

# Matrizes de Medida Determinísticas Ótimas para Amostragem Compressiva Usando Bases Biortogonais

Marcio P. Pereira<sup>1</sup>, Lisandro Lovisolo<sup>2</sup>, Eduardo A. B. da Silva<sup>1</sup>

1-PEE/COPPE/DEL/Poli, UFRJ, Brasil, 2-PROSAICO - PEL/DETEL - UERJ, Brasil

e-mails: mpp@ieee.org, eduardo@lps.ufrj.br, lisandro@uerj.br

**Resumo**—O paradigma da amostragem compressiva permite reconstruir sinais esparsos em algum domínio com um erro aceitável suficientemente pequeno usando uma quantidade de medidas bem menor que a resultante do critério de Nyquist. Nesse paradigma, em geral, empregam-se medidas aleatórias obtidas projetando-se o sinal sobre funções de medida e se reconstrói o sinal a partir das medidas obtidas considerando-se a minimização da norma  $l_1$ . Neste trabalho, investiga-se a utilização de matrizes de medidas determinísticas e seu desempenho do ponto de vista do compromisso taxa×distorção. Resultados experimentais indicam que o uso de matrizes de medidas determinísticas obtém desempenho taxa×distorção melhor que o emprego de matrizes aleatórias quando utiliza-se o critério de minimização da norma  $l_1$  na reconstrução. Além disso, para o caso de sinais esparsos em bases biortogonais, apresenta-se um método para o projeto de matrizes de medidas determinísticas de coerência mínima, caso este que em geral melhora ainda mais o desempenho taxa×distorção.

**Palavras-Chave**—Amostragem Compressiva, Processamento de Sinais, Compressão de Sinais, Bases Biortogonais.

**Abstract**—Compressive Sensing (CS) allows for reconstructing sparse signals within a low acceptable error using far less measurements than stipulated by the Nyquist criterion. In the CS paradigm one usually employs random measurements by means of projections on a sensing matrix and reconstructs the signal from these measurements through  $l_1$  norm minimization. In this work, the use of deterministic sensing matrices is investigated, in the context of rate-distortion performance. Experimental results show that the use of deterministic sensing matrices provides better rate-distortion performance than the use of random ones when  $l_1$  norm minimization is employed for reconstruction. In addition, for the cases the signal is sparse on a biorthogonal basis, we propose a method for designing deterministic sensing matrices with minimum coherence, which provides further rate-distortion performance.

**Keywords**—Compressive Sensing, Signal Processing, Signal Compression, Biorthogonal Bases.

## I. INTRODUÇÃO

Amostragem e compressão de sinais são largamente empregadas há bastante tempo. Recentemente, uma nova abordagem para realizar essas tarefas conjuntamente tem sido pesquisada: Amostragem Compressiva (CS), do inglês, *Compressed Sensing* [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Seu objetivo é amostrar em sinal considerando que o mesmo é esparso em algum domínio. Isso é conseguido projetando o sinal em matrizes de medida conhecidas, que são projetadas não em função do sinal, mas em função da base na qual se espera que o sinal seja esparso. Algumas dessas medidas são então armazenadas ou transmitidas e posteriormente usadas para reconstruir o sinal.

Um sinal  $s \in \mathbb{R}^N$  é dito esparso se pode-se representá-lo usando  $K < N$  valores. Por exemplo, se  $s$  possui somente  $K < N$  componentes não nulas em uma base qualquer do espaço  $N$ -dimensional, ele é esparso e sua “esparsidade” é a sua norma  $l_0$  (no caso,  $K$ ) – a quantidade de amostras não nulas do vetor.

O problema de reconstruir o sinal é passado para o equipamento “receptor” que deverá empregar algoritmos de otimização para realizar essa reconstrução com um erro aceitável. Assim, trabalhos anteriores têm considerado dois problemas centrais: o algoritmo empregado para reconstruir o sinal e a construção das chamadas matrizes de medidas.

## II. RECONSTRUÇÃO NA AMOSTRAGEM COMPRESSIVA

Como acima discutido, a amostragem compressiva (CS) [3], [4], [5] explora o conceito de esparsidade.  $s \in \mathbb{R}^N$  é esparso se pode ser representado usando  $K \ll N$  valores ou medidas. Assume-se que existe  $\Psi$  tal que

$$s = \Psi x \text{ e } \|s\|_0 = K, \quad (1)$$

onde  $\|\cdot\|_i$  é a norma  $l_i$  de  $\cdot$ . Coletam-se  $M$  ( $K \leq M < N$ ) medidas de  $\mathbf{x}$  usando  $\Phi$  cujas linhas são as funções de medida  $\phi_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ .

As medidas coletadas são empregadas para reconstruir  $\mathbf{x}$ . Deve-se reparar que

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \bar{\Psi} \mathbf{s}, \quad (2)$$

na qual  $\bar{A}$  é a inversa de  $A$ . Como se assume que  $\mathbf{s}$  é esparso – isto é, possui poucas coordenadas não nulas – deve-se procurar por  $\hat{\mathbf{s}}$  o mais esparso tal que

$$\mathbf{y} = \Phi \bar{\Psi} \hat{\mathbf{s}}. \quad (3)$$

Isso equivale a procurar por

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}} \|\Psi \hat{\mathbf{x}}\|_0, \text{ sujeito a } \Phi \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y}. \quad (4)$$

Repare que desta forma, só a matriz de medida e os valores das medidas coletadas são conhecidos e não as funções de medidas (subconjunto de linhas da matriz de medida) especificamente empregadas para um sinal. Assim, esse é um problema NP-Completo, por isso, alternativamente, minimiza-se a norma  $l_1$  para resolvê-lo. Demonstra-se que com essa abordagem, obtém-se uma reconstrução adequada com grande probabilidade. Mais especificamente, demonstra-se que  $\text{Prob}(\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 < \epsilon)$  é grande, mesmo para  $\epsilon$  pequeno [5], [3].

### III. PROJETO DE MATRIZES DE MEDIDA

Uma das questões relevantes para CS é a construção da matriz de medida. Em [4] discute-se que  $\Phi$  deve ser o mais incoerente possível com  $\Psi$ . A coerência [7] entre duas bases  $\Psi$  e  $\Phi$  do  $\mathbb{R}^N$  é

$$\mu(\Psi, \Phi^T) = \max_{i,j \in [0, N-1]} \frac{|\langle \psi_i, \phi_j \rangle|}{\|\psi_i\|_2 \|\phi_j\|_2}, \quad (5)$$

na qual  $\psi_i$  são as linhas de  $\Psi$  e  $\phi_j$  as colunas de  $\Phi$ . Uma forma popular de se obter  $\phi_i$  incoerentes com bases quaisquer é usar funções chamadas *noiselets* [4], que dão origem a vetores compostos de  $+1$ 's e  $-1$ 's aleatórios. Consegue-se mostrar que matrizes de medida construídas a partir de *noiselets* tendem a possuir baixa coerência com bases nas quais imagens costuma ser esparsas [3], [4], [5], [6]. De fato, *noiselets* são as matrizes mais largamente empregadas em *Compressive Sensing*. Entretanto, dada uma base, *noiselets* não são necessariamente os vetores mais incoerentes possível com a base. Neste trabalho, nós propomos um método para determinar, para uma dada base, vetores o mais incoerentes possível com ela, tanto para o caso ortogonal quanto para o biortogonal. Em seguida, apresentamos resultados experimentais usando as matrizes de medida propostas quando se aplica a quantização dos coeficientes medidos para a compressão de imagens através de *Compressive Sensing*. Começamos apresentando na

seção a seguir como construir deterministicamente matrizes de medida maximamente incoerentes a uma dada base ortogonal e em sequência expandimos o resultado para bases biortogonais.

### IV. MATRIZES DE MEDIDA DETERMINÍSTICAS MAXIMAMENTE INCOERENTES

Um vetor  $\mathbf{v}$  é maximamente incoerente a uma base  $B$  quando está o mais distante possível dos elementos  $\mathbf{b}_j$  de  $B$  ou de seus simétricos (i.e.,  $-\mathbf{b}_j$ ). Como  $B$  é uma base ortonormal, tem-se

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^N h_j \mathbf{b}_j. \quad (6)$$

Assim,

$$\mu(B, \mathbf{v}) = \max_i \frac{\left| \left\langle \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^N h_j \mathbf{b}_j \right\rangle \right|}{\sum_{j=1}^N |h_j|^2}. \quad (7)$$

Logo, para encontrar  $\min_{\mathbf{v}} \mu(B, \mathbf{v})$ , deve-se resolver

$$\mathbf{v} = \min_{\{h_1, \dots, h_N\}} \max_i \frac{\left| \left\langle \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^N h_j \mathbf{b}_j \right\rangle \right|}{\sum_{j=1}^N |h_j|^2}. \quad (8)$$

Uma solução para o problema acima é  $\mathbf{v}$  equidistante de todos os elementos de  $B$  ou seus simétricos. Isso equivale a

$$\left| \left\langle \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^N h_j \mathbf{b}_j \right\rangle \right| = C, \quad \forall i \in [1 \dots N], \quad (9)$$

na qual  $C$  é uma constante.

Para a base canônica (eixos de  $\mathbb{R}^N$ ), soluções são dadas pelos vértices do hipercubo. Assim,  $\mathbf{v}$  terá coordenadas  $\pm \frac{1}{\sqrt{N}}$ . Desta forma a base de Hadamard é maximamente incoerente à canônica. Como qualquer base é uma rotação da canônica, pode-se encontrar uma matriz de medidas maximamente incoerente a qualquer base ortonormal. Encontra-se  $\Phi$  maximamente incoerente a  $\Psi$  rotacionando-se os vértices do hipercubo usando a rotação inversa à transformação da base canônica em  $\Psi$ , isto é,

$$\Phi = \bar{\Psi} \mathbf{H}, \quad (10)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz da base de Hadamard.

### V. EXTENSÃO PARA TRANSFORMADAS BIORTOGONAIS

Bases biortogonais têm sido empregadas para a compressão de imagens, pois tendem a gerar representações mais esparsas do que bases ortogonais. Isso motiva a extensão do resultado acima para bases correspondentes a transformadas biortogonais.

Quando as linhas de  $\bar{\Psi}$  possuem norma unitária, viu-se acima como gerar  $\Phi$  de forma maximamente incoerente, escolhendo-se vetores equidistantes de todos os elementos da base. Seja uma transformada biortogonal  $\Psi$  com inversa  $\bar{\Psi}$ , pode-se normalizar os elementos de síntese  $\bar{\psi}_i$  e obter as bases de análise e síntese correspondentes  $\Psi'$  e  $\bar{\Psi}'$  a partir de

$$\bar{\psi}'_i = \frac{\bar{\psi}_i}{\|\bar{\psi}_i\|} \text{ e } \psi'_i = \psi_i \|\bar{\psi}_i\|. \quad (11)$$

Essas operações não alteram as direções dos vetores, logo não altera-se a coerência em relação a qualquer conjunto de vetores. Assim, um conjunto de vetores maximamente incoerente a uma base biortogonal  $\Psi$  é obtido através de  $\bar{\Psi}'$ , como mostrado na seção anterior, isto é

$$\Phi = \bar{\Psi}' \mathbf{H}, \quad (12)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz da base de Hadamard.

## VI. RESULTADOS

Aplicou-se diferentes matrizes de mediadas para comprimir as imagens Lena e Phantom ( $256 \times 256$ ), ver Figura 1. As Figuras 2 e 3 apresentam as curvas taxa  $\times$  distorção (PSNR) obtidas com as diferentes matrizes de medida. Para obter essas curvas varia-se a quantidade de medidas tomadas de cada imagem (20000, 40000, 45000, 50000, 55000 e 60000) e aplica-se diferentes quantizadores às medidas [8]. As combinações empregadas são:

- Base DCT (*Discrete cosine transform*) com *Noiselets* – DCT\*Noiselets;
- Base DCT com medidas determinísticas (eq. (10)) – DCT\*H;
- Base DWT (*Discrete Wavelet Transform*), gerada de *Coiflets*, com *Noiselets* – Coiflets\*Noiselets;
- Base DWT, gerada de *Coiflets*, com medidas determinísticas (eq. (10)) – Coiflets\*H;
- Base DWT biortogonal (CDF 9-7) com *Noiselets* – CDF9-7\*Noiselets;
- Base DWT biortogonal (CDF 9-7) com medidas determinísticas (eq. (12)) – CDF9-7\*H;

Dos resultados apresentados, observa-se que o emprego das medidas determinísticas maximamente incoerentes, eq. (10) e eq. (12) tende a prover melhores resultados que quando se emprega Noiselets. Os melhores resultados são obtidos usando a abordagem proposta e a base biortogonal CDF 9-7. Além disso, para todas as bases, o uso de *Noiselets* se mostrou inferior ao uso de matrizes de medida determinísticas. As linhas horizontais nessas figuras apresentam os PSNRs quando usam-se 20000, 40000, 45000, 50000 e 55000 medidas, e são atingidos com a combinação Hadamard-CDF9-7.



Fig. 1. Imagens Originais: a) Lena e b) Phantom.

## VII. CONCLUSÃO

Mostrou-se como obter matrizes de medidas maximamente incoerentes determinísticas a partir da transformação onde o sinal é assumido esparsos. Resultados experimentais indicam que ao usar-se a norma  $l_1$  para reconstruir o sinal a partir das medidas, essas matrizes conferem ganhos em termos de taxa  $\times$  distorção.

## REFERÊNCIAS

- [1] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489–509, February 2006.
- [2] R. Baraniuk, “A lecture on compressive sensing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 4, pp. 118–121, July 2007.
- [3] J. Romberg, “Imaging via compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 2, pp. 14–20, March 2008.
- [4] E. Candès and R. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 21–30, March 2008.
- [5] E. Candès and T. Tao, “Decoding by linear programming,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203–4215, December 2005.
- [6] A. Schulz, E. da Silva, and L. Velho, “Compressive sensing,” *Publicações Matemáticas, 27º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA*, 2009.
- [7] J. A. Tropp, “Greed is good: algorithmic results for sparse approximation,” *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 50, pp. 2231–2241, 2004.
- [8] A. Schulz, E. da Silva, and L. Velho, “On the empirical rate-distortion performance of compressive sensing,” *IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 3049–3052, November 2009.

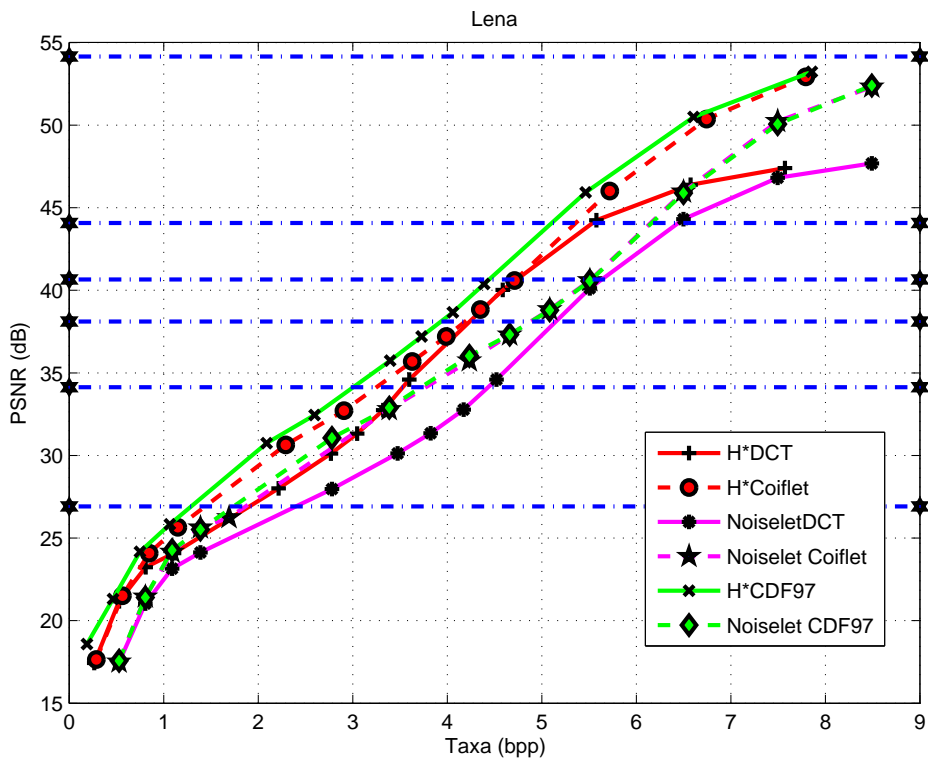


Fig. 2. Taxa  $\times$  PSNR para a imagem “Lena”, para diferentes combinações de bases e matrizes de medida

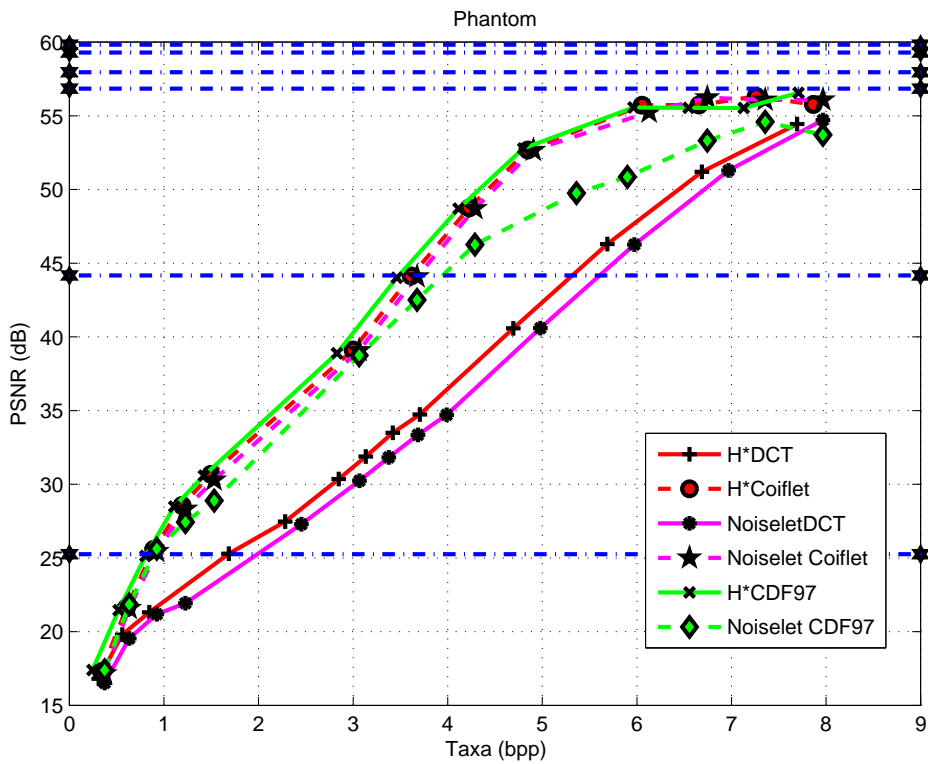


Fig. 3. Taxa  $\times$  PSNR para a imagem sintética “Phantom”, para diferentes combinações de bases e matrizes de medida