

Filtragem ótima para melhorar o desempenho de estimadores ML-DOA

Marco Cazarotto e Amauri Lopes

Resumo—Em [1] propomos melhorar o desempenho de alguns estimadores de direção de chegada (DOA) usando arranjo de sensores. Consideramos os estimadores baseados no critério da máxima verossimilhança (ML) que geram candidatas à estimativa DOA e selecionam as melhores candidatas através do critério ML. Nossa proposta modifica o processo de seleção de candidatas usando uma nova matriz de covariância dos dados recebidos, calculada após uma filtragem ótima destes dados para redução de ruído. Este trabalho é uma continuidade de [1], com novas propostas de função custo. Resultados de simulações indicam uma melhoria do desempenho na estimação DOA para pequenos valores da relação sinal-ruído, com uma consequente atenuação do efeito de limiar.

Palavras-Chave—Arranjo de sensores, Estimação de direção de chegada, Estimador de máxima verossimilhança, Filtragem ótima.

Abstract—In [1] we propose to improve the performance of some direction of arrival (DOA) estimators using array of sensors. We consider those maximum likelihood (ML) estimators that generate some DOA candidates and select one of them through an ML criterion. Our proposal modifies the candidate selection process using a new sample covariance matrix of the received data, calculated after a optimum filtering. This work is a continuity of [1], with new proposals for cost function. Simulation results indicate an improvement of the performance at low signal-to-noise ratios (SNR) and a considerable reduction of the threshold SNR.

Keywords—Array processing, Direction of arrival estimation, Maximum likelihood estimation, Optimum filtering.

I. INTRODUÇÃO

Neste trabalho abordamos o problema de estimação DOA utilizando o Arranjo Linear Uniforme ou ULA (*Uniform Linear Array*). Neste contexto, algumas pesquisas estão direcionadas para o desenvolvimento de métodos de alta resolução baseados no critério de Máxima Verossimilhança (ML) [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]. Este trabalho é uma continuidade de [1], onde introduzimos o uso da filtragem ótima dos dados e uma correspondente modificação da função de verossimilhança usada no processo de seleção de candidatas a estimativas DOA. Estamos interessados no caso de sinais de faixa estreita de frequências e um cenário com condições críticas em termos de resolução espacial e relação sinal-ruído (SNR), comumente encontrado em aplicações de RADAR (*Radio Detection and Ranging*) [9]. Propomos e comparamos três opções de função custo, sendo que a primeira já foi apresentada em [1], enquanto as outras duas opções são inéditas. Como este trabalho é uma

continuidade de [1], iremos usar uma redação muito próxima para podemos expor os conceitos que já foram apresentados.

O estimador ML-DOA baseia-se na minimização de uma função custo não-linear e não-quadrática, que demanda uma busca multidimensional para o mínimo global [4]. Esta busca resulta em um esforço computacional proibitivo. Para contornar esse problema, alguns métodos DOA têm sido propostos, baseados em implementação iterativa do estimador ML-DOA. Entre eles se destacam [10], [3], MODE [5], MODEX [6] e MODEX Modificado [7]. Um problema comum a todos esses métodos é a notável degradação de desempenho quando a SNR ou o número de dados são reduzidos a valores críticos, produzindo o chamado efeito de limiar [2], [8].

Tendo em conta este comportamento, propomos em [1] modificar o MODEX e o MODEX Modificado, a fim de melhorar seu desempenho na região de limiar. A modificação proposta consiste em melhorar o processo de seleção de candidatas destes métodos. A seleção original limita o desempenho para pequenos valores de SNR. Para demonstramos este fato, selecionamos a melhor combinação de raízes produzidas, isto é, aquelas que minimizam a soma dos erros quadráticos em relação aos ângulos DOA verdadeiros. O desempenho é muito melhor do que o do MODEX e MODEX Modificado. Demonstramos também que a componente do ruído na matriz de covariância é responsável por limitar o desempenho dos métodos MODEX e MODEX Modificado. Assim, propomos melhorar o desempenho filtrando os sinais recebidos, de modo a reduzir os efeitos do ruído, e calculando a nova matriz de covariância dos sinais filtrados. Enquanto o critério ML original faz uso da matriz de covariância tradicional, propomos em [1] substituir esta por uma matriz resultante de uma filtragem para redução de ruído. Neste novo trabalho propomos duas opções para esta substituição, além daquela já apresentada em [1], resultando em três, sendo a análise e comparação destas a principal contribuição deste trabalho.

A. Modelo de Sinal

Adotamos o modelo clássico de sinal descrito na literatura em (e.g. [5], [3], [6], [7]). Suponha um arranjo linear uniforme de N ($N > M$) sensores. Estes sensores estão uniformemente espaçados de meio comprimento de onda. Suponha também M ondas planas de faixa estreita que estão incidindo no arranjo com ângulos $\phi = [\phi_1 \dots \phi_M]^T$, medidos em relação à normal do arranjo ($[\cdot]^T$ denota a transposição). Este problema de estimação dos ângulos $\{\phi_m\}$ pode ser transformado em um problema de estimação de frequência [2],

$$\omega_m = \pi \sin(\phi_m), \quad m = 1, \dots, M, (1)$$

no seguinte modelo:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2)$$

onde $\mathbf{y}_k \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ é o k -ésimo vetor de dados (*snapshots*), K é o número de *snapshots*, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_M]$ é uma matriz de Vandermonde dos vetores de direção $\mathbf{a}_m = [1 \ e^{j\omega_m} \dots \ e^{j(N-1)\omega_m}]^T$, $\mathbf{x}_k \in \mathcal{C}^{M \times 1}$ é o vetor sinal, $\mathbf{n}_k \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ é o vetor ruído. O número M de fontes é assumido ser conhecido. O sinal e o ruído são processos gaussianos, complexos, independentes, ergódicos, de média zero com as seguintes características de segunda ordem: $E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_l^\dagger\} = \mathbf{C} \delta_{k,l}$, $E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_l^T\} = \mathbf{0}$, $E\{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_l^\dagger\} = \sigma^2 \mathbf{I} \delta_{k,l}$, $E\{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_l^T\} = \mathbf{0}$, onde $[\cdot]^\dagger$ denota o complexo conjugado, \mathbf{C} é uma matriz de covariância desconhecida, $\delta_{k,l}$ é o operador delta de Kronecker, \mathbf{I} é a matriz identidade e σ^2 é a potência desconhecida do ruído.

Consideramos o modelo condicional (CM), seguindo o conceito e notação adotados em [4]. A matriz de covariância \mathbf{y}_k é $\mathbf{R}_y = E\{\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\dagger\} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{A}^\dagger + \sigma^2 \mathbf{I}$. Sua estimativa é classicamente dada por [1], por $\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\dagger$.

II. ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, MODE, MODEX E MODEX MODIFICADO

Esta seção descreve brevemente os métodos DOA envolvidos no trabalho. Nosso objetivo é apresentar informações mínimas necessárias para descrever claramente nossa proposta. Mais detalhes sobre os métodos correspondentes podem ser encontrados em [1] e [7].

Como consideramos o modelo condicional, as estimativas de Máxima Verossimilhança de ω são obtidas resolvendo

$$\omega_{ML} = \arg \min_{\theta} \text{tr}\{\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y\}, \quad (3)$$

onde $\text{tr}[\mathbf{M}]$ denota o traço da matriz \mathbf{M} , $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A$, $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\dagger$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta)$ e $\theta \in \mathfrak{R}^{M \times 1}$ é um vetor de frequências associados aos ângulos de chegada [3], [11].

O problema em (3) demanda, geralmente, uma busca multidimensional do mínimo global. Para contornar o esforço computacional requerido por tal busca, o MODE [5] reparametriza o problema ML em termos dos coeficientes b_m , $m = 0, \dots, M$, de um polinômio $b(z)$ definido por

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M = b_0 \prod_{m=1}^M (z - e^{j\omega_m}), \quad (4)$$

onde os zeros são $e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, \dots, e^{j\omega_M}$, de forma que o problema de otimização em (3) passa a ser encontrar os coeficientes do polinômio $b(z)$, e posteriormente calcular as frequências correspondentes às raízes deste polinômio. Adicionalmente, o MODE usa uma restrição ao subespaço de sinal para melhorar a eficiência das estimativas. O valor final \mathbf{b}_{MODE} , é usado para calcular os coeficientes do polinômio $b(z)$ e as frequências são estimadas computando suas raízes.

O problema relacionado com o MODE está no fato que, para pequenos valores de SNR e poucos *snapshots*, o MODE sofre uma degradação de desempenho levando ao efeito de limiar [4], [6]. Este comportamento motivou a busca de modificações

no MODE visando melhorar o limiar de desempenho, conservar a ótima eficiência assintótica e a complexidade moderada. O MODEX [6] e sua versão melhorada MODEX Modificado [7] são métodos eficientes baseados no MODE.

O MODEX emprega o polinômio estendido

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M + b_{(M+1)} + \dots + b_{(M+P)} \quad (5)$$

na reparametrização do problema ML, onde P é um inteiro arbitrário tal que $0 < P < (N - M)$. O objetivo é gerar raízes extras para melhorar os modelos para os subespaços de ruído e sinal.

Para garantir a eficiência assintótica, as M raízes do MODE convencional são calculadas e adicionadas às $(M + P)$ novas raízes. A seleção das melhores M raízes dentre todas as $(2M + P)$ candidatas é realizada testando todas as combinações possíveis de M raízes via o critério ML dado por (3), com $\theta \subset \Theta$, onde Θ é o conjunto de todas as combinações possíveis das raízes MODEX.

Em 2003, Lopes *et al.* [7] apresentaram o MODEX Modificado, similar ao MODEX mas com melhor desempenho e menor esforço computacional. Este método modifica a geração das raízes extras realizada pelo MODEX para reduzir o número de raízes e melhorá-las. As raízes do MODEX Modificado são obtidas calculando três diferentes soluções MODE, cada uma com uma restrição de não-trivialidade distinta. Somente uma solução é obtida através do algoritmo MODE completo. As outras duas soluções são obtidas usando o cálculo realizado pela primeira solução. Observe que o MODEX Modificado gera $3M$ candidatas.

Na próxima seção iremos analisar o processo de seleção de candidatas dos métodos MODEX e MODEX Modificado.

III. SELEÇÃO ÓTIMA

Em [1], discutimos o processo de seleção de raízes dos métodos MODEX e MODEX Modificado. Comprovamos que o método de seleção de raízes não seleciona as melhores candidatas. Vamos apresentar novamente essa discussão de forma resumida.

O MODEX e o MODEX Modificado tem o mesmo processo de seleção de raízes, então vamos apenas considerar o segundo por obter o melhor resultado, mas as conclusões apresentadas neste trabalho também se aplicam ao MODEX.

A melhor combinação de raízes é aquela que minimiza a soma do erro quadrático entre cada frequência estimada e a correspondente verdadeira. Portanto, a melhor combinação é

$$\omega_{otimo} = \arg \min_{\hat{\omega} \subset \Phi} \sum_{m=1}^M (\hat{\omega}_m - \omega_m)^2, \quad (6)$$

onde Φ é o conjunto de todas as combinações possíveis das candidatas geradas, $\hat{\omega}_m$ é o m -ésimo elemento de uma combinação $\hat{\omega} \subset \Phi$ e ω_m é o parâmetro verdadeiro.

Ainda em [1], propomos um método que chamamos de Seleção Ótima, onde este deriva da própria escolha de raízes dos mínimos quadrados (6). A Figura 1 apresenta os desempenhos do MODEX Modificado, da Seleção Ótima e do Limite de Cramer-Rao [5] para o mesmo cenário utilizado em [1], [5], com ângulos DOA em $\phi_1 = 10^\circ$ e $\phi_1 = 15^\circ$. O desempenho

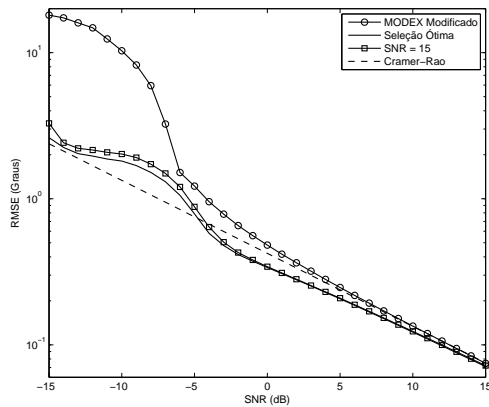


Fig. 1. Desempenho dos métodos MODEX Modificado e Seleção Ótima.

foi avaliado com base nos erros das suas estimativas, através do RMSE (*Root-Mean-Square-Error*).

Concluímos através da Figura 1, que o desempenho da Seleção Ótima é melhor do que o do MODEX Modificado, principalmente quando a SNR se torna menor que -6 dB. Isso permite concluir que o processo de seleção de raízes deste último não seleciona as melhores candidatas quando reduzimos a SNR.

O desempenho ruim do processo de seleção do MODEX Modificado pode ser explicado observando que o critério ML determinístico na expressão (3) depende de \mathbf{P}_A^\perp e $\hat{\mathbf{R}}_y$. A matriz \mathbf{P}_A^\perp depende somente da combinação das raízes, as quais são as mesmas para qualquer processo de seleção. Portanto, o desempenho ruim é devido ao ruído presente em $\hat{\mathbf{R}}_y$. A fim de corroborar esta conclusão, computamos o desempenho do MODEX Modificado quando uma matriz de covariância com ruído reduzido é utilizada, isto é, para todos os valores da SNR na Figura 1, realizamos o processo de seleção de raízes usando a matriz de covariância correspondente à SNR de 15 dB. O desempenho correspondente, chamado seleção $SNR = 15$ na Figura 1, é praticamente idêntico ao da seleção ótima.

IV. PROPOSTA: FILTRAGEM DOS *snapshots*

Como ficou comprovado na seção III, o MODEX Modificado não seleciona as melhores raízes e esse problema está relacionado com o ruído presente na matriz de covariância estimada, $\hat{\mathbf{R}}_y$. Em vista disso, iremos propor um processo para reduzir este ruído, baseado em uma filtragem dos *snapshots*. Nesta seção iremos revisar o processo de filtragem a ser aplicado a cada *snapshot* introduzido em [1].

Vamos definir filtro FIR com função de sistema dada por

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} \dots + h_L z^{-L}. \quad (7)$$

Convolvendo a resposta ao impulso do filtro definido pela expressão (7) com (2), obtemos na saída do filtro uma sequência \mathbf{z}_{kL} de comprimento $N + L$ que pode ser descrita como

$$\mathbf{z}_{kL} = \mathbf{H}_L \mathbf{y}_k, \quad (8)$$

onde $\mathbf{z}_{kL} \in \mathcal{C}^{(N+L) \times 1}$ é o vetor das saídas do filtro (*snapshot* filtrado) e $\mathbf{H}_L \in \mathcal{C}^{(N+L) \times (N)}$ é a matriz de convolução.

Já demonstramos em [1] que o critério de maximização do SNR leva a um problema de otimização:

$$\mathbf{h}_{ol} = \arg \max_{\mathbf{h}} \frac{\mathbf{h}^\dagger \mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^\dagger \mathbf{h}}{\mathbf{h}^\dagger \mathbf{h}}, \text{ sujeito a } \mathbf{h}^\dagger \mathbf{h} = 1, \quad (9)$$

onde a matriz $\mathbf{A}_l \in \mathcal{C}^{(L+1) \times M}$ é composta por $L + 1$ linhas da matriz \mathbf{A} , onde l é o índice da amostra na saída do filtro.

Para qualquer escolha de L sujeito a $0 < L < N$, conseguimos escrever a expressão para a SNR na saída envolvendo todos os coeficientes do filtro. Com isso, configuramos um problema clássico de filtragem ótima, onde temos uma solução conhecida. A solução de (9) é o *eigenfilter* [12] para o qual \mathbf{h}_{ol} é o autovetor $\mathbf{v}_l \in \mathcal{C}^{(L+1) \times 1}$ associado ao maior autovalor da matriz $\mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^\dagger$, ou seja,

$$\mathbf{h}_{ol} = [h_L^* h_{L-1}^* \dots h_0^*]^T = \mathbf{v}_l. \quad (10)$$

Dado que o ruído é branco, \mathbf{v}_l é também o autovetor associado ao maior autovalor da matriz $\mathbf{R}_{y_l} = \mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^\dagger + \sigma^2 \mathbf{I}$. Observe que \mathbf{R}_{y_l} é uma submatriz de \mathbf{R}_y tal que seus elementos são dados por $(\mathbf{R}_{y_l})_{i,j} = (\mathbf{R}_y)_{i,j}$, para $i, j = l-L, \dots, l$. Portanto, \mathbf{R}_{y_l} é um bloco ao longo da diagonal principal de \mathbf{R}_y .

Levando em conta que não conhecemos \mathbf{R}_y nem \mathbf{R}_{y_l} , podemos usar a submatriz correspondente $\hat{\mathbf{R}}_{y_l}$ da matriz de covariância $\hat{\mathbf{R}}_y$ para obter uma estimativa $\hat{\mathbf{v}}_l$ da solução ótima $\mathbf{h}_{ol} = \mathbf{v}_l$.

Dado um valor de L , podemos escolher qualquer uma das $(N - L)$ submatrizes $\hat{\mathbf{R}}_{y_l}$, $l = L + 1, \dots, N$, e a solução correspondente $\hat{\mathbf{v}}_l$. Alternativamente, podemos utilizar a média das submatrizes $\hat{\mathbf{R}}_{y_l}$ de acordo com

$$\hat{\mathbf{R}}_{yL} = \frac{1}{N - L} \sum_{l=1}^{N-L} \hat{\mathbf{R}}_{y_l}, \quad (11)$$

e podemos usar a solução $\mathbf{h}_{oL} = \hat{\mathbf{v}}_L$, onde $\hat{\mathbf{v}}_L$ é o autovetor correspondente ao maior autovalor de $\hat{\mathbf{R}}_{yL}$.

Uma vez definido o filtro ótimo, devemos calcular a nova matriz de covariância. Usando o vetor de *snapshot* filtrado \mathbf{z}_{kL} dado por (8), a nova matriz de covariância estimada será

$$\hat{\mathbf{R}}_{zL} = \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_y \mathbf{H}_L^\dagger, \quad (12)$$

onde $\mathbf{H}_L \in \mathcal{C}^{(N+L) \times (N)}$ e, portanto, $\hat{\mathbf{R}}_{zL} \in \mathcal{C}^{(N+L) \times (N+L)}$. Com isso $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$ dependerá da ordem do filtro empregado.

De posse da matriz $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$, devemos usá-la no processo de seleção de candidatas, substituindo $\hat{\mathbf{R}}_y$ na função custo ML (3). Mas para isto algumas questões devem ser consideradas. Primeiro, a nova matriz tem dimensões $(N + L) \times (N + L)$, as quais são maiores que as da matriz de covariância original. Segundo, referindo-se à expressão (8) e usando a expressão (2), o k -ésimo *snapshot* filtrado pode ser expresso como $\mathbf{z}_{kL} = \mathbf{H}_L \mathbf{A} \mathbf{s}_k + \mathbf{H}_L \mathbf{n}_k$, o que implica dois inconvenientes: a filtragem modifica o modelo de sinal original e consequentemente a matriz de resposta do arranjo equivalente $\mathbf{H}_L \mathbf{A}$ não

tem mais estrutura de Vandermonde; e o ruído de saída se torna correlacionado e os dados de cada *snapshot* filtrado não são mais conjuntamente gaussianos.

Todos esses fatos implicam que a função custo ML (3) não é válida para os dados filtrados. Como consequência, uma nova função custo ML deve ser obtida levando em conta as dimensões da nova matriz de covariância, o novo modelo de sinal e o ruído correlacionado não-gaussiano. Porém, não vamos seguir esse caminho, dada sua complexidade. Ao contrário, vamos adotar uma solução arbitrária, mas muito simples: 1 - vamos continuar a usar (3); 2 - para que possamos fazer isso, vamos propor 3 opções de modificação na função custo para adequá-la às novas dimensões da matriz de covariância.

Na sequência vamos discutir três opções de modificação na função custo ML (3) visando a aplicação da nossa proposta no processo de seleção de raízes do método MODEX Modificado.

V. MODIFICAÇÃO DA FUNÇÃO CUSTO DO PROCESSO DE SELEÇÃO

A. Primeira Opção

Esta opção já foi apresentada em [1]. Vamos substituir as matrizes originais \mathbf{A} e $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ pelas versões filtradas correspondentes $\mathbf{H}_L \mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$. Fazendo isso, estamos alterando o modelo de sinal e a matriz de covariância embora ainda mantendo a função custo (3).

Consequentemente, a função custo será dada por

$$F(\varpi) = \{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{zL}\}, \quad (13)$$

onde $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}}^{\perp} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger} \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$ e $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}_L \mathbf{A}$.

Utilizando a expressão (13) e propriedades do operador traço, temos

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{H}_L^{\dagger} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}}^{\perp} \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (14)$$

Considerando que o termo \mathbf{I} em $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}}^{\perp}$ não importa para a minimização da função custo e definindo $\mathbf{H}_L^{\dagger} \mathbf{H}_L = \mathbf{F}_L \in C^{N \times N}$, temos nossa primeira opção.

$$F(\varpi) = \text{tr}\{-\mathbf{F}_L \mathbf{A}(\mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{F}_L \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{F}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (15)$$

B. Segunda Opção

Nesta opção propomos usar a expressão (3), a matriz $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$ e a forma original da matriz \mathbf{A} definida em (2). Porém, como $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$ tem dimensões $(N+L) \times (N)$, a adequação de dimensões será feita aumentando o número de linhas de \mathbf{A} passando de N para $N+L$. Com isso o projetor $\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}}^{\perp}$ correspondente terá dimensões $(N+L) \times (N+L)$.

Vamos definir a nova matriz como $\mathbf{A}_E \in C^{(N+L) \times M}$. Usando (12), a função custo será dada por

$$\begin{aligned} F(\varpi) &= \text{tr}\{\mathbf{H}_L^{\dagger} \mathbf{P}_{\mathbf{A}_E}^{\perp} \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\} \\ &= \text{tr}\{\mathbf{H}_L^{\dagger} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_E(\mathbf{A}_E^{\dagger} \mathbf{A}_E)^{-1} \mathbf{A}_E^{\dagger}) \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\} \end{aligned} \quad (16)$$

Para diminuir o esforço computacional propomos algumas modificações na função custo (16). Vamos substituir o produto $\mathbf{H}_L^{\dagger} \mathbf{A}_E$ dado por

$$\mathbf{H}_L^{\dagger} \mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} \mathbf{a}_M \\ \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} e^{j\omega_1} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} e^{j\omega_M} \mathbf{a}_M \\ \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} e^{j2\omega_1} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} e^{j2\omega_M} \mathbf{a}_M \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} e^{j(N+L-1)\omega_1} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} e^{j(N+L-1)\omega_M} \mathbf{a}_M \end{bmatrix}, \quad (17)$$

onde $\mathbf{h}_{ol,i}$ é o i -ésimo elemento do vetor ótimo \mathbf{h}_{ol} , pelo produto de \mathbf{A} na sua versão não-estendida por uma matriz diagonal \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} \mathbf{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} \mathbf{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \mathbf{h}_{ol}^{\dagger} \mathbf{a}_M \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Usando (18) na nova função custo (16) temos

$$F(\varpi) = \text{tr}\{-\mathbf{AD}(\mathbf{A}_E^{\dagger} \mathbf{A}_E)^{-1} (\mathbf{AD})^{\dagger} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (19)$$

C. Terceira Opção

Nesta opção vamos usar uma versão modificada da matriz de filtragem \mathbf{H}_L . Esta versão modificada, denominada \mathbf{H}_T , terá dimensões $(N) \times (N)$ e posto (N) . Desta forma, a matriz de covariância correspondente, após a filtragem \mathbf{H}_T , terá dimensões $(N) \times (N)$ e dependerá de $\mathbf{H}_T \mathbf{H}_T^{\dagger}$, a qual será inversível. Logo, os elementos do *snapshot* filtrado serão conjuntamente gaussianos e a expressão (3) permanece válida. A matriz \mathbf{H}_T será obtida por truncamento de \mathbf{H}_L , conforme definido a seguir.

A nova matriz de filtragem \mathbf{H}_T será dada pela porção central de \mathbf{H}_L como

$$\mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{sup} \\ \cdots \\ \mathbf{H}_T \\ \cdots \\ \mathbf{H}_{inf} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Para N par, $\mathbf{H}_{sup} \in C^{(\frac{N+L}{2}-1) \times (N)}$, $\mathbf{H}_T \in C^{(N) \times (N)}$ e $\mathbf{H}_{inf} \in C^{(\frac{N+L}{2}) \times (N)}$. Para N ímpar, $\mathbf{H}_{sup} \in C^{(\frac{N+L-1}{2}) \times (N)}$, $\mathbf{H}_T \in C^{(N) \times (N)}$ e $\mathbf{H}_{inf} \in C^{(\frac{N+L-1}{2}-1) \times (N)}$. Este procedimento de truncamento é frequentemente utilizado em problemas de filtragem [12].

Substituindo \mathbf{H}_T em (12) e definindo $\hat{\mathbf{R}}_{zT}$ como a matriz de covariância estimada referente a matriz \mathbf{H}_T , temos

$$\hat{\mathbf{R}}_{zT} = \mathbf{H}_T \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \mathbf{H}_T^{\dagger}. \quad (21)$$

A nova função custo será dada por

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{zT}\}. \quad (22)$$

Usando (21) em (22), temos

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{H}_T^{\dagger} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{A}}}^{\perp} \mathbf{H}_T \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (23)$$

Na próxima seção iremos comparar o desempenho das três opções propostas.

VI. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Em [1], fizemos simulações variando os valores de L para a primeira opção. Comparando as curvas de desempenho, concluímos que o melhor resultado para a primeira opção ocorre com $L = 7$. Ainda em [1], comparamos as curvas de desempenho do MODEX Modificado e da primeira opção com $L = 7$. A primeira opção obteve o melhor resultado.

Agora, iremos fazer a comparação entre as três opções, incluindo na análise as curvas do MODEX Modificado, Seleção Ótima e o Limite de Cramer-Rao. Para as duas outras opções os melhores resultados também foram obtidos com $L = 7$. Como podemos observar na Figura 2, as três opções tem desempenho melhor que o MODEX Modificado para SNRs menores que -7 dB. Porém, a segunda e terceira opções tem resultados piores que o MODEX Modificado para SNRs maiores que -7 dB. A primeira opção tem um desempenho melhor que o MODEX Modificado para todos os valores de SNR e mantém seu desempenho próximo da Seleção Ótima.

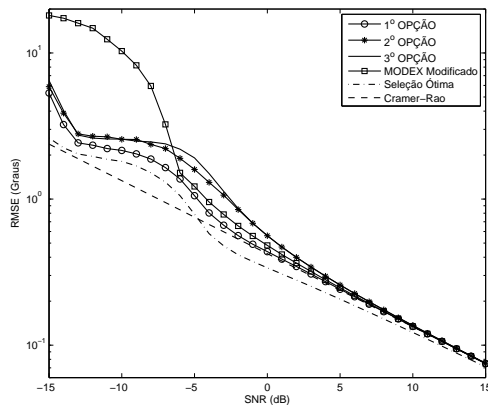


Fig. 2. Comparação de desempenho entre as opções propostas.

VII. CONCLUSÕES

Abordamos o problema de estimação de direção de chegada (DOA) de ondas planas usando um arranjo de sensores. Consideramos estimadores de Máxima Verossimilhança (ML) que geram candidatas à estimativa DOA e selecionam as melhores através do critério ML. Estes métodos tem uma degradação de desempenho, conhecida como efeito de limiar.

Para isso propusemos um processo de filtragem ótima através de um filtro FIR multibanda. O filtro foi definido através de um critério de otimização chamado maximização da SNR e foi aplicado aos snapshots. Fazendo isso obtivemos uma nova matriz de covariância filtrada, a qual tem dimensões diferentes da matriz de covariância originalmente utilizada no processo de seleção de raízes. Tornou-se necessário então alterar a função custo de modo a adequá-la às novas dimensões da matriz de covariância. Além disso, encontramos outros problemas: a filtragem modifica os modelos de sinal e de ruído e a função custo (3) não é mais válida. Como não sabemos calcular a nova função custo ML pois não conhecemos a nova função de densidade de probabilidade para o novo cenário,

optamos por arbitrar uma solução, onde continuamos a usar a função custo (3) e propusemos algumas modificações que resolvam os problemas introduzidos com o processo de filtragem. Propusemos três opções de modificação: 1- Utilizamos uma versão filtrada da matriz \mathbf{A} , $\mathbf{H}_L \mathbf{A}$. 2 - Utilizamos uma versão estendida de \mathbf{A} , \mathbf{A}_E . 3 - Utilizamos um versão truncada da matriz \mathbf{H}_H , \mathbf{H}_T .

As simulações mostraram que nossas propostas têm melhor desempenho, reduzindo significativamente a relação sinal-ruído de limiar. Além disso, a eficiência assintótica é preservada. Simulações mostram que nossa proposta não gera estimativas polarizadas. O cálculo e a utilização da nova função custo de seleção implicam em um pequeno aumento do esforço computacional, o qual não invalida a proposta pois melhora sensivelmente o limiar de desempenho.

Em relação às três opções estudadas, a primeira apresenta melhor desempenho, e fica demonstrado que esta é a melhor forma de alterar (3), dado que não sabemos calcular a função custo ML adequada ao novo cenário criado pela aplicação da filtragem. As duas outras opções tem desempenho semelhante à primeira opção para SNRs menores que -7 dB, porém, tem um desempenho pior para SNRs maiores que -7 dB.

A conclusão geral é que a filtragem dos snapshots no problema DOA pode resultar em estimadores mais eficientes, quando temos relação sinal-ruído baixa. E para o nosso caso, a primeira opção demonstrou ser a forma mais eficiente de alterar (3).

REFERÊNCIAS

- [1] R. Krummenauer, M. Cazarotto, A. Lopes, P. Larzabal, P. Forster, Improving the threshold performance of maximum likelihood estimation of direction of arrival, *Signal Processing* 90 (5) (2010) 1582 – 1590, Special Section on Statistical Signal Array Processing. doi:DOI: 10.1016/j.sigpro.2009.10.028.
- [2] D. Rife, R. Boorstyn, Single tone parameter estimation from discrete-time observations, *IEEE Transactions on Information Theory* 20 (5) (1974) 591–598.
- [3] Y. Bresler, A. Macovski, Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-34* (5) (1986) 1081–1089.
- [4] P. Stoica, A. Nehorai, Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-38* (10) (1990) 1783–1795.
- [5] P. Stoica, K. C. Sharman, Novel eigenanalysis method for direction estimation, *IEE Proceedings part F (Radar and Signal Processing)* 137 (1) (1990) 19–26.
- [6] A. B. Gershman, P. Stoica, New MODE-based techniques for direction finding with an improved threshold performance, *Signal Processing* (1999) 221–235.
- [7] A. Lopes, I. S. Bonatti, P. L. D. Peres, C. A. Alves, Improving the MODEX algorithm for direction estimation, *Signal Processing* 83 (9) (2003) 2047–2051.
- [8] P. Forster, P. Larzabal, E. Boyer, Threshold performance analysis of maximum likelihood DOA estimation, *IEEE Trans. on Signal Processing* 52 (11) (1995) 3183–3191.
- [9] H. L. V. Trees, *Optimum Array Processing. Part IV of Detection, Estimation and Modulation Theory*, John Wiley and Sons, New York-USA, 2002.
- [10] R. Kumaresan, L. L. Scharf, A. K. Shaw, An algorithm for pole-zero modeling and spectral analysis, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-34* (3) (1986) 637–640.
- [11] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation - Theory and Application*, Prentice Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [12] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th Edition, Prentice Hall Information and System Sciences Series, Englewood Cliffs, NJ, 2001.