

Análise de Complexidade do Módulo de Treliça Seccionado de Códigos Convolucionais

Isaac B. Benchimol, Cecilio Pimentel e Richard Demo Souza

Resumo—O módulo de treliça mínimo para códigos convolucionais desenvolvido por Sidorenko e Zyablov e por McEliece e Lin apresenta uma estrutura irregular com número de estados em cada seção periodicamente variante no tempo. Este artigo apresenta o seccionamento do módulo de treliça mínimo, capaz de produzir uma representação de treliça mais compacta e regular (do ponto de vista do número máximo de estados e do número de seções), mantendo-se a complexidade de decodificação e espectro de distâncias do módulo de treliça mínimo. Os efeitos do seccionamento da treliça são investigados sobre a complexidade de treliça, definida por McEliece e Lin, e complexidade comparativa. Mostra-se que várias topologias de treliça de códigos propostas na literatura são membros de classes de módulos de treliça mínimo seccionados.

Palavras-Chave—Códigos convolucionais, complexidade de decodificação, seccionamento de treliça, treliça mínima.

Abstract—The minimal trellis module for convolutional codes developed by Sidorenko and Zyablov and by McEliece and Lin presents an irregular structure with periodically time varying number of states in each section. This paper presents the sectionalization of the minimal trellis module which yields a more compact and regular trellis representation (in terms of maximum number of states and total number of sections) with the same decoding complexity and distance spectrum of the minimal trellis module. We investigate the effects of the trellis sectionalization over the trellis complexity measure, defined by McEliece and Lin, and over the merge complexity measure. We show that various trellis topologies proposed in the literature are class members of sectionalized trellis modules.

Keywords—Convolutional codes, decoding complexity, trellis sectionalization, minimal trellis.

I. INTRODUÇÃO

Códigos convolucionais podem ser representados por estruturas de treliça periódicas, sendo o menor período denominado de módulo de treliça [1]. Em geral, um módulo de treliça M de um código convolucional $C(n, k, v)$ de taxa $R = k/n$ consiste em n' seções de treliça compreendidos entre os tempos 0 a n' , 2^v estados no tempo t , 2^b ramos conectando os estados entre os tempos t e $t+1$, e l_t bits rotulando cada ramo entre os tempos t e $t+1$, para $0 \leq t \leq n'-1$. O comprimento de restrição é v . Tradicionalmente, um código convolucional pode ser representado por um módulo de treliça convencional

consistindo numa estrutura regular com $n' = 1$ seção. Por outro lado, o módulo de treliça mínimo para códigos convolucionais, introduzido por McEliece e Lin [2], apresenta uma estrutura irregular com $n' = n$ seções com número de estados e de ramos divergindo de cada estado variante no tempo.

O algoritmo de Viterbi (VA) operando sobre um módulo de treliça M executa operações aritméticas de adição e comparação [2]-[4]. O número de adições e comparações por bit de informação requerido pela decodificação corresponde às complexidades de treliça e comparativa, respectivamente. Ambas as complexidades de treliça e comparativa formam a complexidade computacional de um algoritmo de decodificação de máxima verossimilhança [5] e também têm reflexo na complexidade de implementação em hardware [6]. O módulo de treliça mínimo apresenta o mínimo valor possível para as complexidades de treliça e comparativa para um dado código [4], enquanto que o módulo convencional apresenta o máximo valor para estas complexidades.

Em [1][7][8] são mostradas tabelas com os melhores códigos convolucionais (em termos de espectro de distâncias) para valores fixos de complexidade de treliça considerando-se o módulo de treliça mínimo. Em [9][10] é proposto um método de busca de códigos convolucionais fixando-se o número máximo de estados em um módulo. Esta é a medida de complexidade de treliça adotada em [9][10], e está relacionada com a complexidade de implementação do decodificador em hardware, bem como o número de seções do módulo [11][12]. Estes resultados produzem topologias de treliça com boa relação entre desempenho e complexidade de decodificação.

O seccionamento é uma operação sobre a treliça que remove os estados num tempo t e redireciona os ramos entre os tempos $t-1$ e $t+1$ [4]. Partindo-se do módulo de treliça mínimo e aplicando-se este procedimento sequencialmente, chega-se a um módulo de treliça mais compacto e regular (em termos do número máximo de estados e do número de seções). Portanto, os módulos de treliça seccionados propostos neste trabalho têm o potencial de reduzir o consumo de energia total do receptor (em relação à implementação usando a treliça convencional), um assunto relevante na literatura atual [13][14].

Neste artigo introduzimos novas classes de módulos de treliça produzidas pelo seccionamento. Há $2^{n'-1}$ possibilidades de seccionar o módulo de treliça mínimo, e o problema do seccionamento consiste em encontrar a melhor escolha dentre todas as possibilidades que minimize uma medida de complexidade de treliça [4]. Construímos um conjunto de regras que governam os efeitos do seccionamento sobre as complexidades de treliça e comparativa. Identificam-se padrões de seccionamento do módulo mínimo que são capazes de

I. B. Benchimol, CMDI, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas (IFAM), Manaus, AM, ibench@ifam.edu.br.

C. Pimentel, CODEC-DES, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, PE, cecilio@ufpe.br.

R. D. Souza, CPGEI, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR, richard@utfpr.edu.br.

Este trabalho recebeu apoio da FAPEAM e CNPq.

diminuir o número máximo de estados sem comprometer estas complexidades. Este trabalho apresenta uma lista de perfis de treliças seccionadas mais compactas com as mesmas complexidades (de treliça e comparativa) do módulo de treliça mínimo para as taxas $2/5$ e $3/5$. Várias topologias de treliça propostas na literatura, como códigos convolucionais puncionados (PCCs) [15] e aquelas propostas em [8] são membros de famílias de treliças seccionadas.

O restante deste artigo é estruturado como segue. Na Seção II apresentamos os conceitos de módulo de treliça e suas complexidades. A Seção III apresenta o seccionamento do módulo de treliça mínimo. As regras de seccionamento e alguns exemplos são apresentados na Seção IV. Na Seção V listamos alternativas de treliça mais compactas que a mínima. Finalmente, as conclusões são apresentadas na Seção VI.

II. COMPLEXIDADES DE UM MÓDULO DE TRELIÇA

Em [2] McEliece e Lin definiram uma medida de complexidade de decodificação sobre um módulo de treliça. Esta medida é denominada de *complexidade de treliça de um módulo* M para um dado código convolucional C , denotada por $TC(M)$, e de acordo com [2] é dada por

$$TC(M) = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{n'-1} l_t 2^{v_t+b_t} \quad (1)$$

símbolos por bit. O número de comparações por bit de informação requerido pelo VA sobre um módulo de treliça M para um código convolucional C , denotada por $MC(M)$, é definido em [5] por

$$MC(M) = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{n'-1} (2^{v_t+b_t} - 2^{v_{t+1}}) \quad (2)$$

em que $v_{n'} = v_0$. Esta medida é denominada de *complexidade comparativa de um módulo* M de um código convolucional C .

Para o módulo de treliça convencional, M_{conv} , temos $l_t = n$, $n' = 1$, $v_0 = v_1 = v$ e $b_0 = k$. Portanto, a complexidade de treliça para este módulo é $TC(M_{conv}) = (n/k)2^{v+k}$ símbolos por bit, e a complexidade comparativa é $MC(M_{conv}) = (2^v/k)(2^k - 1)$.

Exemplo 1: Considere o código convolucional $C(5,3,3)$. O módulo de treliça convencional para este código apresenta $TC(M_{conv}) = 106,67$ símbolos por bit e $MC(M_{conv}) = 18,67$. Este código possui distância livre $d_{free} = 4$ e espectro de distâncias $N = (1,5,13,39,111)$. As matrizes geradoras $G(D)$ dos códigos dos exemplos deste trabalho são listadas em [1].

O módulo de treliça mínimo para códigos convolucionais foi definido em [2]. Este módulo apresenta uma estrutura irregular com $n' = n$ seções e $l_t = 1$ bit por ramo $\forall t$. A complexidade de estados v_t e a complexidade de ramos b_t na profundidade t serão denotadas por \tilde{v}_t e \tilde{b}_t , respectivamente. Os perfis de estados e de ramos do módulo de treliça mínimo serão denotados por $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_{n-1})$ e $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_{n-1})$, respectivamente. Portanto, a complexidade de treliça do módulo de treliça mínimo, M_{min} , é dada por

$$TC(M_{min}) = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{n-1} 2^{\tilde{v}_t + \tilde{b}_t} \quad (3)$$

símbolos por bit, e a complexidade comparativa do módulo de treliça mínimo é dada por

$$MC(M_{min}) = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{n-1} (2^{\tilde{v}_t + \tilde{b}_t} - 2^{\tilde{v}_{t+1}}). \quad (4)$$

A Figura 1 mostra o módulo de treliça mínimo M_{min} para o código $C(5,3,3)$ do Exemplo 1.

Enquanto o módulo de treliça convencional M_{conv} apresenta uma estrutura regular com apenas uma seção, 8 estados com 8 ramos divergindo de cada estado, cada ramo rotulado com 5 bits, o módulo de treliça mínimo M_{min} na Figura 1 apresenta $n = 5$ seções, com 8 ou 16 estados cada. Observe que apenas a primeira, segunda e quarta seções apresentam bits de informação. A complexidade de treliça do módulo de treliça mínimo M_{min} é $TC(M_{min}) = 26,67$ símbolos por bit e a complexidade comparativa é $MC(M_{min}) = 8$. Portanto, as complexidades de treliça e comparativa do módulo de treliça mínimo deste código são apenas 25% e 42,8% das complexidades de treliça e comparativa do módulo de treliça convencional, respectivamente.

III. SECCIONAMENTO DE UM MÓDULO DE TRELIÇA

Considere um módulo de treliça mínimo M_{min} consistindo de n seções entre o intervalo de tempo 0 a n . O seccionamento de M_{min} no tempo i para $i = 1, \dots, n-1$, significa a remoção dos estados no tempo i e a conexão dos estados no tempo $i-1$ diretamente com os estados no tempo $i+1$, se existir um caminho entre estes em M_{min} . O rótulo dos ramos no módulo seccionado é formado pela concatenação dos rótulos dos ramos dos caminhos entre os tempos $i-1$ e $i+1$ em M_{min} . O módulo de treliça seccionado no tempo i possui $n' = n-1$ seções. Este procedimento pode ser aplicado sequencialmente em vários tempos, portanto há 2^{n-1} formas distintas de selecionar os tempos a serem seccionados, e o número de seções seccionadas num módulo de treliça varia de $n-1$ a 1.

Define-se um vetor binário de seccionamento, denotado por *vetsec*. O i -ésimo elemento de *vetsec*, denotado por $vetsec_i$, $i = 1, \dots, n-1$ indica que há seccionamento no tempo i se $vetsec_i = 1$, caso contrário $vetsec_i = 0$. Se $vetsec_i = 1$ para $i = 1, \dots, n-1$, o módulo resultante é o módulo convencional e se $vetsec_i = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, resulta no módulo de treliça mínimo. Os perfis de estados e de ramos do módulo de treliça seccionado M_{sec} são denotados, respectivamente, por \mathbf{v}_{sec} e \mathbf{b}_{sec} . O perfil de rótulos da treliça seccionada, denotado por \mathbf{l}_{sec} , define o número de bits que rotulam os ramos por seção. O exemplo a seguir mostra o seccionamento do módulo de treliça mínimo do código $C(5,3,3)$ em que são listados os perfis e as complexidades do módulo de treliça seccionado para diferentes valores de *vetsec*.

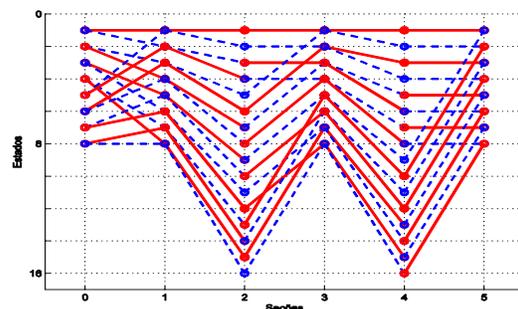


Fig. 1. Módulo de treliça mínimo para o código $C(5,3,3)$. As linhas sólidas representam bit codificado "0" e as tracejadas o bit codificado "1".

Exemplo 2: Considere o código $C(5,3,3)$ do Exemplo 1 com perfis $\tilde{\mathbf{v}} = (3,3,4,3,4)$, $\tilde{\mathbf{b}} = (1,1,0,1,0)$, e complexidades $TC(M_{min}) = 26,67$, $MC(M_{min}) = 8$. O módulo de treliça mínimo M_{min} para este código é mostrado na Figura 1. A Tabela I lista os perfis \mathbf{v}_{sec} , \mathbf{b}_{sec} , \mathbf{l}_{sec} e as complexidades $TC(M_{sec})$ e $MC(M_{sec})$ do módulo de treliça seccionado de algumas das 16 possibilidades de seccionamento de M_{min} .

Observa-se na Tabela I que para $\mathbf{vetsec} = (0,1,0,1)$ o número máximo de estados é reduzido de 16 para 8 e o número de seções é reduzido para $n' = 3$, permitindo até 2 bits por ramo, sem qualquer alteração nas complexidades de treliça ou comparativa. Não é possível reduzir n' além deste valor sem que haja um aumento nas complexidades. A Figura 2 mostra a estrutura resultante deste seccionamento. Os perfis $\mathbf{v}_{sec} = (3,3,3)$, $\mathbf{b}_{sec} = (1,1,1)$, $\mathbf{l}_{sec} = (1,2,2)$ e as complexidades $TC(M_{sec}) = 26,67$ e $MC(M_{sec}) = 8$ mostrados na Tabela I poderiam indicar que se trata da representação de um PCC [15] de $C(5,3,3)$, uma classe especial de códigos convolucionais representável por um módulo de treliça de baixa complexidade. Entretanto, observa-se na Figura 3 que a topologia de transições de estados nesta treliça indica que este código não é um PCC.

Pode-se reduzir sucessivamente o número de seções mantendo-se o número máximo de estados igual a 8, ao custo de um aumento das complexidades, conforme é comentado a seguir

- Para $\mathbf{vetsec} = (1,1,0,1)$, obtém-se $\mathbf{v}_{sec} = (3,3)$, $\mathbf{b}_{sec} = (2,1)$ e $\mathbf{l}_{sec} = (3,2)$. O número de seções é $n' = 2$, permitindo-se até 3 bits por ramo, $TC(M_{sec}) = 42.67$ and $MC(M_{sec}) = 10.67$.
- Para $\mathbf{vetsec} = (1,1,1,1)$, obtém-se $\mathbf{v}_{sec} = (3)$, $\mathbf{b}_{sec} = (3)$ e $\mathbf{l}_{sec} = (5)$, correspondendo ao módulo de treliça convencional para o código $C(5,3,3)$, com $TC(M_{sec}) = 106.67$ e $MC(M_{sec}) = 18.67$.

Na Tabela I podemos verificar que as complexidades $TC(M_{sec})$ e $MC(M_{sec})$ podem aumentar ou não em relação às complexidades do módulo mínimo. Dado um módulo M_{min} , analisamos na próxima seção todas as possibilidades de seccionamento de uma seção isolada deste módulo e construímos uma série de regras que norteiam os efeitos do seccionamento sobre as complexidades. Por exemplo, é possível estabelecer as condições necessárias para que o módulo de treliça seccionado tenha as mesmas complexidades do módulo de treliça mínimo.

IV. REGRAS DE SECCIONAMENTO E SEUS EFEITOS SOBRE AS COMPLEXIDADES

Primeiramente vamos analisar os efeitos do seccionamento sobre as complexidades de treliça e comparativa para um tipo específico de seção. Definimos um setor de treliça consistindo de duas seções consecutivas de um módulo de treliça mínimo M_{min} . Por exemplo, considere o setor de treliça S com os perfis $(\tilde{v}_{i-1}, \tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1}) = (v, v, v)$, $(\tilde{b}_{i-1}, \tilde{b}_i) = (1, 0)$ e $(\tilde{l}_{i-1}, \tilde{l}_i) = (1, 1)$. De acordo com (1) e (2) as complexidades de treliça e comparativa do setor S , denotadas por $TC(M_S)$ e $MC(M_S)$, respectivamente, são dadas por

$$TC(M_S) = \frac{1}{k} \sum_{m=-1}^0 l_{i+m} 2^{v_{i+m} + b_{i+m}} = \frac{1}{k} 3(2^v) \quad (5)$$

$$MC(M_S) = \frac{1}{k} \sum_{m=-1}^0 (2^{v_{i+m} + b_{i+m}} - 2^{v_{i+1+m}}) = \frac{1}{k} (2^v). \quad (6)$$

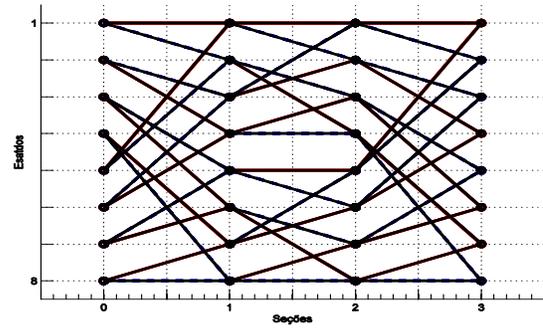


Fig. 2 Módulo de treliça seccionado para $\mathbf{vetsec} = (0,1,0,1)$ no Exemplo 2. Comparando com o módulo de treliça mínimo, o número máximo de estados é reduzido de 16 para 8 e o número de seções é reduzido para $n' = 3$, sem qualquer alteração nas complexidades de treliça ou comparativa.

Se considerarmos agora o seccionamento no tempo i de S , obtemos uma única seção com $\mathbf{v}_{sec} = (v, v)$, $\mathbf{b}_{sec} = (1)$ e $\mathbf{l}_{sec} = (2)$. As complexidades $TC(M_{S'})$ e $MC(M_{S'})$ desta nova seção são

$$TC(M_{S'}) = \frac{1}{k} 4(2^v) \quad \text{e} \quad MC(M_{S'}) = \frac{1}{k} (2^v). \quad (7)$$

Portanto, para este caso específico de seccionamento da seção i em que $\tilde{b}_i = 0$, $\tilde{b}_{i-1} = 1$ e $\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1}$ obtém-se $TC(M_{S'}) > TC(M_S)$ e $MC(M_{S'}) = MC(M_S)$. Repetimos este procedimento de forma exaustiva para todos os possíveis perfis de setores, e com base nestes resultados criamos um conjunto de regras que se aplicam ao seccionamento de um módulo de treliça mínimo.

Considere o módulo M_{min} com perfis $\tilde{\mathbf{v}}$ e $\tilde{\mathbf{b}}$, complexidades $TC(M_{min})$ e $MC(M_{min})$ e considere o módulo de treliça seccionado M_{sec} resultante do seccionamento de M_{min} no tempo i , para $i = 1, \dots, n-1$. As seguintes regras são aplicadas:

1. Se a seção i não contiver informação, ou seja, somente um ramo diverge de cada estado ($\tilde{b}_i = 0$), então
 - a. $MC(M_{sec}) = MC(M_{min})$
 - b. $TC(M_{sec}) = TC(M_{min})$ se $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1} + 1$ e $\tilde{b}_{i-1} = 1)$ ou $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1}$ e $\tilde{b}_{i-1} = 0)$.
 - c. $TC(M_{sec}) > TC(M_{min})$ se $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1} - 1$ e $\tilde{b}_{i-1} = 0)$ ou $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1}$ e $\tilde{b}_{i-1} = 1)$.
2. Se a seção i contiver informação, ou seja, dois ramos convergem de cada estado ($\tilde{b}_i = 1$), então
 - a. $TC(M_{sec}) > TC(M_{min})$
 - b. $MC(M_{sec}) = MC(M_{min})$ se $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1}$ e $\tilde{b}_{i-1} = 0)$ ou $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1} + 1$ e $\tilde{b}_{i-1} = 1)$.
 - c. $MC(M_{sec}) > MC(M_{min})$ se $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1}$ e $\tilde{b}_{i-1} = 1)$ ou $(\tilde{v}_i = \tilde{v}_{i-1} - 1$ e $\tilde{b}_{i-1} = 0)$.

O caso analisado em (5)-(7) é refletido pela regra 1c. Estas regras permitem selecionar as seções de um módulo de treliça mínimo, de tal modo que o seccionamento destas resulte num módulo seccionado que satisfaça certos requisitos de complexidade. O próximo exemplo utiliza estas regras para obter o módulo de treliça seccionado mais compacto possível mantendo as complexidades do módulo de treliça mínimo. Isto é possível selecionando-se as seções em que $\tilde{b}_i = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$, de modo que a regra 1b seja satisfeita.

TABELA I. RESULTADOS DO SECCIONAMENTO DO EXEMPLO 2.

$vetsec$	v_{sec}	b_{sec}	l_{sec}	$TC(M_{sec})$	$MC(M_{sec})$
(0,0,0,0)	(3,3,4,3,4)	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1)	26,67	8
(0,1,0,0)	(3,3,3,4)	(1,2,1,1)	(1,2,1,1)	26,67	8
(0,1,0,1)	(3,3,3)	(1,2,2)	(1,2,2)	26,67	8
(1,0,0,0)	(3,4,3,4)	(2,1,1,1)	(2,1,1,1)	37,33	10,67
(1,1,0,0)	(3,3,4)	(3,1,1)	(3,1,1)	42,67	10,67
(1,1,0,1)	(3,3)	(3,2)	(3,2)	42,67	10,67
(1,0,1,0)	(3,4,4)	(2,1,1)	(2,2,1)	48	13,33
(1,0,1,1)	(3,4)	(2,3)	(2,3)	53,33	13,33
(1,1,1,0)	(3,4)	(4,1)	(4,1)	90,67	18,67
(1,1,1,1)	(3)	(5)	(5)	106,67	18,67

Exemplo 3: Considere o código $C(5,2,4)$ com $TC(M_{min})=96$, $MC(M_{min})=24$, perfis $\tilde{v}=(4,5,5,5,5)$ e $\tilde{b}=(1,0,1,0,0)$ [1], $d_{free}=10$ e $N=(7,0,32,0,66)$ com módulo de treliça mínimo mostrado na Figura 3.

Note que as seções 1, 3 e 4 do módulo de treliça mínimo da Figura 3 apresentam $\tilde{b}_i=0$ e a seção 2, $\tilde{b}_i=1$. Para manter as complexidades nos seus valores mínimos, o seccionamento das seções 2 e 3 é descartado, pois isto ocasiona um aumento da complexidade de treliça, conforme as regras 2a e 1c, respectivamente. Portanto, concluímos que o seccionamento ótimo neste caso (pela regra 1b) é obtido com $vetsec=(1,0,0,1)$ resultando no módulo de treliça seccionado da Figura 4 com $v_{sec}=(4,5,5)$, $b_{sec}=(1,1,0)$, $l_{sec}=(2,1,2)$ e complexidades $TC(M_{sec})=96$ e $MC(M_{sec})=24$, as mesmas do módulo de treliça mínimo. Por outro lado, se optarmos pelo seccionamento de todas as seções com $\tilde{b}_i=0$, ou seja, dado $vetsec=(1,0,1,1)$, obtemos $MC(M_{sec})=MC(M_{min})=24$ e $TC(M_{sec})=128$ com $v_{sec}=(4,5)$, $b_{sec}=(1,1)$ e $l_{sec}=(2,3)$, o mesmo módulo listado em [8, Tabela I], que lista os melhores códigos convolucionais com $n'=k$ e perfil de estados formado unicamente por v e $v+1$. A complexidade comparativa mantém-se inalterada (pela regra 1a) enquanto que a complexidade de treliça é aumentada devido ao seccionamento da seção 3 (pela regra 1c). Embora no último caso ($vetsec=(1,0,1,1)$) a complexidade de treliça apresente um aumento, o número de seções n' é reduzido de 5 para 2, produzindo uma treliça mais compacta.

Exemplo 4: Considere o código $C(7,4,4)$ com $TC(M_{min})=80$, $MC(M_{min})=24$, perfis $\tilde{v}=(4,5,6,5,5,4,5)$ e $\tilde{b}=(1,1,0,1,0,1,0)$, $d_{free}=6$ e $N=(4,20,45,116,306)$ [1]. O módulo de treliça mínimo para este código é mostrado na Figura 5. A Tabela II lista os perfis v_{sec} , b_{sec} , l_{sec} e as complexidades $TC(M_{sec})$ e $MC(M_{min})$ do módulo de treliça seccionado de algumas possibilidades de seccionamento da treliça mínima deste código.

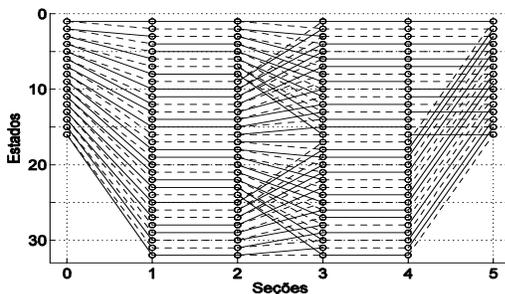


Fig. 3 Módulo de treliça mínimo para o código $C(5,2,4)$ do Exemplo 3. As linhas sólidas representam bit codificado “0” e as tracejadas, bit “1”.

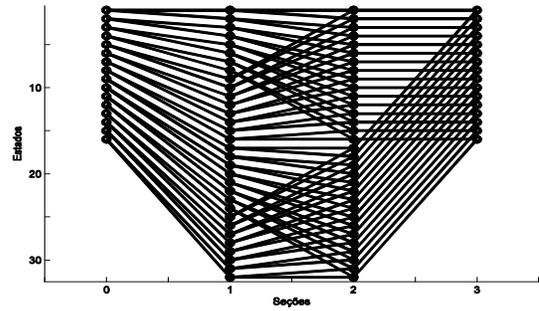


Fig. 4 Módulo de treliça seccionado para o código $C(5,2,4)$ do Exemplo 3 obtido com $vetsec=(1,0,0,1)$ com as mesmas complexidades do módulo de treliça mínimo da Figura 3.

Primeiramente considere o seccionamento do módulo de treliça mínimo da Figura 5 nas seções 2 e 6. Dado $vetsec=(0,1,0,0,0,1)$ obtemos o módulo de treliça seccionado com $TC(M_{sec})=80$ e $MC(M_{sec})=24$ e perfis $v_{sec}=(4,5,5,5,4)$, $b_{sec}=(1,1,1,0,1)$ e $l_{sec}=(1,2,1,1,2)$. Este módulo de treliça é o mais compacto obtido com as mesmas complexidades do módulo de treliça mínimo (pela aplicação das regras 1a e 1b). Note que o número máximo de estados é reduzido de 64 para 32. Agora assumamos o seccionamento das seções em que $\tilde{b}_i=0$. Dado $vetsec=(0,1,0,1,0,1)$ obtemos o módulo de treliça seccionado com $TC(M_{sec})=88$, $MC(M_{sec})=24$, e perfis $v_{sec}=(4,5,5,4)$, $b_{sec}=(1,1,1,1)$ e $l_{sec}=(1,2,2,2)$. Neste caso ocorre um aumento da complexidade de treliça pela regra 2a, reduzindo-se n' para 4. Se incluirmos o seccionamento da seção 1 ($vetsec=(1,1,0,1,0,1)$), n' é reduzido para 3 obtendo-se $TC(M_{sec})=96$ pela regra 1a. Pode-se novamente reduzir o número máximo de estados para 16 (o mesmo da treliça convencional) e n' para 2 aplicando-se $vetsec=(1,1,1,1,0,1)$ resultando $TC(M_{sec})=176$ e $MC(M_{sec})=32$. Ambas as complexidades de treliça e comparativa são aumentadas pelas regras 2a e 2c, respectivamente. Finalmente, obtemos a treliça convencional ($vetsec=(1,1,1,1,1,1)$) resultando num aumento significativo das complexidades com $TC(M_{sec})=448$ e $MC(M_{sec})=60$. A Tabela II lista todos estes casos.

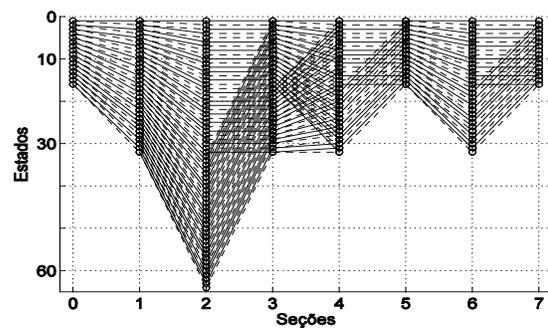


Fig. 5 Módulo de treliça mínimo para o código $C(7,4,4)$ do Exemplo 4. As linhas sólidas representam bit codificado “0” e as tracejadas, bit “1”.

TABELA II. RESULTADOS DO SECCIONAMENTO DO EXEMPLO 4.

$vetsec$	v_{sec}	b_{sec}	l_{sec}	$TC(M_{sec})$	$MC(M_{sec})$
(0,1,0,0,0,1)	(4,5,5,5,4)	(1,1,1,0,1)	(1,2,1,1,2)	80	24
(0,1,0,1,0,1)	(4,5,5,4)	(1,1,1)	(1,2,2)	88	24
(1,1,0,1,0,1)	(4,5,4)	(2,1,1)	(3,2,2)	96	24
(1,1,1,1,0,1)	(4,4)	(3,1)	(5,2)	176	32
(1,1,1,1,1,1)	(4)	(4)	(7)	448	60

V. MÓDULOS DE TRELIÇA MAIS COMPACTOS

Nesta seção apresentamos os novos perfis de treliça resultantes do seccionamento da treliça mínima de códigos de taxas $2/5$ e $3/5$ listados em [1]. Para uma dada taxa e uma dada $TC(M_{min})$ partimos da treliça mínima com $n'=n$ seções e listamos na Tabela III os perfis \mathbf{v}_{sec} , \mathbf{b}_{sec} e \mathbf{l}_{sec} da treliça seccionada com menor n' e com as mesmas complexidades $TC(M_{sec})$ e $MC(M_{sec})$ e espectro do módulo de treliça mínimo, ou seja, selecionamos o módulo de treliça seccionado mais compacto possível que satisfaça a regra de seccionamento 1b. O menor valor de n' está compreendido entre n (treliça mínima) e k (PCC). Outras topologias diferentes das apresentadas na literatura (com valores intermediários de n') também são obtidas e listadas na Tabela III. Um aspecto importante da treliça seccionada é o número máximo de estados. Em geral, o menor valor de n' é desejável se isto ocasionar a redução do número máximo de estados mantendo-se as complexidades e o espectro. Por exemplo, para $k=2/5$ e $TC(M_{sec})=80$ obtemos $n'=2$ e redução do número máximo de estados de 32 para 16 mantendo-se as complexidades do módulo de treliça mínimo de partida. Pode ocorrer redução de n' sem uma redução do número máximo de estados, mas ainda assim mantendo-se as complexidades e o espectro. Por exemplo, para $k=2/5$ e $TC(M_{sec})=24$ e $TC(M_{sec})=28$ obtemos $n'=3$ e $n'=4$, respectivamente, mantendo-se o número máximo de estados em 8. Em alguns casos, não é possível nenhuma redução de n' sem que isto ocasione um aumento das complexidades em relação à treliça mínima. Nestes casos, a melhor escolha recai sobre a própria treliça mínima, ou seja, $n'=n$, como pode ser observado para $k=3/5$ e $TC(M_{sec})=42,67$.

VI. CONCLUSÕES

Neste artigo apresentamos o seccionamento do módulo de treliça mínimo para códigos convolucionais. O principal objetivo é determinar a melhor escolha de seccionamento dentre as 2^{n-1} possibilidades de modo a obter um módulo de treliça mais compacto e regular com pouco ou nenhum aumento nas complexidades de treliça e comparativa. Um conjunto de regras foi construído para auxiliar esta tarefa. As topologias de treliças seccionadas propostas neste trabalho podem simplificar a implementação de decodificadores em

hardware e são uma alternativa interessante sobre o módulo de treliça mínimo.

REFERÊNCIAS

- [1] B. F. Uchôa-Filho, R. D. Souza, C. Pimentel, and M. Jar, "Convolutional codes under a minimal trellis complexity measure", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 57, no. 1, pp. 1-5, Jan. 2009.
- [2] R. J. McEliece and W. Lin, "The trellis complexity of convolutional codes", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no. 6, pp. 1855-1864, Nov. 1996.
- [3] R. J. McEliece, "On the BCJR trellis for linear block codes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp. 1072-1092, July 1996.
- [4] A. Lafourcade and A. Vardy, "Optimal sectionalization of a trellis," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, pp. 689-703, May 1996.
- [5] A. Katsiotis, P. Rizomiliotis, and N. Kalouptsidis, "Flexible convolutional codes: variable rate and complexity", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 60, no. 3, pp. 608-613, Mar. 2012.
- [6] B. U. Pedroni, V. A. Pedroni, and R. D. Souza, "Hardware implementation of a Viterbi decoder using the minimal trellis", in *Proc. of the 4th Inter. Symp. on Commun., Control and Signal Processing (ISCCSP'2010)*, pp. 1-4, Limassol, Cyprus, Mar. 2010.
- [7] H.-H. Tang and M.-C. Lin, "On $(n,n-1)$ convolutional codes with low trellis complexity," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 1, pp. 37-47, Jan. 2002.
- [8] A. Katsiotis, P. Rizomiliotis, and N. Kalouptsidis, "New constructions of high-performance low-complexity convolutional codes", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 7, pp. 1950-1961, Jul. 2010.
- [9] E. Rosnes and O. Ytrehus, "Maximum length convolutional codes under a trellis complexity constraint", *Journal of Complexity*, vol. 20, pp. 372-408, March-June 2004.
- [10] F. Hug, I. E. Bocharova, R. Johannesson, and B. Kudryashov, "Searching for high-rate convolutional codes via binary syndrome trellises", in *Proc. IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, Seoul, Korea, 2009, pp. 1358-1362.
- [11] S. Ranpara and D. Ha, "A low-power Viterbi decoder design for wireless communications applications", in *Proc. International ASIC Conference*, Washington D.C., USA, Sep. 1999, pp. 1-5.
- [12] M.-H. Chan, W.-T. Lee and L.-G. Chen, "IC design of an adaptive Viterbi Decoder", *IEEE Trans. on Consumer Electronics*, vol. 42, no. 1, pp. 52-62, Feb. 1996.
- [13] L. Zhao, J. Cai, and H. Zhang, "Radio-efficient adaptive modulation and coding: green communication perspective", in *Vehicular Technology Conference*, Budapest, Hungary, 2011, pp. 1-5.
- [14] F. Kienle, N. When, H. Meyr, "On complexity energy-and-implementation-efficiency of channel decoders", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 12, pp. 3301-3310, Dec. 2011.
- [15] E. Bocharova and B. D. Kudryashov, "Rational rate punctured convolutional codes for soft-decision Viterbi decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, no. 4, pp. 1305-1313, July 1997.

TABELA III. MENOR VALOR DE n' PARA CADA PAR $TC(M_{sec})$ E $MC(M_{sec})$ DE TRELIÇAS SECCIONADAS DE CÓDIGOS LISTADOS EM [1].

k/n	$TC(M_{sec})$	$MC(M_{sec})$	n'	\mathbf{v}_{sec}	\mathbf{b}_{sec}	\mathbf{l}_{sec}	d_f	N
2/5	14^n	4	4	(2,2,2,2)	(1,0,1,0)	(1,1,1,2)	5	3,2,1,7,8
	20^s	4	2	(2,2)	(1,1)	(2,3)	6	1,4,5,8,17
	24^n	6	3	(2,3,3)	(1,1,0)	(2,1,2)	6	1,2,4,8,12
	28^n	8	4	(3,3,3,3)	(1,0,1,0)	(1,1,1,2)	7	3,4,7,16,24
	40^s	8	2	(3,3)	(1,1)	(2,3)	8	5,0,13,0,45
	80^s	16	2	(4,4)	(1,1)	(2,3)	9	2,5,8,10,20
	96^n	24	3	(4,5,5)	(1,1,0)	(2,1,2)	10	7,0,32,0,66
3/5	128^s	32	4	(5,5,5,5)	(1,0,1,0)	(1,1,2,1)	10	2,8,9,13,26
	$13,33^s$	4	3	(2,2,2)	(1,1,1)	(1,2,2)	4	3,12,24,56,161
	24^s	8	4	(3,3,3,3)	(1,1,1,0)	(1,2,1,1)	4	1,7,19,48,128
	$26,67^s$	8	3	(3,3,3)	(1,1,1)	(1,2,2)	4	1,5,13,39,111
	$42,67^m$	16	5	(4,4,4,4,4)	(1,1,0,1,0)	(1,1,1,1,1)	5	1,16,29,78,217
	$53,33^s$	16	3	(4,4,4)	(1,1,1)	(1,2,2)	6	15,0,131,0,1216
	$74,67^m$	26,67	5	(4,5,5,5,5)	(1,1,0,1,0)	(1,1,1,1,1)	6	4,18,48,114,374
	$106,67^s$	32	3	(5,5,5)	(1,1,1)	(1,2,2)	7	21,48,87,328,1037
128^n	42,67	4	(5,5,6,6)	(1,1,1,0)	(2,1,1,1)	7	11,42,82,238,793	

^s Redução de n' e do número máximo de estados em relação ao perfil da treliça mínima listado em [1] sem alteração de complexidade e espectro.

^m Perfil da treliça mínima listado em [1]. O seccionamento não produziu uma treliça com mesma complexidade e espectro da treliça mínima em [1].

ⁿ Redução de n' em relação ao perfil da treliça mínima listado em [1] sem alteração da complexidade e espectro.