

Transformada Discreta do Cosseno Manobrável em Três Dimensões

Verusca S. Lima, Francisco Madeiro e Juliano B. Lima

Resumo— Este trabalho propõe uma nova transformada direcional, a transformada discreta do cosseno manobrável em três dimensões (3D-SDCT), que é obtida a partir da relação entre a transformada discreta do cosseno (DCT) e a transformada de Fourier sobre grafos de um sinal sobre um grafo caminho; utiliza-se o fato de que os vetores de base da 3D-DCT constituem uma possível autobase para o Laplaciano do produto entre três desses grafos. A transformada proposta emprega uma versão rotacionada da base da 3D-DCT. Mostra-se que, escolhendo ângulos de rotação específicos, é possível obter uma 3D-SDCT em que 2/3 dos coeficientes são nulos, o que sugere uma maior compactação de energia quando comparada àquela obtida pelo uso da 3D-DCT.

Palavras-Chave— Processamento de sinais sobre grafos, transformada de Fourier sobre grafos, transformada discreta do cosseno.

Abstract— This work proposes a new directional transform, the three-dimensional steerable discrete cosine transform (3D-SDCT), which is obtained from the relationship between the discrete cosine transform (DCT) and the graph Fourier transform of a signal on a path graph; one employs the fact that the basis vectors of the 3D-DCT constitute a possible eigenbasis for the Laplacian of the product of such graphs. The proposed transform employs a rotated version of the 3D-DCT basis. It is shown that, by choosing specific rotation angles, it is possible to obtain a 3D-SDCT with 2/3 of null coefficients, which suggests an energy compaction greater than that achieved by using the 3D-DCT.

Keywords— Signal processing on graphs, Graph Fourier transform, Discrete cosine transform.

I. INTRODUÇÃO

Grafos são uma poderosa ferramenta de abstração que facilita a compreensão, modelagem e solução de problemas. Grafos vêm sendo utilizados para analisar uma grande variedade de sistemas reais, como o tráfego em redes de transporte [1], [2], a dinâmica da rede cerebral [3], [4], dados de usuários em mídias sociais [5], [6], entre outros.

Nesse cenário, um tópico emergente tem se tornado objeto de estudo de muitos pesquisadores: o processamento de sinais sobre grafos, o qual busca estender a teoria clássica de processamento de sinais para o domínio dos grafos.

Entre as ferramentas de processamento de sinais, merecem destaque transformadas como a de Fourier, que desempenham um papel fundamental em várias aplicações. Também em processamento de sinais sobre grafos, uma transformada de Fourier foi definida, sendo resultado da autodecomposição do operador Laplaciano do grafo e identificada pelo acrônimo GFT (*graph Fourier transform*) [7]. Explorando a teoria de

grafos, outras transformadas podem ser definidas no referido domínio [8], [9].

Neste trabalho, propõe-se uma transformada direcional obtida a partir da relação entre a transformada discreta do cosseno (DCT, *discrete cosine transform*) e a GFT sobre um grafo caminho. A transformada proposta é denominada transformada discreta do cosseno manobrável em três dimensões (3D-SDCT, *3D-steerable discrete cosine transform*) e dá sequência à ideia originalmente proposta em [8]. Emprega-se o princípio de que os vetores de base da transformada discreta do cosseno em três dimensões (3D-DCT, *3D-discrete cosine transform*) constituem uma possível autobase para o Laplaciano do produto de três grafos caminho. A 3D-SDCT é definida utilizando novas autobases obtidas pela aplicação de rotações a triplas de vetores da base da 3D-DCT.

II. PROCESSAMENTO DE SINAIS SOBRE GRAFOS

Grafos são usualmente denotados por $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, em que \mathcal{V} é o conjunto de vértices e \mathcal{E} é o conjunto de arestas [10], [11]. A matriz de adjacência $\mathbf{A}(\mathcal{G})$, que armazena o relacionamento entre os vértices do grafo, é a matriz quadrada de ordem N cujas entradas são definidas por [10]

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

A matriz Laplaciana de um grafo \mathcal{G} é definida como $\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{D}(\mathcal{G}) - \mathbf{A}(\mathcal{G})$ [12], em que $\mathbf{D}(\mathcal{G})$ é uma matriz diagonal que contém os graus dos vértices de \mathcal{G} , ou seja, o número de arestas adjacentes a cada vértice de \mathcal{G} [10]. Como a matriz de adjacência é simétrica (no caso de grafos não direcionados) e real, e $\mathbf{D}(\mathcal{G})$ é uma matriz diagonal, $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ é uma matriz simétrica real e, portanto, é diagonalizável por uma matriz ortogonal \mathbf{U}^{-1} , de modo que se pode escrever

$$\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^T, \quad (2)$$

em que as colunas \mathbf{u}_N da matriz $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0 \ \mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_{N-1}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ correspondem aos autovetores de $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ e $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz diagonal dos autovalores correspondentes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ de $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ [7].

O processamento de sinais sobre grafos tem como foco a representação e o processamento de sinais definidos em grafos. Um sinal sobre um grafo corresponde ao mapeamento nos vértices do grafo. Seja \mathbf{f} um sinal sobre o grafo \mathcal{G} , em que cada componente $f(i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, é associada ao vértice $v_i \in \mathcal{V}$. O sinal sobre o grafo pode ser escrito como um vetor

$$\mathbf{f} = [f(0), f(1), \dots, f(N-1)] \in \mathbb{R}^N. \quad (3)$$

A Fig. 1 ilustra o exemplo de um sinal sobre um grafo. Na Fig. 1(a), a altura do pulso em cada vértice representa o valor

Verusca S. Lima, Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE, e Escola Politécnica de Pernambuco (POLI), UPE, Recife-PE, Brasil. E-mail: verusca.severo@poli.br. Francisco Madeiro, POLI, UPE, Recife-PE, Brasil. E-mail: madeiro@poli.br. Juliano B. Lima, Departamento de Eletrônica e Sistemas, UFPE, Recife-PE, Brasil. E-mail: juliano_bandeira@ieee.org.

do sinal naquele vértice. Na Fig. 1(b), os valores do sinal são representados com uso de cores.

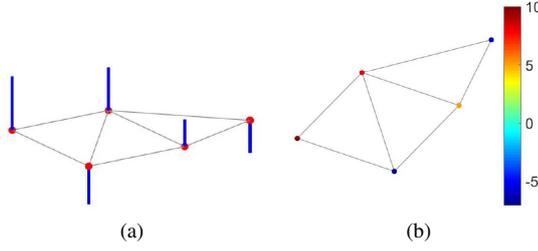


Fig. 1: Exemplos de sinais sobre grafos.

A transformada de Fourier clássica (FT, *Fourier transform*) consiste basicamente na expansão de uma função f em termos de exponenciais complexas $e^{2\pi i \xi t}$, que são autofunções do operador de Laplace unidimensional $\frac{d^2}{dt^2}$. Assim, a FT de f é dada por

$$\hat{f}(\xi) := \langle f, e^{2\pi i \xi t} \rangle = \int f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt. \quad (4)$$

No domínio dos grafos, uma transformada de Fourier foi definida, a GFT, que generaliza a análise de Fourier tradicional para o domínio dos grafos. A GFT é definida de forma análoga à FT, e corresponde à expansão de $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ em termos dos autovetores do Laplaciano do grafo, ou seja,

$$\hat{\mathbf{f}}(\lambda_\ell) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_\ell \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} f(i) u_\ell(i). \quad (5)$$

A GFT inversa é dada por

$$f(i) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \hat{\mathbf{f}}(\lambda_\ell) u_\ell(i). \quad (6)$$

A GFT para um grafo com uma topologia específica pode corresponder a uma transformada particular como, por exemplo, a transformada discreta de Fourier (DFT, *discrete Fourier transform*). O grafo em ciclo C_N , cuja estrutura é mostrada na Fig. 2(a), é chamado circulante porque sua matriz Laplaciana é circulante. Sabe-se que uma base válida de autovetores para qualquer matriz circulante é aquela formada pelas linhas da matriz da DFT. Então, a GFT para um sinal sobre um grafo em ciclo é equivalente à DFT. Outro exemplo é o do grafo caminho (*path graph*) \mathcal{P}_N com N vértices, mostrado na Fig. 2(b) para $N = 4$. Os autovetores de $\mathbf{L}(\mathcal{P}_N)$ são iguais aos vetores de base da DCT do tipo 2 [13], os quais são dados por

$$\mathbf{v}_j^{(k)} = \cos\left(\frac{\pi k}{N} \left(j + \frac{1}{2}\right)\right), \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Cada $\mathbf{v}^{(k)}$ é um autovetor de $\mathbf{L}(\mathcal{P}_N)$ associado ao autovalor

$$\lambda_k = 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right). \quad (8)$$

Como a multiplicidade dos autovalores λ_k é igual a 1, a base DCT é a única autobase para $\mathbf{L}(\mathcal{P}_N)$. Logo, a GFT para um sinal sobre um grafo caminho é equivalente à DCT.

No caso bidimensional, Fracastoro *et al.* [8] relacionaram a GFT para um sinal sobre um grafo grade $\mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N$

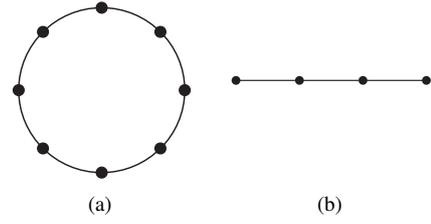


Fig. 2: Exemplos de grafos: (a) Grafo em ciclo C_8 ; (b) Grafo caminho \mathcal{P}_4 .

com a 2D-DCT, cujos vetores de base formam uma possível autobase para $\mathbf{L}(\mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N)$. Uma vez que a 2D-DCT não é a única autobase para $\mathbf{L}(\mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N)$, pode-se encontrar todas as possíveis autobases a partir da rotação dos referidos vetores, obtendo uma nova transformada denominada transformada discreta do cosseno manobrável (SDCT, *steerable discrete cosine transform*).

III. 3D-SDCT

A. Uma Autobase para o Laplaciano do Produto de Três Grafos Caminho

Sejam $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$, $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ e $\mathcal{G}_3 = (\mathcal{V}_3, \mathcal{E}_3)$ três grafos não direcionais. Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \mathcal{G}_3$ o seu produto cartesiano, o qual tem $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_3)$ como conjunto de vértices. Supondo que $\mathcal{V}_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $\mathcal{V}_2 = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ e $\mathcal{V}_3 = \{s_1, s_2, \dots, s_o\}$, então (b_i, h_j, s_k) é adjacente a (b_ℓ, h_p, s_q) quando b_i é adjacente a b_ℓ em \mathcal{G}_1 e $h_j = h_p$ em \mathcal{G}_2 e $s_k = s_q$ em \mathcal{G}_3 , ou h_j é adjacente a h_p em \mathcal{G}_2 e $b_i = b_\ell$ em \mathcal{G}_1 e $s_k = s_q$ em \mathcal{G}_3 , ou s_k é adjacente a s_q em \mathcal{G}_3 e $h_j = h_p$ em \mathcal{G}_2 e $b_i = b_\ell$ em \mathcal{G}_1 [14].

Se três grafos \mathcal{P}_N possuem o mesmo número de vértices, seu produto cartesiano $\mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N$ corresponde a um grafo reticulado com N^3 vértices. A Fig. 3 ilustra $\mathcal{P}_4 \times \mathcal{P}_4 \times \mathcal{P}_4$.

De acordo com [15], o Laplaciano do produto de três grafos caminho é determinado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathcal{P}_N) \otimes \mathbb{I}_N \otimes \mathbb{I}_N + \mathbb{I}_N \otimes \mathbf{L}(\mathcal{P}_N) \otimes \mathbb{I}_N + \mathbb{I}_N \otimes \mathbb{I}_N \otimes \mathbf{L}(\mathcal{P}_N), \quad (9)$$

em que \otimes indica o produto de Kronecker e \mathbb{I}_N indica a matriz identidade de ordem N .

A DCT tridimensional, 3D-DCT, de um sinal f com dimensões $N \times N \times N$ é definida por

$$F(t, v, w) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} f(x, y, z) \alpha(t) \alpha(v) \alpha(w) u_{xyz}(t, v, w),$$

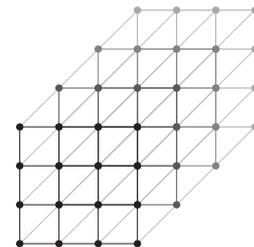


Fig. 3: Produto cartesiano $\mathcal{P}_4 \times \mathcal{P}_4 \times \mathcal{P}_4$.

em que

$$\alpha(m) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, & m = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, & m = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases}$$

e

$$u_{xyz}(t, v, w) = \cos \left[\frac{\pi(2x+1)t}{2N} \right] \cos \left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N} \right] \cos \left[\frac{\pi(2z+1)w}{2N} \right].$$

A transformada inversa, 3D-IDCT, é dada por

$$f(x, y, z) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} F(t, v, w) \alpha(t) \alpha(v) \alpha(w) u_{xyz}(t, v, w),$$

Na forma matricial, a 3D-DCT pode ser expressa por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

em que $n = N^3$ e cada elemento de \mathbf{C} é determinado por

$$c_{ij} = \alpha(t) \alpha(v) \alpha(w) u_{xyz}[t, v, w], \quad (11)$$

em que $i = tN + vN + w$ e $j = xN + yN + z$, para $0 \leq t, u \leq N-1$, $0 \leq y, v \leq N-1$ e $0 \leq z, w \leq N-1$.

Teorema 1: Os vetores de base da 3D-DCT constituem uma possível autobase para o Laplaciano do produto de três grafos caminho.

Demonstração: A base da 3D-DCT diagonaliza \mathbf{L} , ou seja, $\mathbf{C.L.C}^T = \mathbf{\Lambda}$, em que \mathbf{C}^T corresponde à transposta de \mathbf{C} . Dessa forma, pode-se afirmar que a matriz \mathbf{L} é semelhante à matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$, cuja diagonal principal é formada pelos autovalores de \mathbf{L} , cada um aparecendo tantas vezes quanto for a dimensão do autoespaço associado a ele. ■

De (9), segue que os autovalores de \mathbf{L} são todas as possíveis somas entre os autovalores de cada um dos grafos caminho, isto é,

$$\lambda_{k,\ell,m} = 4 \left[\sin^2(ak) + \sin^2(a\ell) + \sin^2(am) \right], \quad (12)$$

com $a = \frac{\pi}{2N}$ e $0 \leq k, \ell, m \leq N-1$. Além disso, se $\mathbf{v}^{(k)}$ é um autovetor de \mathcal{P}_N associado a $\lambda_k(\mathcal{P}_N)$, $\mathbf{v}^{(\ell)}$ é um autovetor de \mathcal{P}_N associado a $\lambda_\ell(\mathcal{P}_N)$ e $\mathbf{v}^{(m)}$ é um autovetor de \mathcal{P}_N associado a $\lambda_m(\mathcal{P}_N)$. Então,

$$\mathbf{v}^{(k,\ell,m)} = \mathbf{v}^{(k)} \otimes \mathbf{v}^{(\ell)} \otimes \mathbf{v}^{(m)} \quad (13)$$

é um autovetor de $\mathcal{G} = (\mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N \times \mathcal{P}_N)$ associado a $\lambda_{k,\ell,m}$.

B. Análise da Multiplicidade dos Autovalores

Analisando a multiplicidade algébrica em (12), tem-se que:

- O autovalor $\lambda_{k,\ell,m}$ tem multiplicidade igual a 1, quando $k = \ell = m$, com $0 \leq k, \ell, m \leq N-1$.
- O autovalor $\lambda_{k,\ell,m}$ tem multiplicidade igual a 3, quando:
 - 1) $k = \ell$ e $\ell \neq m$, i.e., $\lambda_{k,k,m} = \lambda_{k,m,k} = \lambda_{m,k,k}$;
 - 2) $k = m$ e $m \neq \ell$, i.e., $\lambda_{k,\ell,k} = \lambda_{k,k,\ell} = \lambda_{\ell,k,k}$;
 - 3) $m = \ell$ e $\ell \neq k$, i.e., $\lambda_{m,m,k} = \lambda_{m,k,m} = \lambda_{k,m,m}$;

- O autovalor $\lambda_{k,\ell,m}$ tem multiplicidade igual a 6, quando $k \neq \ell \neq m$, devido à simetria: $\lambda_{k,\ell,m} = \lambda_{k,m,\ell} = \lambda_{\ell,k,m} = \lambda_{\ell,m,k} = \lambda_{m,k,\ell} = \lambda_{m,\ell,k}$.

Os autovetores de \mathbf{L} são dados pelo produto de Kronecker entre os respectivos autovetores de \mathcal{P}_N . Como o produto não é comutativo, a multiplicidade geométrica é igual à algébrica. Isso significa que a dimensão do autoespaço correspondente aos autovalores é maior do que 1 e, equivalentemente, que a 3D-DCT não é a única autobase para \mathbf{L} .

C. Definição da Transformada

Seja $\lambda_{k,\ell,m}$, com $k = \ell$ e $\ell \neq m$, um autovalor de \mathbf{L} com multiplicidade igual a três, e $\mathbf{v}^{(k,k,m)}$, $\mathbf{v}^{(k,m,k)}$ e $\mathbf{v}^{(m,k,k)}$ três vetores da 3D-DCT que são autovetores de \mathbf{L} associados a $\lambda_{k,\ell,m}$. Pode-se obter outra base do autoespaço correspondente a $\lambda_{k,\ell,m}$ rotacionando $\mathbf{v}^{(k,k,m)}$, $\mathbf{v}^{(k,m,k)}$ e $\mathbf{v}^{(m,k,k)}$ em torno do eixo y , do eixo z ou do eixo x . Esta última seria dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(k,k,m)'} \\ \mathbf{v}^{(k,m,k)'} \\ \mathbf{v}^{(m,k,k)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(k,k,m)} \\ \mathbf{v}^{(k,m,k)} \\ \mathbf{v}^{(m,k,k)} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

em que θ_x é um ângulo em $[0, 2\pi]$.

Os autovetores correspondentes a $\lambda_{k,\ell,m}$, que possui multiplicidade 3, podem ser rotacionados como mostrado em (14). Os autovetores que apresentam multiplicidade igual a 6 são rotacionados em triplas: $(\mathbf{v}^{(k,\ell,m)}, \mathbf{v}^{(k,m,\ell)}, \mathbf{v}^{(\ell,k,m)})$ e $(\mathbf{v}^{(\ell,m,k)}, \mathbf{v}^{(m,k,\ell)}, \mathbf{v}^{(m,\ell,k)})$. A nova transformada, denominada transformada discreta do cosseno manobrável em três dimensões (3D-SDCT), tem sua matriz dada por

$$\mathbf{V}_{3D}(\theta) = \mathbf{R}_{3D}(\theta) \mathbf{V}_{3D}, \quad (15)$$

em que $\mathbf{V}_{3D} = \mathbf{V}_{3D}(0)$ é a matriz da 3D-DCT, $\mathbf{R}_{3D}(\theta)$ é uma matriz de rotação esparsa construída de acordo com (14), e θ é o vetor contendo todos os ângulos de rotação utilizados.

Para qualquer sinal $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N^3}$, a 3D-SDCT é dada por

$$\text{SDCT}_{3D}(\mathbf{f}) = \mathbf{V}_{3D}(\theta) \mathbf{f}^T = \mathbf{R}_{3D}(\theta) \hat{\mathbf{f}}_{3D-DCT}^T, \quad (16)$$

em que $\hat{\mathbf{f}}_{3D-DCT}$ é a 3D-DCT de \mathbf{f} .

A complexidade envolvida no cálculo da 3D-SDCT depende, basicamente, daquela envolvida no cálculo da 3D-DCT, que pode ser realizado eficientemente empregando algoritmos rápidos usuais. Como a matriz com os ângulos de rotação $\mathbf{R}_{3D}(\theta)$ é esparsa, o seu produto por $\hat{\mathbf{f}}_{3D-DCT}$ não deve envolver complexidade aritmética significativa.

IV. ROTAÇÃO IDEAL

A 3D-SDCT é obtida a partir da rotação dos coeficientes da 3D-DCT, de acordo com (16). Há várias opções de ângulos que podem ser utilizadas na matriz de rotação, uma vez que θ_x , θ_y e θ_z são ângulos em $[0, 2\pi]$. No entanto, é possível obter ângulos de rotação para a 3D-SDCT que permitam compactar melhor a energia do sinal em relação à 3D-DCT, escolhendo, entre todas as rotações que podem ser realizadas, aquelas que fornecem um maior número de coeficientes nulos.

Para cada autoespaço com multiplicidade 3 ou 6, é possível encontrar os ângulos de rotação que permitem compactar toda a energia em um coeficiente, reduzindo os outros dois a zero.

Seja $\lambda_{k,\ell,m}$ um autovalor de \mathbf{L} com multiplicidade igual a 3 e seus respectivos autovetores $\mathbf{v}^{(k,k,m)}$, $\mathbf{v}^{(k,m,k)}$ e $\mathbf{v}^{(m,k,k)}$. Os coeficientes correspondentes da 3D-DCT são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{k,k,m} &= \mathbf{v}^{(k,k,m)T} \mathbf{f}, \\ \mathbf{c}_{k,m,k} &= \mathbf{v}^{(k,m,k)T} \mathbf{f}, \\ \mathbf{c}_{m,k,k} &= \mathbf{v}^{(m,k,k)T} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (17)$$

Se os autovetores são rotacionados utilizando dois ângulos de rotação, com uma rotação em torno do eixo z , com

$$\theta_z = \arctan \left(\frac{\mathbf{c}_{k,m,k}}{\mathbf{c}_{k,k,m}} \right), \quad (18)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}'_{k,k,m} \\ \mathbf{c}'_{k,m,k} \\ \mathbf{c}'_{m,k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \text{sen} \theta_z & 0 \\ -\text{sen} \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{k,k,m} \\ \mathbf{c}_{k,m,k} \\ \mathbf{c}_{m,k,k} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

e outra em torno do eixo y , com

$$\theta_y = \arctan \left(\frac{\mathbf{c}'_{m,k,k}}{\mathbf{c}'_{k,k,m}} \right), \quad (20)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}''_{k,k,m} \\ \mathbf{c}''_{k,m,k} \\ \mathbf{c}''_{m,k,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \text{sen} \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}'_{k,k,m} \\ \mathbf{c}'_{k,m,k} \\ \mathbf{c}'_{m,k,k} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

os coeficientes $\mathbf{c}''_{k,m,k}$ e $\mathbf{c}''_{m,k,k}$ tornam-se nulos e toda a energia é concentrada em $\mathbf{c}''_{k,k,m}$, como mostra a Fig. 4. Dessa forma, a partir de (18) e (20), obtêm-se os ângulos de rotação ideal que geram um maior número de coeficientes nulos, cerca de $\frac{2}{3}$ do número total de coeficientes na 3D-SDCT. Isso representa uma melhoria, em relação à 3D-DCT, no quesito compactação de energia do sinal.

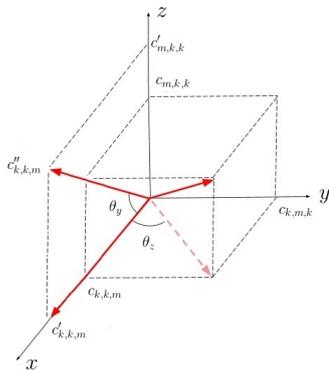


Fig. 4: Rotação ideal: utilizando os ângulos definidos em (18) e (20).

V. EXEMPLO DA 3D-SDCT

Para ilustrar a aplicação das transformadas 3D-DCT e 3D-SDCT foi utilizado o conjunto de dados de ressonância magnética (MRI, *Magnetic Resonance Imaging*) disponível na biblioteca do MATLAB, que compreende 27 fatias horizontais de tamanho 128 por 128 da varredura de um crânio humano.

Para que fosse calculada a DCT de cada bloco $4 \times 4 \times 4$ da MRI, foram adicionadas 5 fatias de tamanho 128 por

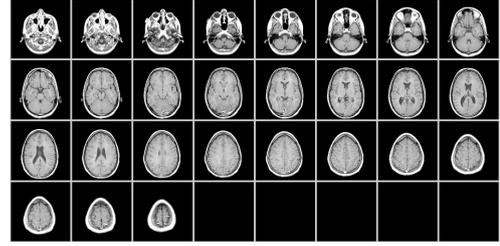


Fig. 5: Imagem 3D (MRI), com 32 fatias.

128, todas nulas, resultando em uma estrutura com dimensões $128 \times 128 \times 32$. A Fig. 5 apresenta as 32 fatias resultantes.

As Figuras 6 e 7 apresentam, respectivamente, a 3D-DCT e a 3D-SDCT com ângulos ótimos da MRI da Fig. 5. Comparando as imagens transformadas, é possível perceber que a 3D-SDCT da imagem apresenta uma predominância de *pixels* pretos, o que sugere que a 3D-SDCT apresenta uma quantidade de coeficientes nulos maior que a 3D-DCT.

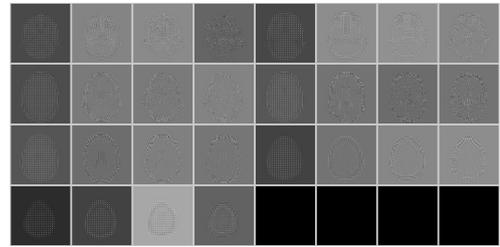


Fig. 6: 3D-DCT da MRI (blocos $4 \times 4 \times 4$).

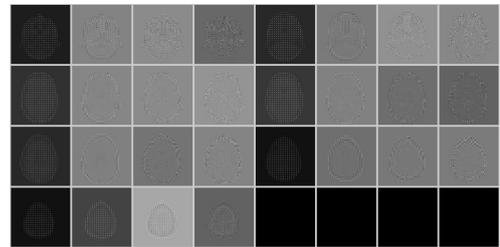


Fig. 7: 3D-SDCT da MRI com ângulos ótimos (blocos $4 \times 4 \times 4$).

Como discutido na Seção IV, a utilização dos ângulos ótimos permite anular $\frac{2}{3}$ dos coeficientes que são rotacionados na 3D-SDCT. A Fig. 8 apresenta a posição de cada coeficiente em um bloco de tamanho $4 \times 4 \times 4$ transformado. Para verificar que $\frac{2}{3}$ dos coeficientes rotacionados são anulados, as Figs. 9, 10, 11 e 12 fornecem uma visualização dos coeficientes da 3D-DCT e da 3D-SDCT de um bloco selecionado da MRI.

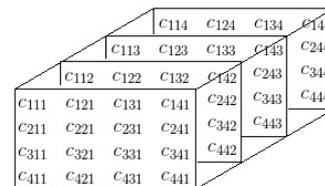


Fig. 8: Bloco $4 \times 4 \times 4$ de coeficientes.

Pode-se observar nas Figs. 9, 10, 11 e 12 que os coeficientes dos autovetores que apresentam multiplicidade igual a 1

permanecem inalterados, pois estes não são rotacionados.

329,25	-43,74	-9,25	-4,34	329,25	0	0	0
-7,30	8,88	5,99	2,96	0	0	11,12	4,84
5,75	-2,40	4,25	-2,52	0	0	0	-9,28
-4,55	-1,54	4,01	-7,38	0	0	0	0

(a) 3D-DCT

(b) 3D-SDCT

Fig. 9: Coeficientes da fatia 1 do bloco $4 \times 4 \times 4$.

94,76	5,60	1,28	-0,96	104,62	25,57	0	0
-23,31	-19,91	-3,44	-2,23	0	-19,91	0	0
-9,05	11,63	0,57	-5,08	0	0	0	-7,59
3,51	4,48	1,37	-4,65	0	0	0	0

(a) 3D-DCT

(b) 3D-SDCT

Fig. 10: Coeficientes da fatia 2 do bloco $4 \times 4 \times 4$.

-10,00	31,45	7,50	5,37	-14,79	51,53	11,76	0
40,81	-3,49	-21,29	-5,48	0	-12,62	-28,14	0
8,00	-18,38	-7,50	0,04	0	0	-7,50	0
-7,97	-5,48	1,51	-1,01	0	0	0	0

(a) 3D-DCT

(b) 3D-SDCT

Fig. 11: Coeficientes da fatia 3 do bloco $4 \times 4 \times 4$.

-3,80	-10,71	5,69	0,65	-7,35	-24,71	8,60	8,22
-22,24	12,62	21,62	11,73	0	13,57	24,31	13,85
-3,56	9,67	-6,46	-8,88	0	0	-6,64	-9,03
3,56	5,71	-1,31	-1,36	0	0	0	-1,36

(a) 3D-DCT

(b) 3D-SDCT

Fig. 12: Coeficientes da fatia 4 do bloco $4 \times 4 \times 4$.

Para os coeficientes com multiplicidade 3, dois dos três coeficientes são anulados. Por exemplo, para $k = \ell = 1$ e $m = 2$, c_{112} encontra-se na 1ª linha e 1ª coluna da Fig. 10(b) com valor igual a 104,62 e c_{121} e c_{211} encontram-se, respectivamente, na 1ª linha e 2ª coluna e na 2ª linha e 1ª coluna da Fig. 9(b) e apresentam valores nulos. Isso acontece com os demais coeficientes, dos quais $\frac{2}{3}$ são anulados.

Para os coeficientes com multiplicidade 6, dois dos três coeficientes de cada tripla devem ser anulados. Por exemplo, para $k = 1$, $\ell = 2$ e $m = 3$, na tripla $(c_{123}, c_{132}, c_{213})$, c_{123} encontra-se na 1ª linha e 2ª coluna da Fig. 11(b), com valor 51,53, e c_{132} e c_{213} encontram-se, respectivamente, na 1ª linha e 3ª coluna da Fig. 10(b) e na 2ª linha e 1ª coluna da Fig. 11(b) e apresentam valores nulos; na tripla $(c_{231}, c_{312}, c_{321})$, c_{231} encontra-se na 2ª linha e 3ª coluna da Fig. 9(b), com valor 11,12, e c_{312} e c_{321} rotacionados encontram-se,

respectivamente, na 3ª linha e 1ª coluna da Fig. 10(b) e na 3ª linha e 2ª coluna da Fig. 9(b) e apresentam valores nulos. Esse comportamento ocorre com os demais pares de triplas. Em suma, para o bloco da Fig. 8, há 64 coeficientes não nulos da 3D-DCT, enquanto que, para a 3D-SDCT, há apenas 24 coeficientes não nulos.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi introduzida uma nova transformada direcional: a transformada discreta do cosseno manobrável em três dimensões (3D-SDCT). Foi apresentado um desenvolvimento com vista a melhorar a compactação de energia da 3D-SDCT. Para isso, foram definidos ângulos “ótimos”, cujas rotações levam à obtenção do maior número de coeficientes nulos da 3D-SDCT. O procedimento permitiu obter $\frac{2}{3}$ de coeficientes nulos. Como trabalhos futuros, pretende-se caracterizar a transformada com relação à complexidade aritmética, propondo algoritmos rápidos neste cenário, e investigar a aplicação da 3D-SDCT na compressão de imagens e vídeos.

AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] D. Alvarenga, F. D. Cunha, A. C. Viana, R. A. Mini e A. A. Loureiro. Classificando comportamentos sociais em redes veiculares. *XXXIV Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores e Sistemas Distribuídos*, pp. 1–12, 2014.
- [2] F. S. Silva, D. L. L. Moura e R. S. Cabral. Modelagem e caracterização de redes veiculares utilizando-se grafos temporais e métricas de redes complexas. *XLIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 1–12, 2017.
- [3] E. Bullmore e O. Sporns. Complex Brain Networks: Graph theoretical analysis of structural and functional Systems. *Nature Reviews Neuroscience*, v. 10, no. 3, pp. 186–198, 2009.
- [4] M. Rubinov e O. Sporns. Complex network measures of brain connectivity: uses and interpretations. *NeuroImage*, v. 52, no. 3, pp. 1059–1069, 2010.
- [5] F. Grando, D. Noble e L. C. Lamb. An analysis of centrality measures for complex and social networks. *2016 IEEE Global Communications Conference, GLOBECOM*, pp. 1–6, 2016.
- [6] F. S. F. Pereira, S. Amo e J. Gama. Evolving centralities in temporal graphs: a twitter network analysis. *IEEE 17th International Conference on Mobile Data Management, MDM*, pp. 43–48, 2016.
- [7] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega e P. Vandergheynst. The emerging field of signal processing on graphs: extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains. *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 30, no. 3, pp. 83–98, 2013.
- [8] G. Fracastoro, S. M. Fosson e E. Magli. Steerable discrete cosine transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 26, no. 1, pp. 303–314, 2017.
- [9] G. Fracastoro e E. Magli. Steerable discrete Fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, v. 24, no. 3, pp. 319–323, 2017.
- [10] R. Diestel. Graph theory. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, no. 173, 1997.
- [11] J. A. Bondy e U. S. R. Murty. Graph theory with applications. *Elsevier*, 1976.
- [12] F. R. K. Chung. Spectral graph theory. *American Mathematical Society*, 1997.
- [13] G. Strang. The discrete cosine transform. *SIAM Review*, v. 41, no. 1, pp. 135–147, 1999.
- [14] B. S. Souza. Produtos e coespectralidade de grafos. *Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Mestrado em Matemática Aplicada*, 2016.
- [15] R. Merris. Laplacian graph eigenvectors. *Linear Algebra and its Applications*, v. 278, no. 1, pp. 221–236, 1998.