

Cálculo da Transformada Discreta de Fourier Fracionária com Complexidade Aritmética Reduzida

José R. de Oliveira Neto e Juliano B. Lima

Resumo— Neste artigo, é introduzido um novo método para o cálculo de uma transformada discreta de Fourier fracionária (DFrFT) com complexidade aritmética reduzida, quando comparado com a complexidade $\mathcal{O}(N^2)$ do cálculo direto. A abordagem proposta explora propriedades de uma autobase Hermite-Gaussiana da transformada discreta de Fourier recentemente introduzida na literatura, que é usada para definir a DFrFT; o método requer menos da metade do número de adições requerido por outros métodos do estado-da-arte e, quando utilizado na representação compacta de sinais no domínio fracionário, mais de 45% das multiplicações e 75% das adições são economizadas, em comparação a esses mesmos algoritmos.

Palavras-Chave— Transformada discreta de Fourier fracionária, autovetores Hermite-Gaussianos, algoritmos rápidos, complexidade aritmética.

Abstract— In this paper, we introduce a method for computing a discrete fractional Fourier transform (DFrFT) with reduced arithmetic complexity, when compared to the $\mathcal{O}(N^2)$ complexity of the corresponding direct computation. Our approach exploits properties of a recently introduced closed-form Hermite-Gaussian-like discrete Fourier transform eigenbasis, which is used to define the DFrFT; it requires less than half the number of additions demanded by other state-of-the-art methods and, when applied to compact representation of signals in the fractional domain, more than 45% of the multiplications and 75% of the additions are saved, when compared with the same algorithms.

Keywords— Discrete fractional Fourier transforms, Hermite-Gaussian eigenvectors, fast algorithms, arithmetic complexity.

I. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, a transformada de Fourier fracionária (FrFT, do inglês *fractional Fourier transform*) tem sido vastamente investigada e empregada em vários cenários de aplicação (ver [1], [2] e suas listas de referências). Tal transformada corresponde a uma generalização da respectiva transformada ordinária, em que potências não inteiras do operador integral correspondente são consideradas. Neste contexto, uma questão central concerne à possibilidade do cálculo digital dessa transformada. Provavelmente, o método mais popular para cálculo da FrFT é o proposto em [3], em que o núcleo da transformada é expresso como uma sucessão de operadores discretizados que são, então, multiplicados por um sinal de N pontos com complexidade aritmética subquadrática. Embora esta estratégia seja computacionalmente eficiente, ela leva à perda de certas propriedades da FrFT, tais como unitariedade, invertibilidade e aditividade de índices e, além do mais, sua aplicação possui algumas restrições [1], [2], [4].

José R. de Oliveira Neto: Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco e Juliano B. Lima: Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, E-mails: joserodrigues.oliveiraneto@ufpe.br, juliano_bandeira@ieee.org. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

Outra possibilidade é a definição de uma transformada discreta de Fourier fracionária (DFrFT, do inglês *discrete fractional Fourier transform*), que consiste, basicamente, na obtenção de um operador matricial \mathbf{F}^a , $a \in \mathbb{R}$, em que \mathbf{F} é a matriz da transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*). Isso é usualmente feito considerando a autodecomposição da matriz \mathbf{F} , que possibilita escrever

$$\mathbf{F}^a = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}^a\mathbf{E}^T; \quad (1)$$

Na última equação, se \mathbf{E} é for matriz ortogonal tendo em sua k -ésima coluna um vetor do tipo Hermite-Gaussiano (HGL, do inglês *Hermite-Gaussian-like*) da DFT de ordem k , o produto de \mathbf{F}^a por um sinal produzirá um resultado numericamente próximo ao obtido com o cálculo da FrFT (de tempo contínuo) do mesmo sinal¹.

Existem duas estratégias principais para construção de autovetores HGL da DFT. A primeira é baseada em matrizes que comutam com a matriz \mathbf{F} e depende de procedimentos que utilizam fórmulas não fechadas [5], [7], [8], [9], [10]; neste caso, mesmo se se assumir que os referidos autovetores são calculados *off-line*, o produto da matriz de transformação resultante, \mathbf{F}^a , por um vetor envolve $\mathcal{O}(N^2)$ operações aritméticas. A segunda abordagem é baseada em expressões analíticas (de fórmula fechada) combinadas com o método de matrizes geradoras [1], [11], [12]; também neste caso, a estrutura da matriz \mathbf{F}^a parece não sugerir claramente um modo que permita multiplicá-la com complexidade subquadrática por um vetor. Por outro lado, observa-se que algumas propriedades dos autovetores gerados utilizando a abordagem em questão permitem o cálculo da DFrFT correspondente com complexidade aritmética reduzida; isso se deve principalmente ao número de componentes com valor zero nos autovetores, que reduz o número de adições e multiplicações necessárias para o cálculo da transformada.

Neste artigo, introduz-se uma metodologia que utiliza as propriedades mencionadas acima para computar com complexidade aritmética reduzida a DFrFT baseada na autodecomposição do operador da DFT ordinária² de um vetor \mathbf{x} cujas componentes são números complexos. Em vez de considerar particularidades da estrutura da matriz \mathbf{F}^a e atacar diretamente o problema de realizar o produto $\mathbf{F}^a\mathbf{x}$, a abordagem descrita

¹Na verdade, existem várias abordagens para definir a DFrFT [5]. Em particular, se a expansão espectral em (1) for empregada com uma base de autovetores da DFT que não são HGL [6], a referida aproximação numérica não ocorre; nestes casos, embora a transformada obtida possua aplicações (em cifragem de imagens, por exemplo), elas não correspondem a uma versão discreta da *verdadeira* FrFT.

²A partir daqui, este método será referenciado apenas como “DFrFT baseada em autodecomposição”.

neste artigo considera a multiplicação sequencial à esquerda de \mathbf{x} por \mathbf{E}^T , Λ^a e \mathbf{E} . É demonstrado que a complexidade multiplicativa do método proposto é similar à apresentada em [4]³, sendo, de forma geral, um pouco menor. Por outro lado, a complexidade aditiva é reduzida para menos da metade da do algoritmo proposto em [4]. Além disso, a abordagem proposta é utilizada no cenário prático de representação compacta de sinais no domínio fracionário [13] (como descrito na Seção III), em que, para $N = 512$, por exemplo, o número de multiplicações necessárias é reduzida em cerca de 48%, quando comparado a [4].

O restante desse artigo está organizado como se segue:

- i Nas Seções II-A e II-B, explica-se como as simetrias, o suporte compacto e as componentes repetidas dos autovetores HGL da DFT podem ser explorados para reduzir o número de multiplicações e adições necessárias para o cálculo da DFrFT correspondente;
- ii Na Seção II-C, explica-se como contar o número de operações aritméticas necessárias para aplicar o método proposto;
- iii Na Seção II-D, os resultados do método proposto para o cálculo da DFrFT baseada na autodecomposição são comparados aos dos métodos encontrados na literatura. A técnica proposta requer um número de multiplicações um pouco menor e metade ou menos do número de adições, quando comparada com o, até então, mais eficiente método [4].
- iv Na Seção III, os resultados são validados a partir de experimentos computacionais em que a representação compacta de sinais no domínio fracionário é considerada. Neste cenário, em que se faz necessário realizar uma busca por uma ordem fracionária adequada à referida representação, o número de multiplicações e adições pode ser reduzido em até 48% e 78%, respectivamente.

II. CÁLCULO DA DFRFT COM COMPLEXIDADE ARITMÉTICA REDUZIDA

Nesta seção, é introduzido o método proposto para o cálculo eficiente da DFrFT baseada em autodecomposição. Tal transformada é definida empregando a base de autovetores da DFT $\{\Phi_m\}_{0 \leq m \leq N-1}$, construída segundo o método apresentado em [12], como colunas da matriz \mathbf{E} em (1). É considerada a expansão espectral da matriz \mathbf{F}^a , como mostrado na mesma equação, e são contados os números de multiplicações e adições necessários para obter

$$\mathbf{X}^{(a)} = (\mathbf{E}\Lambda^a\mathbf{E}^T)\mathbf{x}, \quad (2)$$

a DFrFT de um vetor de entrada \mathbf{x} cujas componentes são números complexos. Na última expressão, assume-se que \mathbf{x} é sequencialmente multiplicado à esquerda por \mathbf{E}^T , Λ^a e \mathbf{E} ,

produzindo os vetores intermediários

$$\mathbf{x}' = \mathbf{E}^T\mathbf{x}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x}'' = \Lambda^a\mathbf{x}', \quad (4)$$

$$\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{E}\mathbf{x}''; \quad (5)$$

o ponto-chave do método proposto é considerar algumas propriedades dos autovetores HGL da DFT da autobase $\{\Phi_m\}_{0 \leq m \leq N-1}$, que são estabelecidas e discutidas a seguir.

A. Simetrias e Suporte Compacto

É bem conhecido o fato de que qualquer autovetor da DFT possui simetria par ou simetria ímpar. Mais especificamente, autovetores relacionados aos autovalores ± 1 e $\pm i = \pm\sqrt{-1}$, são, respectivamente, de simetria par e de simetria ímpar [14]. Se esta propriedade for considerada, o cálculo do produto escalar entre um vetor de $\{\Phi_m\}_{0 \leq m \leq N-1}$ e o vetor de entrada \mathbf{x} , que é a multiplicação entre uma linha de \mathbf{E}^T e \mathbf{x} no produto matriz-vetor $\mathbf{x}' = \mathbf{E}^T\mathbf{x}$ em (3), pode ser realizado utilizando cerca de $N/2$ multiplicações. Esta propriedade também pode ser utilizada no produto matricial $\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{E}\mathbf{x}''$ em (5), em que um efeito similar em termos de multiplicações salvas é conseguido. Operações de adição também são salvas devido à simetria dos autovetores, porque algumas adições entre termos simetricamente posicionados de \mathbf{x} e \mathbf{x}'' podem ser pré-calculadas.

Devido à desigualdade (8) em [15], os autovetores $\{\Phi_m\}_{0 \leq m \leq N-1}$ têm o que é conhecido como *suporte compacto*. No contexto deste trabalho, isso significa que estes autovetores começam e terminam com seqüências de componentes nulas, entre as quais aparecem as componentes não-nulas. Este fato é ilustrado na Figura 1, em que as componentes não-nulas de cada um dos autovetores HGL da DFT de comprimento $N = 16$ são representadas como quadrados brancos ao longo do eixo n ; a simetria de cada vetor também é representada. Em geral, se Φ_m possuir simetria par, o número de componentes possivelmente não-nulas é, no máximo⁴,

$$\text{nonzero}(\Phi_m) = 2\lfloor(N+m+2)/4\rfloor + 1; \quad (6)$$

Se Φ_m possuir simetria ímpar, tal número é, no máximo,

$$\text{nonzero}(\Phi_m) = 2\lfloor(N+m+2)/4\rfloor. \quad (7)$$

Combinada com a simetria, esta propriedade permite economizar ainda mais operações aritméticas nos produtos matriciais (3) e (5). Para ser mais preciso, o cálculo do produto escalar entre um autovetor de simetria par Φ_m e um vetor de entrada \mathbf{x} pode ser realizado usando no máximo

$$\lfloor(N+m+2)/4\rfloor + 1 \quad (8)$$

multiplicações; similarmente, se Φ_m possuir simetria ímpar, este número é

$$\lfloor(N+m+2)/4\rfloor. \quad (9)$$

³O método dado em [4] é o que requer a menor complexidade aritmética para o cálculo da DFrFT baseada na autodecomposição de \mathbf{F} . Por isso, ao longo deste artigo, esta é a principal referência usada para comparação dos resultados alcançados com o método proposto.

⁴As exceções são os vetores Φ_{N-2} e Φ_{N-1} , para os quais tem-se $\text{nonzero}(\Phi_m) = N$; estes casos serão tratados separadamente ao longo do desenvolvimento.

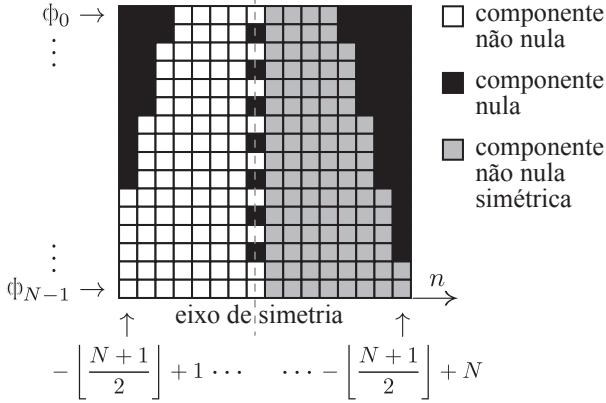


Fig. 1: Imagem da matriz \mathbf{E}^T , $N = 16$, em que simetrias e componentes nulas dos autovetores HGL da DFT podem ser observadas.

B. Componentes Repetidas

Simetrias à parte, verifica-se que alguns autovetores $\Phi_m = [\phi_m(n)]$, $n \in I_N$, $I_N := \{-M + 1, -M + 2, \dots, -M + N\}$ e $M = \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$, possuem componentes com valores absolutos repetidos. Isso também pode ser levado em consideração para reduzir a complexidade aritmética envolvida nos produtos matriciais em (3) e (5). Por exemplo, considere os seguintes vetores para $N = 8$, que são escritos no formato transposto para melhor visualização⁵:

$$\Phi_2^T = \begin{bmatrix} 0,168278385 \\ 0,574538345 \\ 0,168278385 \\ -0,475963149 \\ 0,168278385 \\ 0,574538345 \\ 0,168278385 \\ 0,000000000 \end{bmatrix}; \quad \Phi_3^T = \begin{bmatrix} -0,353553391 \\ -0,500000000 \\ 0,353553391 \\ 0,000000000 \\ -0,353553391 \\ 0,500000000 \\ 0,353553391 \\ 0,000000000 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\phi_2(-3) = \phi_2(-1)$, ao invés de requerer 4 multiplicações, o produto $\langle \Phi_2, \mathbf{x} \rangle$ requer 3 multiplicações. Uma redução similar pode ser realizada no cálculo de $\langle \Phi_3, \mathbf{x} \rangle$, porque $\phi_3(-3) = -\phi_3(-1)$. Essa característica é observada também para valores maiores de N . Para $N = 128$, por exemplo, tem-se $\phi_{123}(2) = \phi_{123}(60)$.

Adicionalmente, considera-se o formato peculiar de Φ_{N-1} e Φ_{N-2} ; com exceção da última componente, isto é, a $(-M + N)$ -ésima componente, os referidos vetores são formados por componentes com o mesmo valor absoluto e sinal alternado. Esta característica permite calcular o produto de Φ_{N-1} ou Φ_{N-2} por \mathbf{x} usando apenas 2 multiplicações.

Com base na discussão acima, foi realizada uma busca, para $N = 2^k$, $3 \leq k \leq 9$, como a intenção de encontrar todos os autovetores com componentes repetidas (simetrias à parte). Denotando por \mathbf{R}_N o conjunto dos índices de tais autovetores para um dado N , o número \mathbf{d}_m de componentes não-nulas de Φ_m , $m \in \mathbf{R}_N$, com valores absolutos distintos foi calculado.

⁵Embora as componentes dos autovetores sejam exibidas com nove casas decimais apenas, elas são, na verdade, armazenadas no formato de ponto flutuante com precisão dupla, isto é, 11 e 52 bits são usados para o expoente e a mantissa, respectivamente.

TABELA I: Autovetores Φ_m que têm componentes não-nulas com valores repetidos (simetrias à parte) e o respectivo número de componentes não-nulas com valores absolutos distintos \mathbf{d}_m .

N	m	\mathbf{d}_m
8	2, 3, 6, 7	3, 2, 2, 2
16	2, 3, 7, 11, 13, 14, 15	5, 3, 5, 5, 5, 2, 2
32	2, 3, 27, 29, 30, 31	9, 8, 9, 9, 2, 2
64	3, 7, 11, 59, 61, 62, 63	16, 17, 18, 17, 17, 2, 2
128	123, 125, 126, 127	33, 33, 2, 2
256	251, 253, 254, 255	65, 65, 2, 2
512	507, 509, 510, 511	129, 129, 2, 2

O resultado, que é mostrado na Tabela I, é considerado em seções futuras deste artigo, uma vez que a quantidade \mathbf{d}_m corresponde ao número de multiplicações necessárias para realizar o produto $\langle \Phi_m, \mathbf{x} \rangle$.

C. Números de Multiplicações e Adições

A complexidade multiplicativa \mathbf{M}_N para calcular a DFrFT de N pontos pode ser obtida considerando (8), (9) e a possível ocorrência de componentes repetidas (ver Seção II-B e Tabela I); também é considerado que o produto matriz-vetor em (4) requer $N - 1$ multiplicações complexas. Em geral, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_N = & 4 \times \sum_{\substack{m \text{ par;} \\ m \in \mathbf{R}_N}} (\lfloor (N + m + 2)/4 \rfloor + 1) \\ & + 4 \times \sum_{\substack{m \text{ ímpar;} \\ m \in \mathbf{R}_N}} \lfloor (N + m + 2)/4 \rfloor \\ & + 4 \times \sum_{m \in \mathbf{R}_N} \mathbf{d}_m + 3 \times (N - 1). \end{aligned} \quad (10)$$

A fórmula da complexidade aditiva (máxima) é derivada a seguir considerando apenas as componentes repetidas em Φ_{N-2} e Φ_{N-1} , e negligenciando as repetições de componentes que podem ocorrer em outros autovetores (ver Tabela I). Denotando por \mathbf{A}'_N o número de adições reais para obter $\mathbf{x}' = \mathbf{E}^T \mathbf{x}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_N = & 2 \times 2 \times \left(\frac{N}{2} - 1 \right) + 2 \times \sum_{m \text{ par}} (\lfloor (N + m + 2)/4 \rfloor) \\ & + 2 \times \sum_{\substack{m \text{ ímpar;} \\ m \neq N-1}} (\lfloor (N + m + 2)/4 \rfloor - 1) + 2. \end{aligned} \quad (11)$$

O número de adições reais vindas de $\mathbf{x}'' = \Lambda^a \mathbf{x}'$ é

$$\mathbf{A}''_N = 5 \times (N - 1). \quad (12)$$

Finalmente, denotando por \mathbf{A}'''_N o número de adições reais necessárias para obtenção de $\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{E} \mathbf{x}''$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'''_N = & 2 \times 6 + 2 \times \sum_{\substack{k=1 \\ N > 8}}^{N/4 - 2} (6 + 4k - 1) \\ & + 2 \times (N - 1) \times (\lfloor (N + 2)/4 \rfloor) \\ & + 2 \left(\frac{N}{2} - 1 \right) + 2. \end{aligned} \quad (13)$$

TABELA II: Número de multiplicações reais necessárias para o cálculo da DFrFT de N pontos utilizando diferentes abordagens.

N	direto	[16]	[4]	proposto
8	192	117	102	105
16	768	417	390	377
32	3.072	1.593	1.542	1.521
64	12.288	6.249	6.150	6.093
128	49.152	24.777	24.582	24.473
256	196.608	98.697	98.310	98.073
512	786.432	393.993	393.222	392.729

TABELA III: Número de adições reais necessárias para o cálculo da DFrFT de N pontos utilizando diferentes abordagens.

N	direto	[16]	[4]	proposto
8	432	279	270	131
16	1.760	987	990	455
32	7.104	3.747	3.774	1.691
64	28.544	14.643	14.718	6.459
128	114.432	57.939	58.110	25.211
256	458.240	230.547	230.910	99.579
512	1.833.984	919.827	920.574	395.771

Assim, o total de adições reais necessárias para o cálculo da DFrFT é

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{A}'_N + \mathbf{A}''_N + \mathbf{A}'''_N. \quad (14)$$

D. Análise Comparativa

Nesta seção, são apresentados os números de multiplicações e adições necessários para calcular a DFrFT proposta para vários valores de N e é realizada uma comparação com os números requeridos por outros métodos. Também é considerado o cálculo de uma DFrFT baseada em autodecomposição pelo método direto, o método dado em [16]⁶ e a proposta em [4]; este último método é, até então, o método com menor complexidade aritmética documentado na literatura.

Os referidos números são mostrados nas Tabelas II e III. A complexidade multiplicativa do método proposto é próxima da apresentada em [4], sendo, em geral, um pouco menor. Por outro lado, a complexidade aditiva é reduzida para menos de metade da necessária em [4].

III. SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Nesta seção, é considerada a aplicação da DFrFT na representação compacta de sinais no domínio fracionário de Fourier [13]. O propósito desta seção é validar, por meio de simulações, o emprego da transformada considerada ao longo deste artigo em tal cenário; a intenção é mostrar que é possível utilizar a DFrFT calculada com complexidade aritmética reduzida sem comprometimento de desempenho.

⁶O método dado em [16] é baseado no cálculo da DFrFT de comprimento N por meio do cálculo de uma transformada fracionária do cosseno e uma transformada fracionária do seno com comprimentos $N/2 + 1$ e $N/2 - 1$, respectivamente.

Além disso, especificamente para a aplicação em questão, mostra-se que a economia de operações aritméticas é ainda maior que a mencionada no último parágrafo da Seção II-D.

A representação do sinal em forma compacta no domínio fracionário tem bastante sido útil na restauração de sinais [17], amostragem esparsa [18], estimação de taxa *chirp* [19], e análise tempo-frequência [20], [21], por exemplo. Aqui, revisita-se a aplicação do método da norma mínima (MNM, do inglês *minimum norm method*) proposto em [13], que permite encontrar a ordem fracionária ótima a_{opt} , que leva um sinal de interesse para um domínio fracionário de Fourier em que sua representação seja a mais compacta possível. Utiliza-se como medida de compactação a norma- ℓ_1 ; é adotada uma estratégia de busca, de modo que o menor número possível de transformações precisem ser calculadas.

O sinal utilizado nos experimentos é o *chirp* de duas componentes dado por

$$s(t) = A_0 e^{i\pi(m_0 t^2 + 2f_0 t)} + A_1 e^{i\pi(m_1 t^2 + 2f_1 t)},$$

em que $m_0 = 0,1$ e $m_1 = 0,4$ são as *taxas de chirp*, $f_0 = 0,1$ e $f_1 = -0,1$ são as *frequências de deslocamento*, e $A_0 = 1$ e $A_1 = 1$ são as *amplitudes complexas*. O sinal $s(t)$ é amostrado para produzir o sinal de tempo discreto de comprimento $N = 512$. As configurações para a aplicação do MNM são as mesmas usadas na Seção III.A de [13]; assim, 55 transformadas são calculadas até que se encontre a ordem fracionária ótima. Na Tabela IV, são mostrados os resultados do MNM aplicado em dois diferentes modos:

- (i) é usada a Candan-DFrFT [7], calculada pelo algoritmo dado em [4];
- (ii) é usada a DFrFT calculada empregando o método proposto.

Na tabela, observa-se que, embora as ordens fracionárias ótimas encontradas por meio do MNM sejam relativamente próximas uma da outra, a norma- ℓ_1 no domínio da DFrFT proposta (modo (ii)) é menor que a no domínio da Candan-DFrFT (modo (i)); de qualquer forma, em todos os casos, o objetivo de representar o sinal de forma mais compacta foi claramente alcançado. Na Figura 2, em que a magnitude quadrática do sinal $s(t)$ é plotada para o sinal no domínio original e no domínio fracionário utilizando a ordem fracionária ótima encontrada, tem-se uma noção visual do resultado alcançado.

Os números totais de multiplicações e adições envolvidas na aplicação do MNM pelo método (i) podem ser calculados, para $N = 512$, usando as Tabelas II e III. Tais números são respectivamente dados por

$$55 \times 393.222 \approx 2,1627 \times 10^7$$

e

$$55 \times 920.574 \approx 5,0631 \times 10^7.$$

Diferentemente da transformada empregada no modo (i), a DFrFT proposta usada no modo (ii) permite pré-calculer o produto entre \mathbf{E}^T e o sinal a ser transformado (vide (3)), de modo que, para cada ordem fracionária avaliada durante o processo de busca, são necessárias novas operações aritméticas apenas no cálculo dos produtos matriz-vetor (4) e (5).

TABELA IV: Aplicação do método da norma mínima para o sinal *chirp* bi-componente usando (i) Candan-DFrFT [7] calculada pelo algoritmo dado em [4], (ii) DFrFT proposta.

Modo	$a_{\text{opt.}}$	Norma- ℓ_1^*	Multip. ($\times 10^7$)	Adições ($\times 10^7$)
(i)	1,1861	377,9506	2,1627	5,0631
(ii)	1,1141	317,7685	1,1037	1,1151

*A norma- ℓ_1 do sinal no domínio original (tempo) é 681,3125.

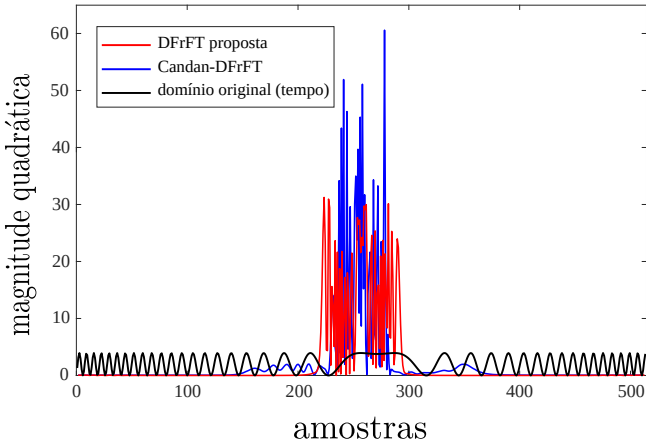


Fig. 2: Magnitude quadrática do sinal *chirp* bi-componente no domínio original (tempo) e no domínio fracionário utilizando o método da menor norma.

Esta estratégia provê uma economia de aproximadamente metade das multiplicações e adições contadas na Seção II-C. Mais especificamente, com base nas explicações dadas e considerando os termos nos somatórios em (10) e (14), são obtidos os seguintes números de multiplicações e adições, respectivamente, para o MNM aplicado no modo (ii):

$$195.598 + 55 \times 197.131 \approx 1,1037 \times 10^7$$

e

$$196.608 + 55 \times 199.163 \approx 1,1151 \times 10^7.$$

Com base nos resultados mostrados acima, que também estão contidos na Tabela IV, conclui-se que cerca de 50% das multiplicações e 78% das adições são economizadas, se o MNM for aplicado no modo (ii) ao invés do modo (i). Isso sugere que a DFrFT proposta pode ser utilizada durante a busca da ordem fracionária ótima no MNM, provendo benefícios significativos do ponto de vista de complexidade computacional e velocidade.

IV. CONCLUSÕES

Neste artigo, foi introduzido um método para cálculo eficiente de uma transformada discreta de Fourier fracionária baseada na autodecomposição do operador da transformada discreta de Fourier (ordinária). A abordagem proposta provê uma significativa redução na complexidade aritmética, quando comparada com outros métodos do estado-da-arte e, sobretudo, quando aplicada à compactação de sinais no domínio fracionário. Atualmente, têm sido investigadas propostas de aproximação no cálculo da DFrFT que permitam reduzir ainda

mais a sua complexidade aritmética. Além disso, implementações em hardware têm sido investigadas.

REFERÊNCIAS

- [1] J. R. de Oliveira Neto and J. B. Lima, "Discrete fractional Fourier transforms based on closed-form Hermite-Gaussian-like DFT eigenvectors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 23, pp. 6171–6184, December 2017.
- [2] A. Bultheel and H. E. M. Sulbaran, "Computation of the fractional Fourier transform," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 16, no. 3, pp. 182–202, May 2004.
- [3] H.M. Ozaktas, M.A. Kutay, and G. Bozdağı, "Digital computation of the fractional Fourier transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 25, no. 3, pp. 241–265, 1996.
- [4] D. Majorowska-Mech and A. Cariow, "A low-complexity approach to computation of the discrete fractional Fourier transform," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 36, no. 10, pp. 4118–4144, October 2017.
- [5] Xinhua Su, Ran Tao, and Xuejing Kang, "Analysis and comparison of discrete fractional Fourier transforms," *Signal Processing*, vol. 160, pp. 284 – 298, 2019.
- [6] M. H. Annaby, M. A. Rushdi, and E. A. Nehary, "Image encryption via discrete fractional Fourier-type transforms generated by random matrices," *Signal Processing: Image Communication*, vol. 49, pp. 25–46, November 2016.
- [7] C. Candan, M. Alper Kutay, and H. M. Ozaktas, "The discrete fractional Fourier transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 5, pp. 1329–1337, May 2000.
- [8] A. Serbes and L. Durak-Ata, "Efficient computation of DFT commuting matrices by a closed-form infinite order approximation to the second differentiation matrix," *Signal Processing*, vol. 91, no. 3, pp. 582 – 589, 2011, *Advances in Fractional Signals and Systems*.
- [9] I. Bhatta and B. Santhanam, "A comparative study of commuting matrix approaches for the discrete fractional Fourier transform," in *Proc. IEEE Signal Processing and Signal Processing Education Workshop*, Salt Lake City, UT, August 2015.
- [10] C. Candan, "On higher order approximations for Hermite-Gaussian functions and discrete fractional Fourier transforms," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 10, pp. 699–702, Oct 2007.
- [11] A. Kuznetsov, "Explicit Hermite-type eigenvectors of the discrete Fourier transform," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 36, no. 4, pp. 1443–1464, 2015.
- [12] J. R. de Oliveira Neto, J.B. Lima, and D. Panario, "A family of matrices for generating Hermite-Gaussian-like DFT eigenvectors," in *IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Calgary, Canada, April 2018, pp. 4379–4383.
- [13] A. Serbes, "Compact fractional Fourier domains," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, no. 4, pp. 427–431, April 2017.
- [14] J.H. McClellan and T.W. Parks, "Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier transform," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 20, no. 1, pp. 66–74, 1972.
- [15] X. Kang, F. Zhang, and R. Tao, "Multichannel random discrete fractional Fourier transform," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 22, no. 9, pp. 1340–1344, September 2015.
- [16] S.-C. Pei and M.-H. Yeh, "The discrete fractional cosine and sine transforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 6, pp. 1198–1207, June 2001.
- [17] A. Serbes and L. Durak-Ata, "Optimum signal and image recovery by the method of alternating projections in fractional Fourier domains," *Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simul.*, vol. 15, no. 3, pp. 675–689, March 2009.
- [18] H. Bu, R. Tao, X. Bai, and J. Zhao, "A novel SAR imaging algorithm based on compressed sensing," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 12, no. 5, pp. 1003–1007, May 2015.
- [19] L. Zheng and D. Shi, "Maximum amplitude method for estimating compact fractional Fourier domain," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, no. 3, pp. 293–296, March 2010.
- [20] G. Lu, M. Xiao, and P. Wei, "Adaptive short time fractional Fourier transform for time-frequency segmentation," *Electronics Letters*, vol. 52, no. 8, pp. 615–617, April 2016.
- [21] Y. T. H. Nguyen, D. McLernon, M. Ghogho, and S. A. R. Zaidi, "Sparse reconstruction of time-frequency representation using the fractional Fourier transform," in *Proc. International Conference on Recent Advances in Signal Processing, Telecommunications & Computing (SigTelCom)*, Da Nang, Vietnam, January 2017, pp. 16–20.