

Um Método Alternativo para o Cálculo da Probabilidade de Erro de Bit de Esquemas de Modulação QAM Sujeitos aos Desvanecimentos Rayleigh e Nakagami

Marcelo S. Alencar, Waslon T. A. Lopes, F. Madeiro e Wamberto J. L. Queiroz

Resumo—Este artigo apresenta um método alternativo para obtenção de expressões exatas para a probabilidade de erro de bit (BEP) de esquemas de modulação sujeitos a desvanecimento. O método modela o canal com desvanecimento como sujeito a um ruído aditivo, cuja distribuição de probabilidade é vista como resultado da razão entre as variáveis aleatória gaussiana e aquela que modela o processo de desvanecimento. O método usa a função cumulativa de probabilidade unidimensional desse ruído para obter expressões fechadas para a BEP de esquemas QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) sujeitos ao desvanecimento. Resultados de simulação, que corroboram os resultados experimentais, são apresentados.

Palavras-Chave—Probabilidade de erro de bit, Desvanecimento Rayleigh, Desvanecimento Nakagami, QAM.

Abstract—This paper presents an alternative method to obtain exact expressions for the bit error probability (BEP) of modulation schemes subject to fading. The method models the fading channel as an additive noise channel, in which the noise probability distribution is the ratio between the Gaussian random variable (r.v.) and the r.v. that models the fading process. The method uses additive noise the one-dimensional cumulative probability function to obtain closed-form expressions for the BEP of QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*) schemes subject to fading. Simulation results, that corroborate the theoretical results, are presented.

Keywords—Probabilidade de erro de bit, Desvanecimento Rayleigh, Desvanecimento Nakagami, Modulação QAM.

I. INTRODUÇÃO

O aumento do tráfego multimídia em sistemas de comunicações sem fio leva a uma necessidade crescente de largura de faixa. Técnicas de modulação espectralmente eficientes, tais como QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*), constituem alternativas adequadas para alcançar elevadas taxas de transmissão sem aumentar a largura de faixa de sistemas de comunicações. No presente trabalho é apresentado um método para obter expressões fechadas para a BEP de esquemas de modulação em canais com desvanecimento Rayleigh e Nakagami- m . O método consiste em modelar o canal com desvanecimento como um canal que o novo ruído aditivo incorpora em sua FCP o efeito do desvanecimento.

II. MODELO DO SISTEMA

Considere o sistema de comunicações sem fio em que o canal de comunicações é afetado pelo desvanecimento lento

Marcelo S. Alencar, Waslon T. A. Lopes, F. Madeiro e Wamberto J. L. Queiroz, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Brasil, e Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Campina Grande, Brasil. Francisco Madeiro, Escola Politécnica de Pernambuco, Universidade de Pernambuco, Recife, PB, Brasil. E-mails: {wamberto, madeiro, waslon, malencar}@iecom.org.br.

não-seletivo em frequência. Nesse caso, o sinal recebido $r_c(t)$ pode ser expresso como

$$r_c(t) = \alpha e^{-j\phi} s(t) + z(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

em que $s(t)$ representa o sinal transmitido, α denota a amplitude do desvanecimento, ϕ representa o desvio de fase devido ao canal, $z(t)$ denota o ruído aditivo gaussiano branco (AWGN, *additive white Gaussian noise*) e T corresponde ao intervalo de sinalização. Usando a representação em passa-baixas, $r_c(t)$, $s(t)$ e $z(t)$ são processos estocásticos complexos. Além disso, a condição de desvanecimento lento implica que o parâmetro multiplicativo pode ser considerado constante, pelo menos durante um intervalo de sinalização.

A amplitude do desvanecimento α é modelada por uma variável aleatória (v.a.) que condiciona o sinal transmitido. Considerando o desvanecimento do tipo Rayleigh, a função densidade de probabilidade (fdp) de α é dada por

$$p_A(\alpha) = 2\alpha e^{-\alpha^2} u(\alpha), \quad (2)$$

em que $u(\cdot)$ representa a função degrau unitário. Por outro lado, quando o desvanecimento é Nakagami, a fdp de α é dada por

$$p_A(\alpha) = \frac{2m^m \alpha^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} e^{-\frac{m\alpha^2}{\Omega}} u(\alpha), \quad (3)$$

em que $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma, Ω é a potência média do sinal transmitido e $m \geq 1/2$ é um parâmetro que controla a intensidade do desvanecimento. Grandes valores de m representam um desvanecimento suave, enquanto pequenos valores representam desvanecimento severo. Para o caso de $m=1$ o desvanecimento Nakagami- m corresponde a Rayleigh. O ruído aditivo $z(t)$ é um processo estocástico complexo com média nula e densidade espectral de potência $N_0/2$ em suas parte real e imaginária.

Supondo que o desvanecimento que afeta o canal é suficientemente lento, o desvio de fase ϕ pode ser estimado sem erro a partir do sinal recebido. Neste caso, o receptor pode compensar o desvio de fase provocado pelo canal (multiplicação de $r_c(t)$ por $e^{j\phi}$). Então, o sinal recebido resultante $r(t)$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} r(t) &= r_c(t) \cdot e^{j\phi} = \alpha s(t) + z(t) \cdot e^{j\phi} \\ &= \alpha s(t) + \eta(t). \end{aligned} \quad (4)$$

É importante notar que o ruído aditivo $\eta(t) = z(t) \cdot e^{j\phi}$ é também um processo estocástico complexo com média nula e densidade espectral de potência $N_0/2$ em suas parte real e

imaginária.. Isto ocorre porque a distribuição de probabilidade bidimensional $p_N(\eta)$ não é afetada pela compensação de fase, visto que esta distribuição é esfericamente simétrica [1, pp. 247].

Adota-se a notação da representação vetorial. Nesta representação, cada sinal $s(t)$ é completamente determinado por um vetor \mathbf{s} cujas componentes representam a decomposição do sinal em um conjunto de funções ortonormais escolhido convenientemente [1].

O critério de máxima probabilidade *a posteriori* [2] estabelece que o detector ótimo, a partir da observação de \mathbf{r} , seleciona $\tilde{s} = s_k$ como o sinal recebido quando a função de decisão

$$P(s_i)p_r(\mathbf{r}|\mathbf{s} = \mathbf{s}_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1,$$

é máxima para $i = k$, em que M denota o número de símbolos da constelação.

Usando o critério de máxima probabilidade *a posteriori* e considerando que os símbolos da constelação são equiprováveis, o receptor pode utilizar dois esquemas de detecção para determinar o símbolo transmitido mais provável a partir da observação ruidosa. Esses detectores podem ser definidos como [3]:

- Detetor I (DI): Compara \mathbf{r} com todos os símbolos da constelação (multiplicados por α) e escolhe como símbolo recebido o mais próximo a \mathbf{r} , isto é, o símbolo que minimiza a métrica $|\mathbf{r} - \alpha\mathbf{s}_i|$;
- Detetor II (DII): Compara \mathbf{r}/α com todos os símbolos da constelação e escolhe como símbolo recebido o mais próximo a \mathbf{r}/α , isto é, escolhe como símbolo recebido aquele que minimiza a métrica $|\mathbf{r}/\alpha - \mathbf{s}_i|$.

No que diz respeito à complexidade, mostrou-se em [3] que o detetor DII constitui uma alternativa mais interessante, visto que requer um número de operações inferior ao requerido pelo detetor DI. Mostrou-se também que, em se tratando do detetor DII, o canal com desvanecimento Rayleigh, após a compensação do desvanecimento (divisão de \mathbf{r} por α), opera sujeito a ruído aditivo, que é modelado como a razão entre uma variável aleatória (v.a.) gaussiana e uma v.a. com distribuição Rayleigh.

Considerando o detetor DII, a demodulação do sinal recebido utiliza a regra de decisão dada por

$$\tilde{s} = \arg \min_{s_i} \left| \frac{\mathbf{r}}{\alpha} - \mathbf{s}_i \right| \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1. \quad (5)$$

Neste esquema, após a compensação do desvanecimento (divisão de \mathbf{r} por α), o canal pode ser interpretado como sujeito a ruído aditivo porque

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \arg \min_{s_i} \left| \frac{\alpha\mathbf{s} + \boldsymbol{\eta}}{\alpha} - \mathbf{s}_i \right| = \arg \min_{s_i} \left| \mathbf{s} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{\alpha} - \mathbf{s}_i \right| \\ &= \arg \min_{s_i} |\mathbf{s} + \mathbf{m} - \mathbf{s}_i|, \end{aligned} \quad (6)$$

em que $\mathbf{m} = \boldsymbol{\eta}/\alpha$ é o ruído aditivo, que é modelado como o quociente entre entre uma v.a gaussiana e outra com distribuição correspondente ao tipo de desvanecimento. Para facilitar a notação, quando for usada a variável \mathbf{m} o desvanecimento será Rayleigh enquanto que a variável \mathbf{L} será usada para o desvanecimento Nakagami.

III. DETERMINAÇÃO DA FCP DO RUÍDO ADITIVO

Nesta seção é calculada a função cumulativa de probabilidade (FCP) do ruído aditivo $m(t)$ obtido pela razão entre uma

v.a. gaussiana e uma v.a. que representa o desvanecimento Rayleigh e o desvanecimento Nakagami.

O método proposto no presente trabalho para obter expressões fechadas para a probabilidade de erro de *bit* de esquemas de modulação sujeitos ao desvanecimento consiste em usar a FCP de \mathcal{M} .

A. Desvanecimento Rayleigh

A v.a. pode ser escrita como $\mathcal{M} = N/A$, em que N denota um processo aleatório gaussiano com média zero e variância $N_0/2$ por dimensão, ou seja,

$$p_N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\eta^2/N_0}. \quad (7)$$

Por sua vez, A é uma v.a. real com distribuição de Rayleigh dada pela Equação (2).

Sob essas condições, a fdp de \mathcal{M} é dada por [4]

$$p_{\mathcal{M}}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha| p_{NA}(m\alpha, \alpha) d\alpha, \quad (8)$$

em que $p_{NA}(\eta, \alpha)$ é a probabilidade conjunta de N e A dada por

$$p_{NA}(\eta, \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \alpha e^{-(\alpha^2 + \eta^2/N_0)} u(\alpha). \quad (9)$$

Desta forma, a fdp de \mathcal{M} é dada por

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{M}}(m) &= \int_0^{\infty} \alpha \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \alpha e^{-(\alpha^2 + m^2 \alpha^2/N_0)} d\alpha \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2(1+m^2/N_0)} d\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Por meio de manipulações algébricas, a FCP de \mathcal{M} , $P_{\mathcal{M}}(m)$, é obtida integrando a expressão anterior, usando [5, Equação 2.264]. Assim, a FCP de \mathcal{M} é dada por

$$P_{\mathcal{M}}(m) = \int_{-\infty}^m p_{\mathcal{M}}(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{\sqrt{m^2 + N_0}} + 1 \right). \quad (11)$$

B. Desvanecimento Nakagami

Considerando o desvanecimento Nakagami, a fdp da v.a. $L = \frac{N}{\alpha}$, pode ser obtida de forma similar à seção anterior.

Neste caso, a fdp conjunta $p(n, \alpha)$ pode ser escrita como

$$p(n, \alpha) = p_N(n)p_{\alpha}(\alpha) = \frac{2m^m \alpha^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} e^{-\frac{m\alpha^2}{\Omega}} \frac{e^{-\frac{n^2}{N_0}}}{\sqrt{\pi N_0}} u(\alpha) \quad (12)$$

e a fdp conjunta $p(l, \alpha)$ pode ser obtida substituindo $n = l\alpha$ em (12).

Deste modo, a fdp $p_L(l)$ é determinada usando (12) de modo que

$$\begin{aligned} p_L(l) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha| 2m^m \alpha^{2m-1}}{\Gamma(m)\Omega^m} \frac{e^{-\frac{m\alpha^2}{\Omega}}}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{l^2 \alpha^2}{N_0}} u(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \frac{m^m}{\Gamma(m)} \frac{1}{\Omega^m} \int_0^{\infty} \alpha^{2m} e^{-\alpha^2 \left(\frac{m}{\Omega} + \frac{l^2}{N_0} \right)} d\alpha. \end{aligned} \quad (13)$$

Pode ser observado que a integral em (13) é da forma

$$\int_0^{\infty} x^{2m} e^{-\rho x^2} dx \quad (14)$$

o que leva a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{2m} e^{-\rho x^2} dx &= \int_0^{\infty} x^{2m} e^{-(\sqrt{\rho}x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2\rho^{(m+\frac{1}{2})}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Assim,

$$\int_0^{\infty} \alpha^{2m} e^{-\alpha^2\left(\frac{m}{N_0} + \frac{l^2}{N_0}\right)} d\alpha = \frac{1}{2} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{l^2}{N_0} + \frac{m}{N_0}\right)^{-(m+\frac{1}{2})}. \quad (16)$$

Substituindo o resultado de (13), obtém-se a fdp de L , que representa o novo ruído (modelado como a razão entre duas variáveis aleatórias). Logo [6],

$$p_L(l) = \frac{m^m}{\sqrt{\pi}\Omega^m} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{N_0}\Gamma(m)} \left(\frac{l^2\Omega + mN_0}{N_0\Omega}\right)^{-m-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Sem perda da generalidade, pode-se considerar $\Omega = 1$ e a FCP de L , $P_L(l)$ é dada pela integral seguinte

$$\begin{aligned} P_L(l) &= \int_{-\infty}^l p_L(x) dx = \frac{m^m N_0^m}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \times \\ &\int_{-\infty}^l (x^2 + N_0 m)^{-\frac{2m+1}{2}} dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Para valores não inteiros¹ de m , a última integral imprópria em (18) pode ser expressa como [8]

$$\int (x^2 + a)^{-\frac{2m+1}{2}} dx = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{a}\right) a^{-(m+\frac{1}{2})}, \quad (19)$$

em que ${}_2F_1(a, b; c; x)$ é conhecida como a Função Gaussiana Hipergeométrica [9]. diversity.

O determinação do resultado anterior quando x se aproxima de $-\infty$ é feito considerando a forma integral de ${}_2F_1(a, b; c; x)$,

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a} dt, \quad (20)$$

e tomando o limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{2}\right). \quad (21)$$

¹Uma abordagem considerando valores inteiros de m pode ser obtida em [7].

Este limite pode ser calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) &= \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\Gamma(1-m)} \int_0^1 t^{m-\frac{1}{2}}(1-t)^{-m} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(1+tx^2)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\Gamma(1-m)} \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{-m} dt \\ &= -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)B(m, 1-m)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\Gamma(1-m)}, \quad 0 < m < 1, \end{aligned} \quad (22)$$

em que $B(m, 1-m)$ é o valor da função Beta em m e $1-m$, $0 < m < 1$ [8].

A FCP de L para $m > 1$ é obtida considerando

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{e} \quad \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad x < 0. \quad (23)$$

Aplicando estes resultados para determinar o valor de $P_L(l)$ em (18), segue que

$$\begin{aligned} P_L(l) &= \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m)} \left\{ \frac{l}{\sqrt{N_0 m}} \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{l^2}{N_0 m}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)B(m, 1-m)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)\Gamma(1-m)} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

IV. BEP PARA O ESQUEMA M -QAM

Apesar de muitos trabalhos terem sido desenvolvidos com o propósito de avaliar o desempenho do esquema QAM em termos de probabilidade de erro de *bit* (BEP), só recentemente, em um artigo de Cho e Yoon [10], foi apresentada uma expressão fechada para a BEP do esquema QAM com dimensão arbitrária de constelação (esquema M -QAM), considerando um canal com ruído aditivo gaussiano branco (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*).

Esta seção usa os resultados obtidos por Cho e Yoon em [10] para obter uma expressão fechada para a BEP do esquema M -QAM quadrado (*square M-QAM*) por um canal com desvanecimento Rayleigh quando o mapeamento de Gray é empregado. A expressão exata obtida no presente artigo apresenta-se como uma forma conveniente de avaliar o desempenho do esquema QAM para vários casos de interesse prático.

Com base na consistência do mapeamento de *bit* de uma constelação submetida ao código de Gray [11], Cho e Yoon obtiveram em [10] uma expressão para a BEP do esquema M -QAM por um canal AWGN, dada por

$$\begin{aligned} P_{M\text{-QAM}} &= \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \right. \\ &\quad \left. \operatorname{erfc} \left((2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (25)$$

em que

$$w(i, k, M) = (-1)^{\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} \rfloor} \cdot \left(2^{k-1} - \left\lfloor \frac{i \cdot 2^{k-1}}{\sqrt{M}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right), \quad (26)$$

$\gamma = E_b/N_0$ denota a relação sinal-ruído (SNR) média por *bit*, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor que x , e $\text{erfc}(\cdot)$ denota a função erro complementar, dada por

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (27)$$

Uma contribuição relevante de Cho e Yoon [10] foi exprimir a BEP do esquema M -QAM por um canal AWGN em termos da soma ponderada de funções erro complementar. Os pesos $w(i, k, M)$ incorporam o efeito, na BEP, da k -ésima posição de *bit* em um símbolo com $\log_2 M$ *bits*. Note que o termo $\text{erfc} \left((2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right)$ em (25) corresponde a duas vezes a probabilidade de que o ruído aditivo gaussiano exceda $(2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}}$. Os pesos em (26) incorporam a influência da taxa de erro do k -ésimo *bit* de uma palavra-código com $\log_2 M$ *bits* na taxa de erro total do sistema. Em canais aditivos não-gaussianos, esses pesos podem ser usados em conjunto com a função cumulativa de probabilidade (FCP) do ruído aditivo correspondente para determinar a BEP do esquema M -QAM.

A. Desvanecimento Rayleigh

Considerando o canal com desvanecimento Rayleigh, a FCP da v.a. que modela o ruído aditivo correspondente é dada por (11). Portanto, duas vezes a probabilidade de que o ruído aditivo $m(t)$ exceda $(2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}}$ é dada por

$$2 \times P \left(m \geq (2i+1) \sqrt{\frac{3 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}} \right) = \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)N_0}}}{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)N_0} + 1}} \right). \quad (28)$$

Usando (28) e os pesos em (26), a expressão para a BEP do esquema M -QAM sujeito ao desvanecimento Rayleigh, $P_{M\text{-QAM, Ray}}$, é finalmente dada por

$$P_{M\text{-QAM, Ray}} = \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \sum_{k=1}^{\log_2 \sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} \left\{ w(i, k, M) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)}}}{\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2 M \cdot \gamma}{2(M-1)} + 1}} \right) \right\}. \quad (29)$$

B. Desvanecimento Nakagami

Considerando canais com desvanecimento Nakagami- m , a probabilidade de que o novo ruído aditivo $l(t)$ exceda

$$\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{(M-1)}} \text{ pode ser escrita como } \text{Prob} \left(l \geq \sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{(M-1)}} \right) = 1 - P_L \left(\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{(M-1)}} \right). \quad (30)$$

Usando o resultado anterior e a FCP obtida em (24), chega-se a

$$P_L \left(\sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{(M-1)}} \right) = \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(m)} \sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{m(M-1) N_0}} \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{m(M-1) N_0} \right) + \frac{B(m, 1-m)}{2\Gamma(m)\Gamma(1-m)}. \quad (31)$$

Assim,

$$2\text{Prob} \left(l \geq \sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{(M-1)}} \right) = 2 \left\{ 1 - \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{m(M-1) N_0}} \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3(2i+1)^2 \log_2(M) E_b}{m(M-1) N_0} \right) - \frac{B(m, 1-m)}{2\Gamma(m)\Gamma(1-m)} \right\}. \quad (32)$$

Além disso, a probabilidade de erro de *bit* $P_b(k)$ do esquema M -QAM pode ser escrita como

$$P_b(k) = \frac{2}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} w(i, k, M) \times \left\{ 1 - \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a_i(M)\gamma}{m}} \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a_i(M)\gamma}{m} \right) - \frac{B(m, 1-m)}{2\Gamma(m)\Gamma(1-m)} \right\}, \quad (33)$$

em que

$$a_i(M) = \frac{3(2i+1)^2 \log_2(M)}{M-1}. \quad (34)$$

Finalmente, considerando a representação da função Beta em (23), a probabilidade de erro $P_b(k)$ pode ser expressa como

$$P_b(k) = \frac{2}{\sqrt{M}} \sum_{i=0}^{(1-2^{-k})\sqrt{M}-1} w(i, k, M) \times \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m)\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a_i(M)\gamma}{m}} \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{a_i(M)\gamma}{m} \right) \right\}. \quad (35)$$

V. RESULTADOS

Nesta seção são apresentados resultados de simulação de Monte Carlo que servem para validar as expressões obtidas no artigo.

Resultados numéricos obtidos a partir da expressão fechada para a BEP do esquema M -QAM sujeito ao desvanecimento Rayleigh são apresentados na Figura 1, que mostra a BEP em função da SNR por *bit* para $M = 4, 16, 64$ e 256 . Conforme mostra a figura, os resultados numéricos, obtidos de (26) e (29), que cerca de 3–4 dB de SNR devem ser investidos para transmitir um *bit* extra por componente (dois *bits* extras por símbolo) para manter a probabilidade de erro de *bit* média em 10^{-2} .

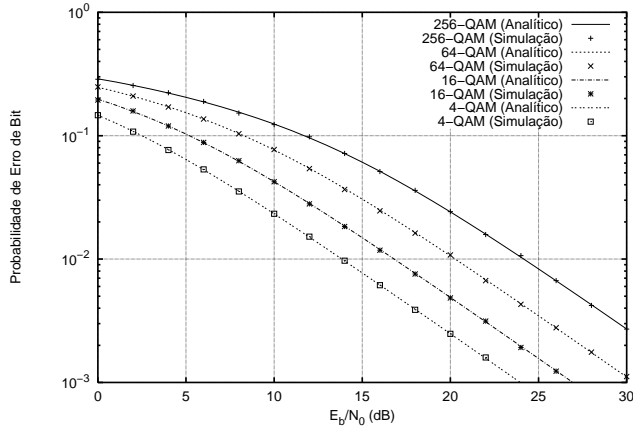


Fig. 1. Probabilidade de erro de *bit* do esquema M -QAM em função da relação sinal-ruído por *bit* (E_b/N_0), considerando um canal com desvanecimento Rayleigh.

Também foram determinadas curvas de probabilidade de erro para a constelação 64-QAM obtidas a partir de (35) e estão apresentadas na Fig. 2. As curvas foram obtidas considerando vários valores do parâmetro m em um canal com desvanecimento Nakagami- m . Para um valor fixo de SNR pode ser observado que a BEP aumenta com a diminuição de m até 0.51. Para a modulação 64-QAM observa-se que aproximadamente 5 dB devem ser investidos na SNR do canal para manter a BEP em torno de 10^{-2} quando o parâmetro m varia de 0,80 para 0,60. Nota-se também que para SNR igual a 30 dB, a BEP para $m = 0.51$ é aproximadamente dez vezes maior do que aquela para $m = 0.95$.

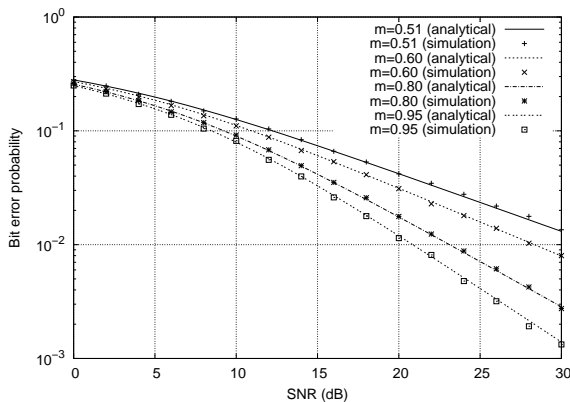


Fig. 2. Probabilidade de erro de *bit* do esquema 64-QAM sujeito ao desvanecimento Nakagami- m para diferentes valores de m , $0.5 < m < 1$.

Na Fig. 3, as curvas de BEP são agrupadas para um m fixo e vários valores de M . Nota-se na Fig. 3 que o esquema 256-QAM é mais susceptível ao desvanecimento que o esquema 16-QAM. Este é um resultado esperado pois, dada um SNR, a distância euclidiana entre dois símbolos distintos da constelação 256-QAM é menor que a respectiva distância na constelação 16-QAM.

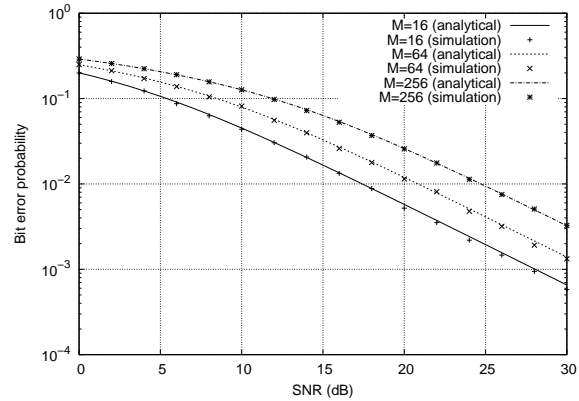


Fig. 3. Probabilidade de erro de *bit* do esquema M -QAM sujeito ao desvanecimento Nakagami- m para $m = 0.95$ e diferentes valores de M .

VI. CONCLUSION

Este artigo apresentou um método alternativo para o cálculo da probabilidade de erro de esquemas de modulação sujeitos ao desvanecimento Rayleigh e Nakagami- m . Neste enfoque, o canal com desvanecimento é visto como afetado apenas pelo ruído aditivo responsável por incorporar em sua fdp o efeito do desvanecimento. Expressões fechadas e exatas são obtidas para a probabilidade de erro de *bit* do esquema de modulação M -QAM.

REFERÊNCIAS

- [1] J. M. Wozencraft and I. M. Jacobs. *Principles of Communication Engineering*. John Wiley and Sons, 1965.
- [2] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, New York, third edition, 1995.
- [3] W. T. A. Lopes and M. S. Alencar. "QPSK Detection Schemes for Rayleigh Fading Channels". In *Proceedings of the IEEE International Telecommunications Symposium (ITS'02)*, Natal, RN, Brazil, September 2002.
- [4] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, third edition, 1991.
- [5] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1979.
- [6] W. J. L. Queiroz, W. T. A. Lopes, F. Madeiro and M. S. Alencar. "Bit Error Probability of M-QAM and $I \times J$ -QAM Modulation Schemes in Nakagami Fading". In *Proceedings of the International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC'07)*, pp. 807–811, Salvador, BA, October 2007.
- [7] W. J. L. Queiroz, W. T. A. Lopes, F. Madeiro and M. S. Alencar. "An Alternative Method to Compute the Bit Error Probability of Modulation Schemes Subject to Nakagami- m Fading". *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2010, pp. 12, 2010.
- [8] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.
- [9] T. Q. Duong, H. Shin and E.-K. Hong. "Error Probability of Binary and M -ary Signals with Spatial Diversity in Nakagami- q (Hoyt) Fading Channels". *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, vol. 2007, pp. 8, 2007.
- [10] K. Cho and D. Yoon. "On the General BER Expression of One- and Two-Dimensional Amplitude Modulations". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 7, pp. 1074–1080, July 2002.
- [11] P. J. Lee. "Computation of the Bit Error Rate of Coherent M -ary PSK with Gray Code Bit Mapping". *IEEE Transactions on Communications*, vol. 34, no. 5, pp. 488–491, May 1986.