elétrica, CEFET, Av. Amazonas 5253, 30421-169, Belo Horizonte, MG, Brasil, e-mail: resendeursula@des.cefetmg.br; Este trabalho foi apoiado e parcialmente financiado por CAPES/PROCAD (068419/14-01), CNPq e FAPEMIG.

Diferente dos estudos anteriores, adotou-se uma formulação híbrida baseada em Método dos Momentos (MoM) para substituir a condição absorvente [7]. Em que foram utilizadas funções triangulares para resolver a equação integral do campo elétrico (EFIE) e a equação integral do campo magnético (MFIE) em um contorno arbitrário [8].

Há uma grande vantagem nessa abordagem, pois toda formulação é baseada em equações analíticas. A interface dos métodos pode ser colocada diretamente sobre o objeto de estudo diminuindo o domínio do método sem malha. E o campo pode ser calculado diretamente em todo o espaço.

A técnica é então utilizada na solução do espalhamento eletromagnético de um cilindro dielétrico infinito [9] e de uma lente de Luneburg [10] por uma onda plana TMz.

## II. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Nesse trabalho, o espalhamento eletromagnético em duas dimensões por uma onda TMz, no qual o campo elétrico tem somente a componente  $E_z$ , é resolvido para uma região sem fontes. Aplicando essas condições na equação vetorial de Helmholtz, sua forma forte é obtida [11]:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_r(\mathbf{x})} \nabla E_z(\mathbf{x}) \right) + k_0^2 \epsilon_r(\mathbf{x}) E_z(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

onde  $\epsilon_r$  e  $\mu_r$  são a permissividade e permeabilidade relativa, respectivamente, e  $k_0$  é o número de onda no vácuo.

Aplicando o método dos resíduos ponderados e o teorema da divergência em (1) para permeabilidade magnética constante, sua forma fraca global no domínio  $\Omega$  é obtida:

$$\int_{\Omega} \mu_r^{-1} \nabla \psi \cdot \nabla E_z - \psi \epsilon_r k_0^2 E_z d\Omega - \int_{\Gamma} \mu_r^{-1} \psi \nabla E_z \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (2)$$

onde  $\Gamma$  é a fronteira do domínio do problema e  $\psi$  é a função de teste.

Para soluções numéricas utilizando métodos sem malha puros, usualmente obriga-se a solução a satisfazer a condição de radiação de Sommerfeld na fronteira ou cria-se uma camada perfeitamente casada (PML) para que não haja reflexão, impondo na mesma, o efeito da onda incidente.

Todavia, neste trabalho, invocando o princípio da equivalência [9], dois problemas equivalentes são tratados, o problema externo pelo método dos momentos e o problema interno pelo método sem malha. E o acoplamento dos problemas é realizado impondo a continuidade das componentes tangenciais do campo eletromagnético na fronteira [12].

Em todo desenvolvimento é assumido invariância na direção  $z$ , portanto  $\partial/\partial z = 0$ . Além disso, os campos são assumidos por temporalmente harmônicos (variação  $e^{j\omega t}$ ).

### III. PROBLEMA INTERNO: MÉTODO SEM MALHA

#### A. Função de Forma: Aproximação do RPIM

Na aproximação da função de forma utilizando RPIM com reprodução polinomial [6],  $u^h$  em um ponto  $\mathbf{x}$  é:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{x})b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{b} \quad (3)$$

onde  $a_i$  é o coeficiente das funções de base radial  $R_i$ ,  $b_j$  é o coeficiente do monômio  $P_j$  da base polinomial,  $n$  é o número de nós do domínio de suporte de  $\mathbf{x}$  e  $m$  é o número de monômios da base polinomial. Em notação vetorial:

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) = [R_1(\mathbf{x}), R_2(\mathbf{x}), \dots, R_n(\mathbf{x})] \quad (4)$$

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [P_1(\mathbf{x}), P_2(\mathbf{x}), \dots, P_m(\mathbf{x})] \quad (5)$$

Para função de base radial, a que obtém resultados de forma mais robusta é a multiquadrática [13]:

$$R_i(\mathbf{x}) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q \quad (6)$$

em que

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (7)$$

onde  $\alpha_c$  e  $q$  são parâmetros otimizados para cada problema e  $d_c$  é a distância internodal média.

Os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são definidos por:

$$\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad (8)$$

$$\mathbf{b}^T = [b_1, b_2, \dots, b_m] \quad (9)$$

em que seus coeficientes são calculados forçando a interpolação pelos  $n$  nós do domínio de suporte:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} + \mathbf{P}_m \mathbf{b} \quad (10)$$

onde as matrizes de momento  $\mathbf{R}_Q$  e  $\mathbf{P}_m$  são dadas por:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times m)} \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_m(\mathbf{x}_1) & P_m(\mathbf{x}_2) & \dots & P_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (12)$$

O termo polinomial deve satisfazer uma condição extra para garantir que a aproximação seja única [14]:

$$\mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0 \quad (13)$$

Além da possibilidade de resolver diretamente o sistema formado pelas equações (10) e (13), dado que uma das equações é homogênea e  $\mathbf{R}_Q$  é definida positiva, tem-se que:

$$u^h(\mathbf{x}) = [\mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_b]\mathbf{U}_s = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (14)$$

onde

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{U}_s, \quad \mathbf{S}_b = [\mathbf{P}_m^T \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m]^{-1} [\mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m]^T \quad (15)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{U}_s, \quad \mathbf{S}_a = \mathbf{R}_Q^{-1} - \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{P}_m \mathbf{S}_b \quad (16)$$

Assim, a função de forma e sua derivada direcional são:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_b \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{R}^T(\mathbf{x})}{\partial n} \mathbf{S}_a + \frac{\partial \mathbf{P}^T(\mathbf{x})}{\partial n} \mathbf{S}_b \quad (18)$$

#### B. Abordagem MLPG por colocação

O método MLPG ao contrário do EFG, é um método realmente sem malha e utiliza a forma fraca (2) em subdomínios centrados em cada nó. Nessa formulação, em específico, escolheu-se como função de teste a spline cúbica [13]:

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & s < \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \frac{1}{2} \leq s < 1 \\ 0 & s \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

em que  $s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|/R_c$ , onde  $\mathbf{x}$  é o ponto em que a função é aproximada,  $\mathbf{x}_i$  é o nó no centro do subdomínio e  $R_c$  é o raio do subdomínio.

Tal escolha acarreta na simplificação da forma fraca de cada subdomínio devido a  $\psi$  se anular em  $\Gamma_i$ , correspondendo a:

$$\int_{\Omega_i} \mu_r^{-1} \nabla \psi \nabla E_z - \psi \epsilon_r k_0^2 E_z d\Omega = 0 \quad (20)$$

O método MLPG com colocação [5] divide os nós de um domínio em dois conjuntos. O conjunto  $N_i$  que contém os nós internos ao domínio e o conjunto  $N_e$  que contém os nós sobre a fronteira. Para os nós em  $N_i$ , a equação (20) é utilizada, fazendo com que  $R_c$  seja tal que  $\Gamma_i \cap \Gamma = 0$ . Para os nós em  $N_e$ , as equações em forma forte são impostas diretamente, o que é feito no acoplamento das regiões interna e externa.

O método ainda converge, visto que a distribuição dos nós internos é feita de forma que:

$$\bigcup_{i \in N_i} \Omega_i \approx \Omega \quad (21)$$

A figura 1 ilustra a escolha do subdomínio e a escolha dos nós de suporte. A iteração entre os nós globais  $i$  e  $j$  é dada por  $K_{ij}$  na equação (22). Se a função de forma  $\phi_j$  associada ao nó global  $j$  não influenciar o subdomínio  $\Omega_i$  associado ao nó global  $i$ , então  $K_{ij}$  é nulo.

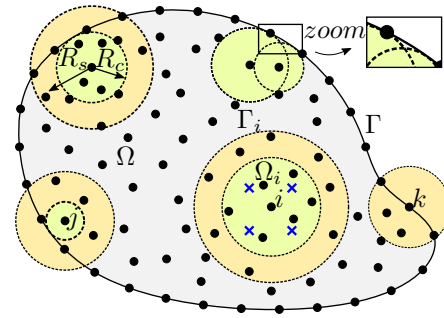


Fig. 1. Esta figura apresenta o domínio do problema interno e os subdomínios do MLPG. Nota-se que para cada nó, há um subdomínio (em verde) e um domínio de suporte (em amarelo), cujos raios são respectivamente  $R_s$  e  $R_c$ . Nota-se que  $R_s > R_c$  para que todos os pontos de Gauss estejam dentro da região de interpolação do RPIM. Observa-se também que todos subdomínios tangenciam  $\Gamma$  ( $\Gamma_i \cap \Gamma = 0$ ).

$$K_{ij} = \int_{\Omega_i} \mu_r^{-1} \nabla \psi_i \cdot \nabla \phi_j - k_0^2 \epsilon_r \psi_i \phi_j d\Omega \quad (22)$$

#### IV. PROBLEMA EXTERNO: MÉTODO DOS MOMENTOS

Na região exterior, o princípio da equivalência é aplicado para estabelecer as equações integrais do campo elétrico e magnético em duas dimensões, respectivamente:

$$[j\omega\mu(\mathcal{L}\mathbf{J}) + (\mathcal{K}\mathbf{M})]_{tan} + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{E}^i]_{tan} \quad (23)$$

$$[j\omega\epsilon(\mathcal{L}\mathbf{M}) + (\mathcal{K}\mathbf{J})]_{tan} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}) = [\mathbf{H}^i]_{tan} \quad (24)$$

onde os operadores  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{K}$  são:

$$(\mathcal{L}\mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}) = \left[1 + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right] \int_V G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \mathbf{X}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' \quad (25)$$

$$(\mathcal{K}\mathbf{X})(\boldsymbol{\rho}) = \nabla \times \int_V G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \mathbf{X}(\boldsymbol{\rho}') d\boldsymbol{\rho}' \quad (26)$$

em que a função de Green bidimensional do espaço livre é:

$$G(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) \quad (27)$$

notando que  $H_0^{(2)}$  é a função de Hankel,  $E^i$  e  $H^i$  são os campos elétrico e magnético incidentes, respectivamente. E  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{M}$  são as densidades correntes elétrica e magnética equivalentes, respectivamente.

A figura 2 ilustra o sistema vetorial utilizado.

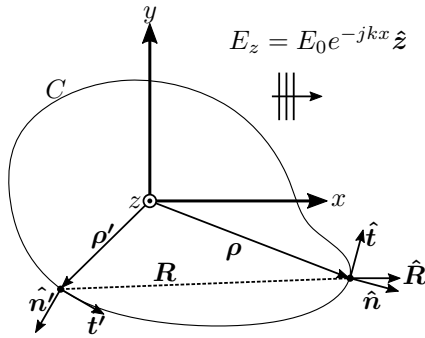


Fig. 2. Esta figura apresenta o sistema vetorial utilizado para um contorno arbitrário  $C$ . Como há apenas o problema externo, apenas as equações do Método dos Momentos da região exterior são necessárias.

Ao aplicar funções conhecidas  $f^z$  e  $g^t$  para representar as correntes equivalentes e as funções de teste, obtém-se o seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} L^{zz} & K^{zt} \\ -K^{tz} & \frac{\epsilon}{\mu} L^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^z \\ M^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^E \\ V^H \end{bmatrix} \quad (28)$$

em que

$$L^{zz} = \frac{\omega\mu}{4} \int_{\mathbf{f}_m^z} \mathbf{f}_m^z(\boldsymbol{\rho}) \cdot \int_{\mathbf{f}_n^z} \mathbf{f}_n^z(\boldsymbol{\rho}') H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho} \quad (29)$$

$$K^{zt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{f}_m^z = \mathbf{g}_n^t} \mathbf{f}_m^z(\boldsymbol{\rho}) \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{g}_n^t(\boldsymbol{\rho})] d\boldsymbol{\rho} - \frac{jk}{4} \int_{\mathbf{f}_m^z} \mathbf{f}_m^z(\boldsymbol{\rho}) \cdot \int_{\mathbf{g}_n^t} \mathbf{g}_n^t(\boldsymbol{\rho}') \times \hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') H_1^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho} \quad (30)$$

$$K^{tz} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{g}_m^t = \mathbf{f}_n^z} \mathbf{g}_m^t(\boldsymbol{\rho}) \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{f}_n^z(\boldsymbol{\rho})] d\boldsymbol{\rho} - \frac{jk}{4} \int_{\mathbf{g}_m^t} \mathbf{g}_m^t(\boldsymbol{\rho}) \cdot \int_{\mathbf{f}_n^z} \mathbf{f}_n^z(\boldsymbol{\rho}') \times \hat{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') H_1^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho} \quad (31)$$

$$L^{tt} = \frac{\omega\mu}{4} \int_{\mathbf{g}_m^t} \mathbf{g}_m^t(\boldsymbol{\rho}) \cdot \int_{\mathbf{g}_n^t} \mathbf{g}_n^t(\boldsymbol{\rho}') H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho} - \frac{1}{4\omega\epsilon} \int_{\mathbf{g}_m^t} \nabla \cdot \mathbf{g}_m^t(\boldsymbol{\rho}) \cdot \int_{\mathbf{g}_n^t} \nabla \cdot \mathbf{g}_n^t(\boldsymbol{\rho}') H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\boldsymbol{\rho}' d\boldsymbol{\rho} \quad (32)$$

$$V^E = \int_{\mathbf{f}_m^z} \mathbf{f}_m^z(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{E}^i(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \quad (33)$$

$$V^H = \int_{\mathbf{g}_m^t} \mathbf{g}_m^t(\boldsymbol{\rho}) \cdot \mathbf{H}^i(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho} \quad (34)$$

onde os subíndices indicam que as funções  $g^t$  e  $f^z$  têm direção tangente à curva  $C$  e direção  $\hat{\mathbf{z}}$ , respectivamente. Em que  $\mathbf{H}^i$  é calculado pela lei de Faraday [9].

A partir das correntes  $J^z$  e  $M^t$ , o campo elétrico próximo pode ser calculado por [8]:

$$E_z(\boldsymbol{\rho}) = -\frac{k^2}{4\omega\epsilon} \int_C \mathbf{J}(\boldsymbol{\rho}') H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) d\boldsymbol{\rho}' - j\frac{k}{4} \int_C (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \times \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}') \frac{H_1^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|)}{|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|} d\boldsymbol{\rho}' \quad (35)$$

#### V. FORMULAÇÃO HÍBRIDA

Para união do problema interno e externo, visto que ambas funções utilizadas, triangulares e RPIM possuem uma propriedade delta de Kronecker, basta utilizar os mesmos pontos da interface para ambas regiões e forçar a continuidade das componentes tangenciais do campo elétrico e do campo magnético:

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \quad (36)$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{M} \quad (37)$$

A equação (36) é imposta diretamente no sistema matricial do problema interno em que  $i$  é um nó sobre a interface  $\Gamma$ :

$$K_{ij} = \nabla \phi_j(\mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (38)$$

Como  $J_z$  só é definida sobre  $\Gamma$ , as colunas de  $J_{ij}^K$  associadas aos nós  $j$  que não estão sobre a interface são eliminadas.

$$J_{ij}^K = \begin{cases} 0 & \forall i \in \Omega \\ -j\omega\mu\phi_j(\mathbf{x}_i) & \forall i \in \Gamma \end{cases} \quad (39)$$

O mesmo procedimento é feito para a equação (37):

$$E_{ij} = \phi_j(\mathbf{x}_i) \quad \forall i \in \Gamma \quad (40)$$

$$M_{ij}^E = -\phi_j(\mathbf{x}_i) \quad \forall i \in \Gamma \quad (41)$$

Por fim, as linhas do sistema (28) são linearmente combinadas. O parâmetro  $\alpha$  determina a proporção entre EFIE e MFIE utilizadas, neste trabalho adotou-se  $\alpha = 0,5$ .

$$Z^J = \alpha L^{zz} - (1 - \alpha)\eta K^{tz} \quad (42)$$

$$Z^M = \alpha K^{zt} + (1 - \alpha)\eta^{-1} L^{tt} \quad (43)$$

$$Z^V = \alpha V^E + (1 - \alpha)\eta V^H \quad (44)$$

Definindo  $n$  como o número de nós globais e  $m$  o número de nós na interface, o sistema global é calculado por:

$$\begin{bmatrix} K_{(n \times n)} & J_{(n \times m)}^K & 0_{(n \times m)} \\ E_{(m \times n)} & 0_{(m \times m)} & M_{(m \times m)}^E \\ 0_{(m \times n)} & Z_{(m \times m)}^J & Z_{(m \times m)}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ J_z \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n \times 1)} \\ 0_{(m \times 1)} \\ Z_{(m \times 1)}^V \end{bmatrix} \quad (45)$$

## VI. CASOS DE ESTUDO

### A. Cilindro Dielétrico Infinito

A formulação foi empregada em um problema em que a solução analítica é conhecida. O problema de espalhamento de uma onda TMz incidente sobre um cilindro dielétrico infinito. A figura 3 apresenta o problema em questão omitindo os nós internos para melhor visualização.

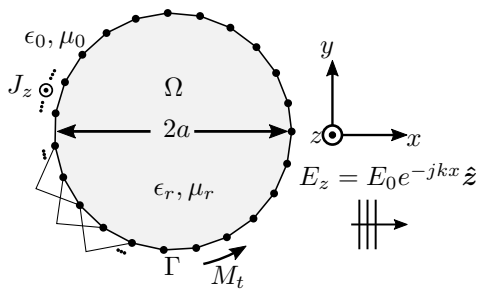


Fig. 3. Esta figura apresenta o caso de estudo. O problema de uma onda plana TMz incidente em um cilindro dielétrico com permissividade e permeabilidade relativas constantes. A figura apresenta as correntes equivalentes do problema exterior e as funções triangulares do MoM utilizadas.

Os resultados apresentados a seguir são para o caso do cilindro com  $a = 0,5\lambda$ ,  $n(N_i) = 936$ ,  $n(N_e) = 109$ . Em que  $\epsilon_r = 3-0,1j$ ,  $\mu_r = 1$  e o meio externo é o vácuo. O campo elétrico incidente é de uma onda plana TMz com  $E_z = e^{(-jkx)}(V/m)$ .

As figuras 4, 5 e 6 apresentam a comparação das soluções numéricas e analíticas das correntes elétrica e magnética equivalentes, e do módulo do campo elétrico, respectivamente.

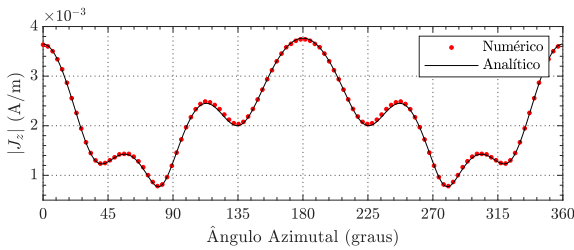


Fig. 4. Módulo da densidade corrente elétrica equivalente sobre  $C$ .

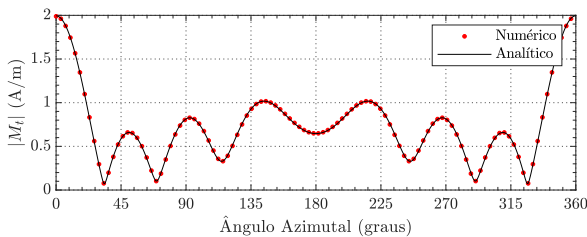


Fig. 5. Módulo da densidade corrente magnética equivalente sobre  $C$ .

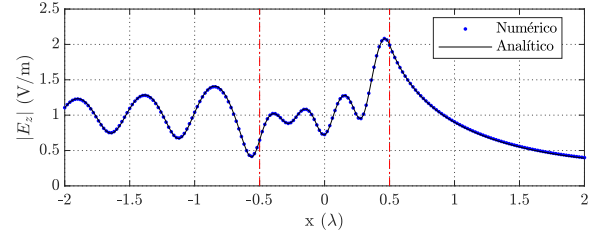


Fig. 6. Módulo do campo elétrico sobre  $y = 0$ . As retas verticais delimitam os limites do cilindro dielétrico.

A figura 7 apresenta a análise de convergência do problema em que o erro é calculado por:

$$L^2(X) = \frac{\sqrt{\int_{\nu_0} |X^{numérico} - X^{exato}|^2 d\nu}}{\sqrt{\int_{\nu_0} |X^{exato}|^2 d\nu}} \quad (46)$$

onde  $\nu$  para o campo é  $\Omega$  e para as correntes é  $\Gamma$ .

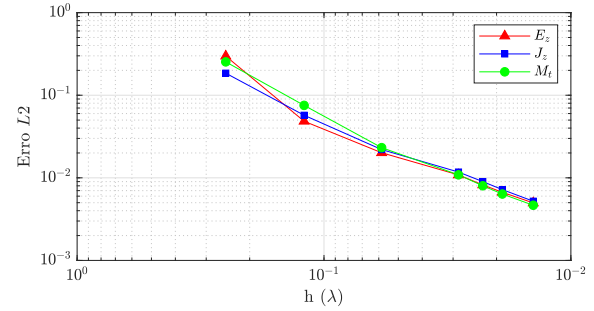


Fig. 7. Resultado comparativo do Erro L2 das soluções do campo elétrico dentro do cilindro e das correntes equivalentes elétrica e magnética no perímetro do cilindro.  $h$  representa a distância internodal média dos nós.

A figura 8 apresenta o módulo do campo elétrico em uma área limitada próximo ao cilindro dielétrico.

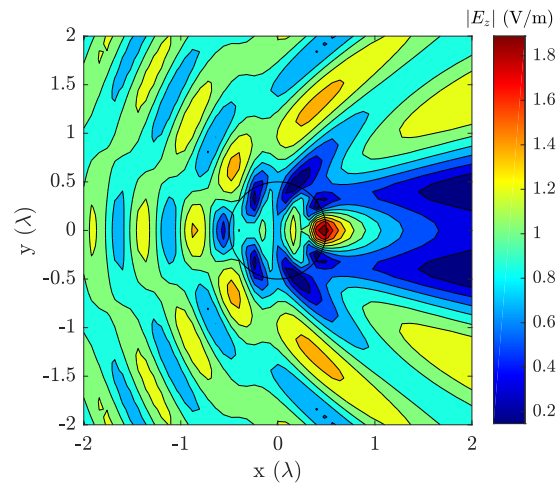


Fig. 8. Resultado do módulo do campo elétrico para o problema do cilindro dielétrico infinito. Nota-se ao centro a representação do perímetro do cilindro. O campo na região externa é calculado pelo MoM e o campo na região interna é calculado pelo MLPG.

### B. Lente de Luneburg

A formulação pode ser facilmente empregada na solução de problemas não homogêneos. A lente de Luneburg, figura 9, é um problema que não possui solução analítica, portanto a solução do campo elétrico foi comparada com o *Finite Element Method* (FEM).

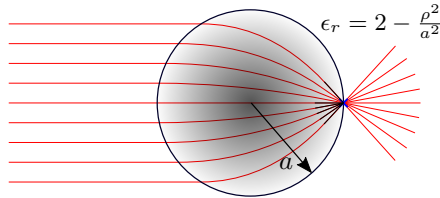


Fig. 9. Representação ótica de uma lente de Luneburg em duas dimensões com foco sobre seu contorno. Em que  $\rho$  é a distância radial considerando o centro do cilindro na origem do sistema de coordenadas polares.

A figura 10 apresenta o módulo do campo elétrico em uma região limitada. Já a figura 11 apresenta a comparação do módulo do campo elétrico entre o método híbrido e o FEM para uma lente com  $a = 2\lambda$ . O método FEM foi implementado com 23520 elementos triangulares em um disco de  $4,2\lambda$  e uma coroa circular externa PML com área de  $23\lambda^2$ . Para o MLPG-MoM foram utilizados  $n(N_i) = 4957$  e  $n(N_e) = 251$ .

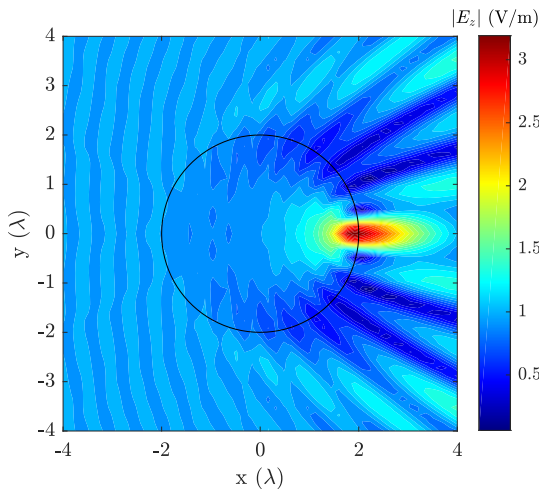


Fig. 10. Resultado do módulo do campo elétrico lente de Luneburg. Nota-se ao centro a representação do perímetro do cilindro. O campo na região externa é calculado pelo MoM e o campo na região interna é calculado pelo MLPG.

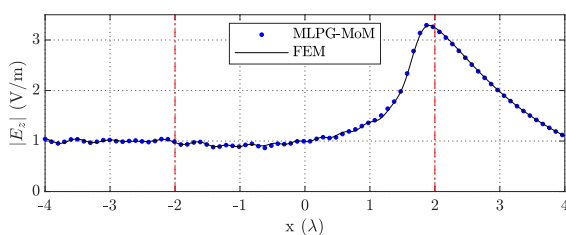


Fig. 11. Resultado do módulo do campo elétrico em  $y = 0$ . As retas verticais delimitam os limites da lente de Luneburg.

### VII. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a aplicação de uma técnica sem malha híbrida na solução de problemas de espalhamento em duas dimensões. A formulação baseada em MLPG com colocação, utiliza funções de forma geradas por RPIM com reprodução polinomial. A condição de contorno é imposta pela combinação de EFIE e MFIE através do MoM. A análise da polarização TE é obtida por dualidade.

Suas principais vantagens são diminuição do domínio utilizado ao comparar com técnicas que usam condições absorventes; teoricamente os campos não são refletidos na interface e a possibilidade de se calcular diretamente o campo próximo e distante a partir das correntes equivalentes.

Sua desvantagem, no entanto, está na necessidade de 10 a 15 nós por comprimento de onda na interface para o MoM convergir. Para problemas maiores, há necessidade de uma densa distribuição de nós no MLPG.

Como todo método verdadeiramente sem malha, não há necessidade de uma malha, apenas uma nuvem de nós distribuída no domínio. Todos os resultados foram obtidos com uma distribuição uniforme. O método apresentou resultados excelentes de erro nos problemas estudados.

### AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi apoiado e parcialmente financiado por CAPES/PROCAD (068419/14-01), CNPq e FAPEMIG.

### REFERÊNCIAS

- [1] LIU, M. B., and LIU, G. R. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments. *Archives of computational methods in engineering*, 2010, vol. 17, no 1, p. 25-76.
- [2] LU, Y. Y., BELYTSCHKO, T., and GU, L. A new implementation of the element free Galerkin method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1994, vol. 113, no 3-4, p. 397-414.
- [3] ATLURI, S. N., and ZHU, T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational mechanics*, 1998, vol. 22, no 2, p. 117-127.
- [4] RESENDE, U. C., DA ROCHA COPPOLI, E. H., and AFONSO, M. M. A meshless approach using EFG interpolating moving least-squares method in 2-D electromagnetic scattering analysis. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2015, vol. 51, no 3, p. 1-4.
- [5] NICOMEDES, W. L., MESQUITA, R. C., and DA SILVA MOREIRA, F. J. The meshless local Petrov-Galerkin method in two-dimensional electromagnetic wave analysis. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, vol. 60, no 4, p. 1957-1968.
- [6] LIU, G. R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. CRC press, 2009.
- [7] RESENDE, U. C., et al. A new Meshless-MoM hybrid method applied to the analysis of 2D electromagnetic scattering. In : *ISEF20 15*. Valence, 2015.
- [8] GIBSON, W. C. *The method of moments in electromagnetics*. Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [9] HARRINGTON, R. F. *Time-harmonic electromagnetic fields*. McGraw-Hill, 1961.
- [10] LUNEBERG, R. K. *Mathematical Theory of Optics*. Providence. 1944.
- [11] PETERSON, A. F., et al. *Computational methods for electromagnetics*. New York : IEEE press, 1998.
- [12] HOPPE, D. J., EPP, L. W., and LEE, J. F. A hybrid symmetric FEM/MOM formulation applied to scattering by inhomogeneous bodies of revolution. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 1994, vol. 42, no 6, p. 798-805.
- [13] LIU, G. R., and GU, Y. T. *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [14] GOLBERG, M. A., CHEN, C. S., and BOWMAN, H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, vol. 23, no 4, p. 285-296.