

# Comparação de Janelas de Amortecimento Aplicadas à Solução de Equações Parabólicas no Domínio do Tempo

Hugo Daniel Melo Ferreira, Cássio Gonçalves do Rego e Gláucio Lopes Ramos

**Resumo**—Neste trabalho foi desenvolvida uma formulação para equações parabólicas no domínio do tempo (TDPE), considerando atmosfera não-homogênea e desconsiderando o retroespalhamento. A formulação utiliza como base o domínio da frequência e através de uma transformada de Fourier especial definida por Popov há a conversão para o domínio do tempo. O método de Cranck-Nicolson é utilizado para análise numérica da formulação das diferenças finitas. As simulações foram feitas considerando relevo irregular, real e diferentes tipos de janelas de amortecimento como, janela de Hanning, Hanning-Poisson, Hamming e Kaiser como forma de analisar a que possui melhor desempenho.

**Palavras-Chave**—Equação Parabólica, Atmosfera não-homogênea, Método de Cranck-Nicolson, Janelas de Amortecimento.

**Abstract**—In this work, a formulation was developed for parabolic equations in the time domain (TDPE), considering nonhomogeneous atmosphere and disregarding backscattering. The formulation uses as base the frequency domain and through a special Fourier transform defined by Popov there is the conversion to the time domain. The Cranck-Nicolson method is used for numerical analysis of the finite difference formulation. The simulations were performed considering irregular, real relief and different types of damping windows such as Hanning, Hanning-Poisson, Hamming and Kaiser Window as a way to analyze the one that performs better.

**Keywords**—Parabolic Equation, Non-homogeneous Atmosphere, Cranck-Nicolson Method, Damping Windows.

## I. INTRODUÇÃO

O método de equação parabólica (PE) tem sido utilizado como uma eficiente ferramenta para analisar problemas de espalhamento eletromagnético. Este método foi inicialmente proposto por Leontovich e Fock [1-2] sendo considerado uma abordagem de simulação eficiente para a propagação sobre a superfície da Terra, transformando assim a PE de Leontovich em uma ferramenta universal de teoria da difração. Uma simplificação foi alcançada através da introdução da condição de contorno de impedância.

A modelagem numérica da propagação de ondas eletromagnéticas através da TDPE permite inserir várias informações relativas ao caminho de propagação, tais como, perfil do relevo, características elétricas do terreno e condições atmosféricas. Com a inserção dessas características, a simulação de uma grande classe de enlaces torna-se aceitável em projetos de redes sem fio.

Outra característica importante para o uso da técnica da equação parabólica no domínio do tempo, ao contrário dos métodos tradicionais (domínio da frequência), é que, com o uso da mesma torna-se possível obter solução para uma faixa ampla de frequências com apenas uma simulação, ou seja, é possível obter uma solução para diferentes tipos de serviços de comunicação, e calcular parâmetros do canal dependentes do tempo. Esta técnica despreza o retroespalhamento do sinal, resultando na redução do custo computacional. Outra maneira adotada com o objetivo de reduzir o custo computacional consiste em utilizar camadas absorventes.

Considerar variações do índice de refração da atmosfera é interessante pois em certos casos é necessário considerar a dispersão causada por essas variações, tais como, alto índice de precipitação, zonas litorâneas, florestas tropicais ou até mesmo enlaces de longa distância. Através dessas considerações, os enlaces de alto desempenho podem ser modelados sob várias condições de ambientes de propagação.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira. Na seção II a teoria e as formulações são apresentadas. As definições de janelas de truncamento e os resultados numéricos são apresentados na seção III, comparando os resultados obtidos com diferentes tipos de janela de amortecimento. A seção IV conclui este trabalho.

## II. EQUAÇÃO PARABÓLICA NO DOMÍNIO DO TEMPO

### A. Introdução à Equação Parabólica

A formulação foi desenvolvida considerando o campo com polarização vertical, ou seja, para uma solução do tipo TE<sub>y</sub>. Dessa forma, admitindo que o meio é homogêneo com índice de refração  $n$ , com variação suave, a componente de campo satisfaz a equação de onda escalar bidimensional, onde se considera coordenadas cartesianas com  $x$  sendo a direção de propagação (direção paraxial) e  $z$  a coordenada relativa à altura [3-4]. Dessa forma a equação de onda escalar no domínio da frequência, de acordo com [1-2], pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial z^2} + k^2 n^2(z) \psi(x, z) = 0, \quad (1)$$

onde  $k$  representa o número de onda no vácuo,  $n$  representa o índice de refração e  $\psi(x, z)$  a componente de campo.

Para a equação de onda escalar foi introduzida uma função reduzida associada a direção paraxial  $x$ , definida por

$$u(x, z) = e^{-jkx} \psi(x, z). \quad (2)$$

O uso da função reduzida é justificado pelo fato de haver uma lenta variação de amplitude da energia que se propaga em ângulos próximos à direção paraxial. Substituindo a equação (2) em (1), a equação em termos de  $u$  é obtida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2jk \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 [n^2(z) - 1]u = 0. \quad (3)$$

Após obtida a equação de onda escalar em termos de  $u$  como mostrado na equação (3), pode-se fatorar a mesma em dois termos, sendo que o primeiro termo está relacionado à propagação da onda e o segundo termo da equação está relacionado ao retroespalhamento do sinal e, como citado anteriormente será desprezado nesta formulação em relação ao eixo  $x$ . A expressão fatorada é mostrada em (4)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} + jk(1-Q) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} + jk(1+Q) \right] u = 0, \quad (4)$$

onde  $Q = [1+Z]^{1/2}$  conhecido como um operador pseudo-diferencial e  $Z = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(z) - 1$ .

Após a fatoração em (4) e desconsiderando o retroespalhamento, a equação parabólica clássica é definida por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2jk \frac{\partial u}{\partial x} + k^2 [n^2(z) - 1]u = 0. \quad (5)$$

Para obter a versão da equação parabólica no domínio do tempo, é definida uma transformada de Fourier especial proposta por Popov [5], sendo definida por:

$$\Pi(x, z, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) u(x, z, k) e^{-jks} dk, \quad (6)$$

onde  $\tilde{f}(k)$  representa o espectro inicial do pulso, definido por

$$\tilde{f}(k) = \int_0^{\infty} f(s) e^{-jks} ds, \quad (7)$$

$\Pi(x, z, s)$  representa o sinal recebido em um ponto  $(x, z)$ ,  $s = ct - x$  é a distância da frente de onda paraxial  $ct$  e  $c$  a velocidade da onda no vácuo. Aplicando a equação (6) em (5), a TDPE clássica a partir da PE

$$\frac{\partial^2 \Pi(x, z, s)}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \Pi(x, z, s)}{\partial x \partial s} - [n^2(z) - 1] \frac{\partial^2 \Pi(x, z, s)}{\partial s^2} = 0. \quad (8)$$

A precisão da formulação (8) da equação parabólica é limitada para ângulos de propagação pequenos, inferiores a  $15^\circ$ . Dessa forma, a equação parabólica padrão é conhecida como uma aproximação de ângulos estreitos (*Narrow Angle Parabolic Equation*, NAPE) da equação de onda. Para problemas que envolvam ângulos de propagação maiores, uma expansão do operador  $Q$  se torna necessária.

Com base na formulação apresentada em (8), a formulação discretizada da TDPE 2D em (9) é baseada no método de Crank-Nicolson, sendo considerado um método implícito, de segunda ordem no tempo e no espaço, e um método numericamente estável[6],

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\Delta z^2} \Pi_{i+1, j-1}^{t+1} + \left( \frac{2}{\Delta z^2} + \frac{8}{\Delta x \Delta s} + \frac{2(n^2-1)}{\Delta s^2} \right) \Pi_{i+1, j}^{t+1} - \frac{1}{\Delta z^2} \Pi_{i+1, j+1}^{t+1} = \\ \frac{1}{\Delta z^2} (\Pi_{i, j-1}^{t+1} + \Pi_{i, j+1}^{t+1} + \Pi_{i+1, j-1}^t + \Pi_{i+1, j+1}^t + \Pi_{i, j-1}^t + \Pi_{i, j+1}^t) + \\ \left( \frac{8}{\Delta x \Delta s} - \frac{2}{\Delta z^2} \right) (\Pi_{i, j}^{t+1} + \Pi_{i+1, j}^t) + \left( -\frac{8}{\Delta x \Delta s} - \frac{2}{\Delta z^2} \right) \Pi_{i, j}^t + \\ \frac{2(n^2-1)}{\Delta s^2} (\Pi_{i, j}^{t+1} - 2\Pi_{i, j}^t + \Pi_{i, j}^{t-1}), \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $s = t\Delta s$  e os índices  $i$  e  $j$  das equações representam respectivamente  $x_i = i\Delta x$  e  $z_j = j\Delta z$  no plano  $(x, z)$ .

### B. Condição de Contorno de Impedância do Solo

Para estimar as perdas decorrentes da interação entre as ondas eletromagnéticas que propagam e o terreno, é utilizada a condição de contorno de Leontovich modificada para o domínio do tempo. Para encontrar tal condição, parte-se da sua versão no domínio da frequência[5], descrita abaixo

$$\frac{\partial u(x, z_{solo})}{\partial z} - jk \left[ \frac{\sqrt{\tilde{\epsilon}-1}}{\tilde{\epsilon}} - h'(x) \right] u(x, z_{solo}) = 0, \quad (10)$$

onde  $\tilde{\epsilon} = \epsilon - j4\pi\sigma/\omega$ , sendo  $\sigma$  a condutividade do solo,  $z=h(x)$ , a função que descreve a altura em cada ponto e  $h'(x)$  a inclinação de cada segmento do terreno, sendo definido como linear por partes.

Deste modo, aplicando a transformada especial demonstrada em (6) em (10), a condição de contorno modificada no domínio do tempo é definida por

$$\frac{\partial \Pi(x, z, s)}{\partial z} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{\epsilon-1}}{\epsilon} \frac{\sqrt{k(k+2jq)}}{k+jr} \right] \tilde{F}(k) \quad (11)$$

$$u(x, z, k) e^{-jks} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} jkh'(x) \tilde{F}(k) u(x, z, k) e^{-jks} dk,$$

onde  $r = 4\pi\sigma/c\epsilon$  e  $q = 2\pi\sigma/c(\epsilon-1)$ . Dessa forma, considerando polarização vertical, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(x, z, s)}{\partial z} + \left[ h'(x) - \frac{\sqrt{\epsilon-1}}{\epsilon} \right] + \frac{\partial \Pi(x, z, s)}{\partial s} \frac{\sqrt{\epsilon-1}}{\epsilon} \\ + \frac{\sqrt{\epsilon-1}}{\epsilon} \int_0^s \frac{\partial \Pi(x, z, s')}{\partial s} N(s-s') ds' = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

e

$$N(s) = e^{-rs} \left( q \int_0^s e^{(r-q)t} I_1(qt) \frac{dt}{t} + r - q \right), \quad (13)$$

onde  $I_1$  representa a função de Bessel Modificada de Primeira Ordem, também proposta por Popov *et. al* em [5].

De forma análoga ao que foi descrito para a discretização da TDPE é feito também para discretizar a condição de contorno de impedância do solo. Para isso é necessário aproximar unilateralmente a derivada em  $z = z_{solo}$ , já que o campo abaixo da superfície é desconhecido. Por ser desconhecido este campo, o mesmo é calculado não na superfície, mas um pouco acima

dela. Como o valor de  $\Delta z$  é pequeno, a aproximação descrita em (14) se torna aceitável.

$$\frac{\partial^2 \Pi(x, z_{solo}, s)}{\partial z^2} \cong \frac{1}{\Delta z} \left[ \frac{\partial \Pi(x, z_{solo} + \Delta z, s)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(x, z_{solo}, s)}{\partial z} \right] \quad (14)$$

e substituindo (12) em (14) é possível definir a formulação discretizada para a condição de contorno de impedância do solo definida em (15).

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\Delta z^2} + \frac{8}{\Delta x \Delta s} - \left( h'(x) - \frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{\varepsilon} \right) \frac{2}{\Delta x \Delta s} + \frac{2(n^2-1)}{\Delta s^2} \right] \Pi_{i+1,j}^{t+1} \\ & - \frac{1}{\Delta z^2} \Pi_{i+1,j-1}^{t+1} = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{\varepsilon} \frac{1}{\Delta z} \right) \int_0^s (\Pi_{i,j}^t - \Pi_{i,j}^{t-1} + \Pi_{i+1,j}^t - \Pi_{i+1,j}^{t-1}) \\ & N(s-s') \partial s' - \frac{8}{\Delta x \Delta s} (-\Pi_{i,j}^{t+1} - \Pi_{i+1,j}^t + \Pi_{i,j}^t) + \\ & \frac{1}{\Delta z^2} (\Pi_{i,j}^{t+1} - \Pi_{i,j-1}^{t+1} + \Pi_{i+1,j}^t - \Pi_{i+1,j-1}^t) + \frac{1}{\Delta z^2} (\Pi_{i,j}^t - \Pi_{i,j-1}^t) \\ & + \left( h'(x) - \frac{\sqrt{\varepsilon-1}}{\varepsilon} \right) \frac{1}{2\Delta z \Delta s} (-\Pi_{i+1,j-1}^t + \Pi_{i+1,j}^{t+1} - \Pi_{i,j-1}^t) + \\ & \frac{2(n^2-1)}{\Delta s^2} (\Pi_{i,j}^{t+1} - 2\Pi_{i,j}^t + \Pi_{i,j}^{t-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

Tanto na equação (9), quanto na equação (15), é possível calcular o valor de  $\Pi_{i+1,j}^{t+1}$  para cada passo de tempo  $t\Delta s$ . Para tornar isso possível as equações (9) e (15) foram escritas na forma  $Ax = B$ , sendo  $A$  a matriz tridiagonal.

Para solucionar os sistemas de equações, foi utilizado o algoritmo de Thomas. Esta técnica tem como característica, a economia de memória e tempo computacional, devido a mesma não armazenar os elementos nulos da matriz, armazenando apenas os elementos da diagonal principal, os elementos logo acima e logo abaixo desta diagonal[7].

### III. CAMADA ABSORVENTE E RESULTADOS NUMÉRICOS

#### A. Truncamento de domínio

Segundo Levy em [3], camadas absorventes são camadas adicionadas acima da região de interesse, na qual um filtro é aplicado ao campo PE para absorver energia ascendente no momento em que ele retorna do topo do domínio. Isto é equivalente a adicionar uma parte complexa ao índice de refração, tornando assim o meio de propagação com perdas na camada absorvente. Para que o filtro não afete a propagação na região de interesse, deve ser tal que apenas a energia desprezível se propague de volta para o baixo da camada.

Portanto, para evitar o truncamento artificial causando a forte reflexão de ondas acima da região de interesse, que afetam os resultados do cálculo numérico, é necessário fazer com que o campo dentro do limite superior seja lentamente reduzido atenuado[8]. Uma maneira efetiva de implementar camadas absorventes é utilizando janelas de amortecimento, amplamente utilizadas em processamento de sinal e projetos de filtros.

Para seu funcionamento, é necessário apenas multiplicar os termos da matriz  $[B]$  correspondentes à região da janela em cada ponto correspondente do vetor solução  $[x]$ . Como consequência dessa operação, há uma redução da amplitude da

função  $\Pi(x, z, s)$  no interior da camada absorvente a fim de reduzir o efeito causado por reflexões espúrias.

Serão analisadas quatro tipos de janelas: janela de Hanning  $w_H(n)$ , janela de Hamming  $w_{HM}(n)$ , janela de Hanning-Poisson  $w_{HP}(n)$  e janela de Kaiser  $w_K(n)$ . Abaixo suas respectivas expressões propostas por Harris em [9] são definidas.

A janela de Hanning ou janela Hann, é uma janela muito utilizada devido a sua simplicidade, tem mostrado ser uma alternativa interessante. Sua expressão é definida por

$$w_H(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \right], n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

A janela de Hamming pode ser considerada como a janela de Hanning modificada. Junto com a janela de Hanning, fazem parte da família de janelas de cosseno. Sua expressão é definida como

$$w_{HM}(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right), n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (14)$$

A janela de Hanning-Poisson é construída pelo produto da janela de Hanning com a janela de Poisson (definida como a parte exponencial). Sua expressão é definida como

$$\begin{aligned} w_{HP}(n) &= 0,5 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \right] \\ & \exp\left(-\alpha \frac{2|n|}{N}\right), 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro variável desta função. Para as simulações, foi considerado um valor de  $\alpha = 4$ .

A janela de Kaiser utiliza a Função de Bessel Modificada de Primeira Espécie e Ordem Zero  $I_0$ . Esse tipo de janela é mais versátil e mais ajustável. O parâmetro  $\alpha$  permite ajustar a função, assim como a janela de Poisson. Sua expressão é definida como

$$w_K(n) = \frac{I_0 \left[ \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n-N}{N}\right)^2} \right]}{I_0[\alpha]}, 0 \leq n \leq N \quad (16)$$

#### B. Resultados Numéricos

Para obtenção dos resultados numéricos foram determinados alguns parâmetros: considerou-se atmosfera não-homogênea com valores de  $n=1,0003$  conforme obtido também em [10]. O padrão da onda foi escolhido com polarização vertical e, a fonte foi escolhida como sendo um pulso estreito se enquadrando nas características UWB (*Ultra Wide Band*) [11-12]. Sua formulação é definida pela equação (17). O relevo simulado possui extensão de 5500 metros, apresentando perfil irregular com regiões rurais e com algumas construções, sendo considerado um enlace sem visada. A Figura 1 mostra o domínio computacional descrito, onde o mesmo foi obtido através de mapas digitais com resolução de 50 metros. A altura de transmissão foi 10,4 metros do solo e a recepção a 2,4 metros. Foram utilizadas constantes elétricas para o solo padrão  $\varepsilon_r = 15$  e  $\sigma = 0,012 S/m$  na modelagem do solo [13]

$$\Pi(0, ct, z) = \text{Re} \left[ \frac{j}{\pi} \left( \frac{6,75}{j+T} - \frac{13,5}{j+2T} + \frac{6,75}{j+3T} \right) \right], \quad (17)$$

onde

$$T = \frac{\ln(3)}{2\pi f_c}, \quad (18)$$

e  $f_c$  representa a frequência central, escolhida como 850 MHz .

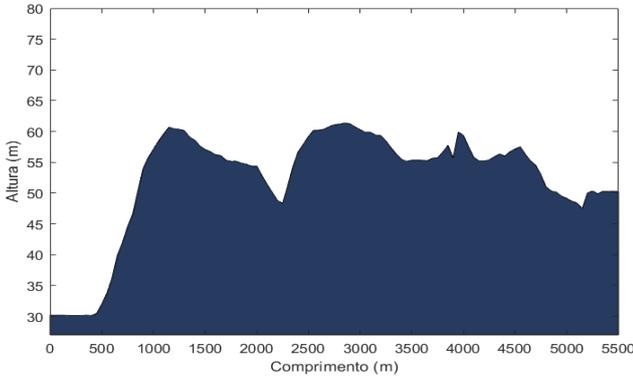


Fig. 1. Perfil simulado.

As simulações foram feitas alterando os tipos de janelas de amortecimento, afim de avaliar o desempenho das mesmas quando são inseridas no modelo de equação parabólica no domínio do tempo. A Figura 2 mostra o comportamento das quatro janelas simuladas, considerando 200 amostras.

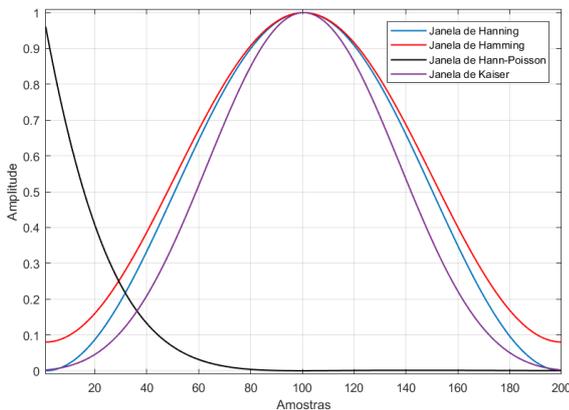


Fig. 2. Comportamento das janelas de truncamento.

Abaixo na Figura 3 são mostrados os quatro resultados obtidos com os diferentes tipos de janela, onde, para cada tipo de janela é apresentado o perfil de campo, que consiste em determinar o valor de campo em todos os pontos do ambiente de simulação.

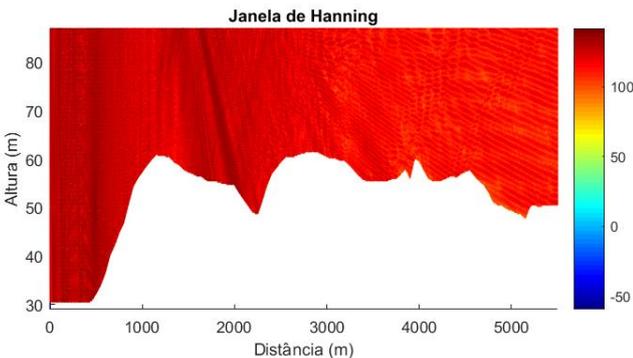


Fig. 3. (a)

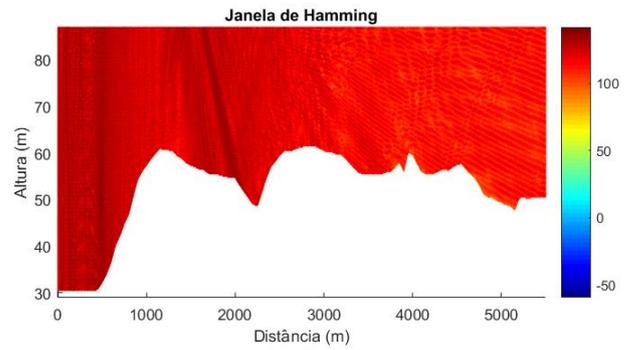


Fig. 3. (b)

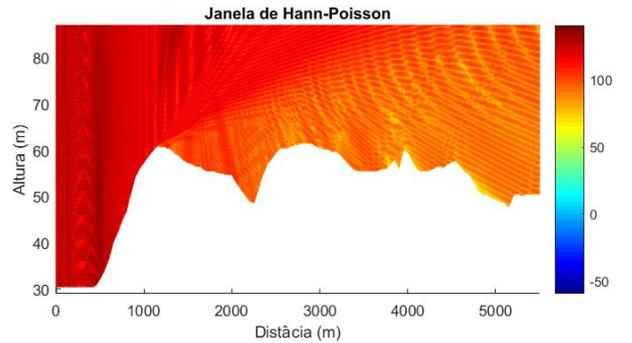


Fig. 3. (c)

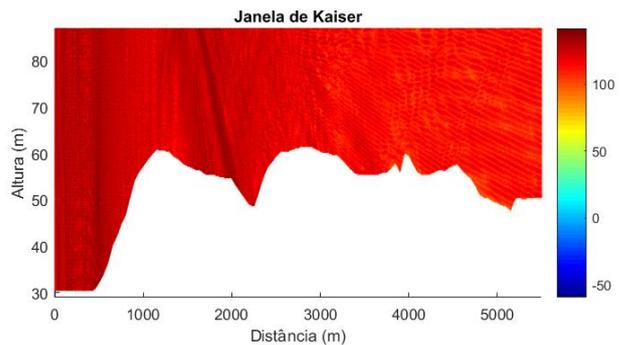


Fig. 3. (d)

Fig. 3. Perfil de campo no domínio do tempo para diferentes tipos de janela (a) Hanning, (b) Hamming, (c) Hanning-Poisson, e (d) Kaiser.

Após analisar o perfil de campo considerando os quatro tipos de janelas, foi feito um comparativo com o sinal recebido no ponto especificado. Na Figura 4 é mostrado o comparativo entre os tipos de janela analisados, onde as amplitudes dos sinais recebidos encontram-se normalizadas.

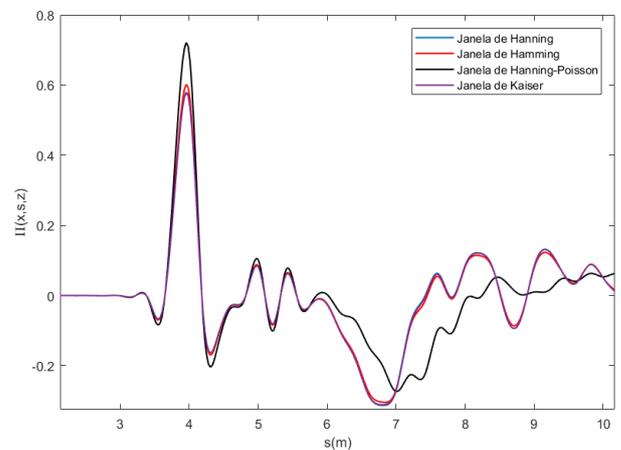


Fig. 4. Sinal recebido com amplitude normalizada.

Nota-se que devido o comportamento semelhante para as janelas de Hanning, Hamming e Kaiser, os perfis de campo apresentaram comportamento semelhante e dentro as janelas avaliadas, o sinal recebido que apresentou maior amplitude e menos oscilações foi com o uso da janela de Hanning-Poisson.

#### IV. CONCLUSÕES

Através desta análise foi possível verificar a praticidade do uso de janelas de amortecimento em modelos de equações parabólicas para limitar o domínio computacional. Para o modelo de equação parabólica considerou-se uma formulação onde a atmosfera não-homogênea é simulada, afim de tornar o ambiente de propagação mais próximo da realidade. Verificou-se preliminarmente que dentro todas as janelas, a de Hanning, Hamming e Kaiser apresentaram resultados semelhantes, tanto para os gráficos de espalhamento, quanto para os gráficos de sinal recebido, sendo que a janela de Hamming apresentou amplitude um pouco maior em relação à janela de Hanning e Kaiser. Dentro todos os casos, a janela de Hanning-Poisson apresentou maior amplitude de sinal recebido se comparada com as outras três janelas. De todas as janelas simuladas a janela de Hanning-Poisson apresentou melhor desempenho em termos de amplitude de sinal recebido, possivelmente pelo fato desta janela atenuar os efeitos reflexivos da camada absorvente mais rapidamente.

#### REFERÊNCIAS

- [1] M. A. Leontovich, *A New Method to Solve Problems of EM Wave Propagation over the Earth Surface*. USSR Academy of Sciences Trans., Physics Series, v. 8, No. 1, pp. 16–22, 1944 (in Russian).
- [2] M. A. Leontovich e V. A. Fock, *Solution of the Problem of Electromagnetic Wave Propagation along the Earth's Surface by the Method of Parabolic Equation*. J. Phys. USSR, v. 10, pp. 13–23, 1946.
- [3] M. Levy, *Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation*, ser. IEE Electromagnetic Waves. London, U.K.: IEE, v. 45, 2000.
- [4] G. Apaydin e L. Sevgi, *Radio Wave Propagation and Parabolic Equation Modeling*. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2017.
- [5] A. V. Popov, V. V. Kopeikin, N.Y. Zhu e F.M. Landstorfer, *Modeling EM Transient Propagation over Irregular Dispersive Boundary*. Electronics Letters, v. 38, no. 14, pp. 691–692, 2002.
- [6] S.C. Chapra e R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, Seventh Edition, New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2010.
- [7] A. Gilat e V. Subramaniam, *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. Tradução Alberto Resende de Conti. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre: Bookman, 2008.
- [8] P. Zhang, L. Bai, Z. Wu e F. Li, *Effect of Window Function on Absorbing Layers Top Boundary in Parabolic Equation*, 3rd Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation, 2014, pp. 849-852.
- [9] F.J. Harris, *On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform*, proceedings of the IEEE, 1978, pp. 51-83.
- [10] Y. Yang e Yunliang Long, *Modeling EM Pulse Propagation in the Troposphere Based on the TDPE Method*. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, v. 12, 2013, pp. 190-193
- [11] R. B. V. Teperino, *Utilização de Equações Integrais no Domínio do Tempo na Predição da Propagação sobre Terrenos Irregulares*. Dissertação de mestrado, PPGEE-UFMG, Belo Horizonte, MG, Março 2003.
- [12] M.M. Evangelista, *Equação Parabólica no Domínio do Tempo Aplicada ao Problema de Predição de Cobertura Radioelétrica*, Dissertação de mestrado, PPGEE-UFMG, Belo Horizonte, MG, Fevereiro 2016.
- [13] C. Garcia, *Propagador Baseado em Janela Deslizante com Formulação FDTD Incondicionalmente Estável de Alta Ordem*, Tese de doutorado, PPGEE-UFMG, Belo Horizonte, MG, Junho 2012.