

# Modelo Complexo $\alpha$ - $\mu$ Bivariável com Desbalanceamento de Potência

Alessandro Paulo de Oliveira, Thiago Alencar Moreira de Bairros e Michel Daoud Yacoub

**Resumo**— Um modelo geral de desvanecimento para o processo  $\alpha$ - $\mu$  complexo é proposto. Neste modelo, um parâmetro de desbalanceamento é introduzido que leva em conta as potências das componentes em fase e em quadratura, ou, equivalentemente, o número de *clusters* de multipercorso entre as referidas componentes. Uma expressão exata, fechada e geral para a função densidade de probabilidade conjunta envolvendo as duas envoltórias e as duas fases correspondentes é obtida. O modelo proposto pode ser usado para o estudo de sistemas de comunicações em que correlações de envoltórias e fases possam afetar o seu desempenho.

**Palavras-Chave**— Distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , distribuição conjunta de fase-envoltória bivariável, desbalanceamento de potência.

**Abstract**— A general fading model for the complex  $\alpha$ - $\mu$  process is proposed. In this model, an unbalance parameter is introduced that takes into account the power of the in-phase and quadrature components, or, equivalently, the number of multipath clusters between the said components. An exact, closed-form and general expression for the joint probability density function involving the two envelopes and the two corresponding phases is obtained. The proposed model can be used for the study of communication systems in which correlations of envelopes and phases can affect its performance.

**Keywords**—  $\alpha - \mu$  distribution, bivariate phase-envelope joint distribution, power imbalance.

## I. INTRODUÇÃO

Em um ambiente de desvanecimento, o ganho e a fase que caracterizam o canal de comunicação são tratados de forma estocástica em decorrência dos diversos fenômenos aleatórios afetando o meio de propagação. Processos como Rayleigh [1], Hoyt [2], e Rice [3] têm sido largamente utilizados neste cenário para o estudo de desempenho de sistemas de comunicações. Mais recentemente, Nakagami- $m$  [4] tem-se tornado popular pela flexibilidade oferecida e pela facilidade de tratamento matemático. Em particular, este modelo de desvanecimento propicia uma razoável aproximação àqueles de Hoyt e Rice com uma menor complexidade algébrica. Além disso, medidas de campo mostram uma boa aderência deste modelo a dados práticos. Diferentemente de Rayleigh, Hoyt e Rice, cujas modelagens contemplam ganho e fase desde a sua concepção, a distribuição Nakagami- $m$  é baseada apenas na envoltória com formulação obtida prioritariamente de maneira empírica. Assim, um universo de possibilidades para modelos

de fase pode ser explorado. Em [5], partindo de uma proposta de modelo físico para a envoltória Nakagami- $m$ , estatísticas de ordem superior tais como taxa de cruzamento de nível, tempo médio de desvanecimento e derivada da envoltória foram obtidos. Outros modelos mais gerais foram propostos com foco inicialmente em suas envoltórias e estatísticas de primeira ordem. Citam-se aqui  $\alpha$ - $\mu$  [6],  $\kappa$ - $\mu$  [7] e  $\eta$ - $\mu$  [7]. O estudo destes modelos foi então aprofundado com a obtenção de estatísticas de ordem superior [8], [9]. Trabalhos relacionados à caracterização do ganho do canal surgiram com o foco em correlação, tempo de coerência, distância de coerência e banda de coerência [10], [11]. Por um longo tempo, as estatísticas relacionadas à fase para o modelo Nakagami- $m$  foram consideradas como uniformemente distribuídas, pois nenhuma informação pode ser extraída de seu modelo original de envoltória. Um modelo com fase não-uniforme foi proposto em [12] e, posteriormente, expandido para contemplar o desbalanceamento de potência entre as componentes em fase e em quadratura [13]. Modelos de fase para  $\eta$ - $\mu$  [14] e  $\kappa$ - $\mu$  [15] apareceram em seguida e foram validados em situações práticas [16], [17]. Os modelos de fase [12] e [13] passaram a ser utilizados para avaliações de desempenho de sistemas de comunicações como, por exemplo, aqueles fazendo uso de OFDM [18], configurações MIMO [19], e outros [17], [20]-[28]. Em [29], o desempenho da diferença de fase sobre a modulação BPSK foi investigado. Análises envolvendo a diferença de fase e considerando sinais correlacionados são apresentadas em [30]-[33]. Em [31] determinou-se a distribuição da diferença de fase aplicada a canais com desvanecimento do tipo Rice-lognormal e Nakagami-lognormal e em [32] para Nakagami- $m$ , onde foram obtidas expressões para a taxa de erro de símbolo (SER-*Symbol Error Rate*) em modulação DPSK. Em [33] a função densidade de probabilidade (FDP) da diferença de fase foi obtida e utilizada para desenvolver expressões para a SER sobre canais de desvanecimento Nakagami- $m$ . Em [34] foi proposto um modelo complexo bivariável para canais de desvanecimento Nakagami- $m$  correlacionados, onde além da FDP conjunta de fase e envoltória dos sinais desvanecidos, também foram desenvolvidas FDPs contemplando as componentes em fase e em quadratura. O objetivo do presente trabalho é estender o modelo apresentado em [34] para desenvolver uma nova FDP conjunta fase-envoltória para dois sinais  $\alpha$ - $\mu$  correlacionados, em que o desbalanceamento de potência entre fase e quadratura é levado em consideração. Pelo que consta aos autores, esta é uma proposta inédita que abre uma janela de oportunidades para novas investigações relacionadas ao modelo  $\alpha$ - $\mu$ . A Seção II descreve alguns conceitos preliminares envolvendo o modelo

Alessandro P. de Oliveira e Michel D. Yacoub estão no Laboratório de Tecnologia Sem Fio (Wisstek), Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, Thiago A. M. de Bairros está no Departamento de Elétrica do Instituto Federal de Santa Catarina, Joinville-SC, Brasil, E-mails: [ale,michel]@decom.fee.unicamp.br e thiagotek.alenc@gmail.com. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

complexo  $\alpha-\mu$  [6]. A Seção III propõe um modelo a partir do qual se chega à FDP conjunta desejada. A Seção IV apresenta uma nova identidade matemática. A Seção V mostra alguns plots da FDP de fase conjunta para valores diferentes dos parâmetros de desvanecimento e de fase. A Seção VI conclui o artigo.

## II. PRELIMINARES

O processo  $\alpha-\mu$  [6] modela o desvanecimento de curto prazo, em que tanto o agrupamento de *clusters* de multipercursos quanto a não linearidade do meio são contemplados. Em particular, o parâmetro  $\mu$  representa o número de *clusters* de multipercursos ( $\mu > 0$ ) enquanto que o parâmetro  $\alpha$  modela a não-linearidade do canal. Outras importantes distribuições, como Weibull e Nakagami- $m$ , podem ser obtidas através da configuração adequada dos parâmetros  $\alpha$  e  $\mu$ . A envoltória  $R$  do modelo  $\alpha-\mu$  é dada por  $R^\alpha = X^2 + Y^2 = \sum_{i=1}^{\mu} X_{Gi}^2 + \sum_{i=1}^{\mu} Y_{Gi}^2$ , em que  $X$  e  $Y$  são as componentes em fase e em quadratura do modelo  $\alpha-\mu$ ,  $X_{Gi}$  e  $Y_{Gi}$ , são variáveis aleatórias (VAs) Gaussianas de média nula e variância  $\frac{\hat{r}^\alpha}{2\mu} = \frac{E[R^\alpha]}{2\mu}$ , onde  $E[\cdot]$  corresponde ao operador Esperança. A VA complexa  $\alpha-\mu$   $N_\alpha$ , a envoltória  $R$  e a fase  $\Theta$  são dadas por  $N_\alpha = X + jY$ ,  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$  e  $\Theta = \arg(N_\alpha)$ . Para o caso em que  $\alpha=2$ ,  $R$  e  $\Theta$  reduzem-se ao modelo Nakagami- $m$ . Do modelo físico para o processo  $\alpha-\mu$  [6], as seguintes relações são obtidas:  $R_N = R^{\frac{\alpha}{2}}$  e  $\Omega = \hat{r}^\alpha$ , correspondendo, respectivamente, à envoltória e à sua média quadrática ( $E[R_N^2]$ ) para o modelo Nakagami- $m$ .

De [12], sabe-se que as FDPs das componentes em fase e em quadratura, para o modelo Nakagami- $m$ , para  $Z=X$  e  $Z=Y$  são obtidas como

$$f_Z(z) = \left(\frac{m}{\Omega}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{|z|^{m-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \exp\left(-\frac{mz^2}{\Omega}\right), -\infty < z < \infty. \quad (1)$$

Substituindo-se  $\Omega = \hat{r}^\alpha$  e  $m = \mu$  em (1), as FDPs das componentes em fase e em quadratura para o modelo  $\alpha-\mu$ , para  $Z=X$  e  $Z=Y$  são obtidas como

$$f_Z(z) = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{|z|^{\mu-1}}{\Gamma(\frac{\mu}{2})} \exp\left(-\frac{\mu z^2}{\hat{r}^\alpha}\right), -\infty < z < \infty. \quad (2)$$

Como  $X$  e  $Y$  são VA's independentes, a FDP conjunta é obtida através do produto das respectivas FDPs  $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ , obtendo-se

$$f_{X,Y}(x,y) = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\mu} \frac{|xy|^{\mu-1}}{\Gamma(\frac{\mu}{2})^2} \exp\left(-\frac{\mu(x^2 + y^2)}{\hat{r}^\alpha}\right), -\infty < x, y < \infty. \quad (3)$$

A FDP conjunta de fase e de envoltória é determinada através da transformação de variáveis  $X = R^{\frac{\alpha}{2}} \cos \Theta$ ,  $Y = R^{\frac{\alpha}{2}} \sin \Theta$  e  $f_{R,\Theta}(r,\theta) = |J| f_{X,Y}(x,y)$ . Assim

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\mu} \frac{\alpha r^{\alpha\mu-1} |\sin \theta \cos \theta|^{\mu-1}}{\Gamma(\frac{\mu}{2})^2} \exp\left(-\mu \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\alpha\right), 0 \leq r < \infty, -\pi \leq \theta < \pi. \quad (4)$$

As FDPs marginais são calculadas através das relações seguintes:  $f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta) d\theta$  e  $f_\Theta(\theta) = \int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta) dr$ . Sendo assim:

$$f_R(r) = \left(\frac{\mu}{\hat{r}^\alpha}\right)^{\mu} \frac{\alpha r^{\alpha\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \exp\left(-\mu \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\alpha\right), 0 \leq r < \infty. \quad (5)$$

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\Gamma(\mu) |\sin(2\theta)|^{\mu-1}}{2^\mu \Gamma(\frac{\mu}{2})^2}, -\pi \leq \theta < \pi. \quad (6)$$

De acordo com [34], para o caso de sinais correlacionados, a FDP conjunta das componentes em fase,  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  para  $Z=X$ , e em quadratura,  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$  para  $Z=Y$ , para o modelo Nakagami- $m$  é obtida através da relação

$$f_{z_1, z_2}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 z_2|^{\frac{m}{2}} m^{\frac{m}{2}+1} \rho_r^{\frac{1}{2}(1-\frac{m}{2})} (\Omega_1 \Omega_2)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{m}{2})}}{(1-\rho_r) \Gamma(\frac{m}{2})} \times \exp\left(\frac{-m((z_2^2)\Omega_1 + (z_1^2)\Omega_2) + 2m\sqrt{\rho_r}\sqrt{\Omega_1\Omega_2}(z_1 z_2)}{(1-\rho_r)\Omega_1\Omega_2}\right) \times I_{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{2m|z_1 z_2|\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1\Omega_2}(1-\rho_r)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2m|z_1 z_2|\sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1\Omega_2}(1-\rho_r)}\right), -\infty < z_1, z_2 < \infty. \quad (7)$$

em que  $\rho_r$  corresponde ao coeficiente de correlação de envoltória.

Para que (7) seja compatível com o modelo  $\alpha-\mu$ , substituem-se os parâmetros  $m = \mu_z$ ,  $\rho_r = \lambda^2$ ,  $\Omega_1 = \hat{r}_1^{\alpha_1}$  e  $\Omega_2 = \hat{r}_2^{\alpha_2}$ . Sabe-se que  $\rho_r = \lambda^2$ , em que  $\lambda$  é o coeficiente de correlação entre sinais Gaussianos ( $-1 < \lambda < 1$ ). Assim, tem-se

$$f_{z_1, z_2}(z_1, z_2) = \frac{|z_1 z_2|^{\frac{\mu_z}{2}} \mu_z^{\frac{\mu_z}{2}+1} \lambda^{(1-\frac{\mu_z}{2})} (\hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2}(1+\frac{\mu_z}{2})}}{(1-\lambda^2) \Gamma(\frac{\mu_z}{2})} \times \exp\left(\frac{-\mu_z((z_2^2)\hat{r}_1^{\alpha_1} + (z_1^2)\hat{r}_2^{\alpha_2}) + 2\mu_z \lambda \hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(z_1 z_2)}{(1-\lambda^2)\hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \times I_{\frac{\mu_z}{2}-1}\left(\frac{2\mu_z|z_1 z_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu_z|z_1 z_2|\lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}}(1-\lambda^2)}\right), -\infty < z_1, z_2 < \infty. \quad (8)$$

A Equação (8) é utilizada como base para as deduções apresentadas na Seção III.

## III. MODELO PROPOSTO

Do modelo proposto em [13], sabe-se que para a envoltória  $R_N$  seja uma FDP Nakagami- $m$  é necessário que a soma do número total de *clusters* de multipercursos  $m$  das componentes em fase ( $m_X$ ) e das componentes em quadratura ( $m_Y$ ) seja dado por  $m_X + m_Y = 2m$ . Também sabe-se que a variância das componentes em fase e em quadratura são dadas respectivamente por  $\frac{\Omega_X}{2m_X}$  e  $\frac{\Omega_Y}{2m_Y}$  e com isto leva-se as seguintes relações:  $m_Y \Omega_X = m_X \Omega_Y$  e  $\Omega_X + \Omega_Y = 2\Omega$  as quais podem ser vistas em [13]. Substituindo  $m_X = \mu_X$ ,  $m_Y = \mu_Y$ ,  $\Omega_X = \hat{r}_X^\alpha$ ,  $\Omega_Y = \hat{r}_Y^\alpha$  as seguintes relações para o modelo  $\alpha-\mu$  são obtidas:

$$\mu_X + \mu_Y = 2\mu, \quad (9)$$

$$\mu_Y \hat{r}_X^\alpha = \mu_X \hat{r}_Y^\alpha, \quad (10)$$

$$\hat{r}_X^\alpha + \hat{r}_Y^\alpha = 2\hat{r}^\alpha. \quad (11)$$

A partir destas novas definições as componentes em fase e em quadratura possuem variâncias  $\hat{r}_X^\alpha/2\mu_X$  e  $\hat{r}_Y^\alpha/2\mu_Y$ .

Como visto em [13], o próximo passo consiste na inclusão de  $p$ , o denominado de parâmetro de fase  $-1 \leq p \leq 1$ . Para  $p=0$  têm-se fase e quadratura balanceadas ( $\mu_X = \mu_Y$ ). Com  $p > 0$ , a componente em fase domina ( $\mu_X > \mu_Y$ ) e  $p < 0$  a componente em quadratura domina ( $\mu_X < \mu_Y$ ). Substituindo-se em [13, eq. 4]  $m_X = \mu_X$ ,  $m_Y = \mu_Y$ , obtém o parâmetro de fase para o modelo  $\alpha-\mu$ :

$$p = \frac{\mu_X - \mu_Y}{\mu_X + \mu_Y}. \quad (12)$$

Ao substituir-se (10) em (12), uma relação em função dos parâmetros  $\hat{r}_X^\alpha$  e  $\hat{r}_Y^\alpha$  é obtida, tal que

$$p = \frac{\hat{r}_X^\alpha - \hat{r}_Y^\alpha}{\hat{r}_X^\alpha + \hat{r}_Y^\alpha}. \quad (13)$$

De (9)-(12) ou (13), obtêm-se

$$\mu_X = (1+p)\mu, \quad (14)$$

$$\mu_Y = (1-p)\mu, \quad (15)$$

$$\hat{r}_X^\alpha = (1+p)\hat{r}^\alpha, \quad (16)$$

$$\hat{r}_Y^\alpha = (1-p)\hat{r}^\alpha. \quad (17)$$

Sejam as duas variáveis complexas  $N_{1\alpha} = X_1 + jY_1$  e  $N_{2\alpha} = X_2 + jY_2$ . Considerando um número idêntico de *clusters* para as componentes em fase e também para as componentes em quadratura e ainda o mesmo parâmetro de desbalanceamento para ambos os sinais complexos, as seguintes relações podem ser escritas:  $\mu_{X_1} = \mu_{X_2}$ ,  $\mu_{Y_1} = \mu_{Y_2} \rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $\hat{r}_{X_1}^{\alpha_1} = \hat{r}_{X_2}^{\alpha_2}$ ,  $\hat{r}_{Y_1}^{\alpha_1} = \hat{r}_{Y_2}^{\alpha_2} \rightarrow \hat{r}_1^{\alpha_1} = \hat{r}_2^{\alpha_2} = \hat{r}^\alpha$  e  $p_1 = p_2 = p$ .

Substituindo (14)-(17) em (8), obtêm-se as FDP  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , para  $W = X$  e  $\circ = +$ , e  $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ , para  $W = Y$  e  $\circ = -$ , tal que

$$\begin{aligned} f_{w_1, w_2}(w_1, w_2) &= \frac{|w_1 w_2|^{\frac{(1+p)\mu}{2}} ((1 \circ p)\mu)^{\frac{(1+p)\mu}{2} + 1} \lambda^{(1 - \frac{(1+p)\mu}{2})}}{(1 - \lambda^2) \Gamma\left(\frac{(1+p)\mu}{2}\right)} \\ &\times ((1 \circ p)^2 \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{(1+p)\mu}{2}\right)} \\ &\times \exp\left(\frac{-\mu(w_2^2 \hat{r}_1^{\alpha_1} + w_1^2 \hat{r}_2^{\alpha_2}) + 2\mu \lambda \hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (w_1 w_2)}{(1 - \lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\ &\times I_{\frac{(1+p)\mu}{2} - 1}\left(\frac{2\mu |w_1 w_2| \lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1 - \lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu |w_1 w_2| \lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1 - \lambda^2)}\right), \\ &\quad -\infty < w_1, w_2 < \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Como  $X_1, Y_1$  e  $X_2, Y_2$  são VAs independentes, então  $f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \times f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ , isto é

$$\begin{aligned} f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \frac{|x_1 x_2|^{\frac{(1+p)\mu}{2}} |y_1 y_2|^{\frac{(1-p)\mu}{2}} \lambda^{2-\mu}}{(1 - \lambda^2) 2\Gamma\left(\frac{(1+p)\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(1-p)\mu}{2}\right)} \\ &\times ((1+p)\mu)^{\frac{(1+p)\mu}{2} + 1} ((1-p)\mu)^{\frac{(1-p)\mu}{2} + 1} \\ &\times ((1+p)^2 \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{(1+p)\mu}{2}\right)} ((1-p)^2 \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2})^{-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{(1-p)\mu}{2}\right)} \\ &\times \exp\left(\frac{-\mu((x_2^2 + y_2^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} + (x_1^2 + y_1^2) \hat{r}_2^{\alpha_2})}{(1 - \lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\ &\times \exp\left(\frac{2\mu \lambda \hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(1 - \lambda^2) \hat{r}_1^{\alpha_1} \hat{r}_2^{\alpha_2}}\right) \\ &\times I_{\frac{(1+p)\mu}{2} - 1}\left(\frac{2\mu |x_1 x_2| \lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1 - \lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu |x_1 x_2| \lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1 - \lambda^2)}\right) \\ &\times I_{\frac{(1-p)\mu}{2} - 1}\left(\frac{2\mu |y_1 y_2| \lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1 - \lambda^2)}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu |y_1 y_2| \lambda}{\hat{r}_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \hat{r}_2^{\frac{\alpha_2}{2}} (1 - \lambda^2)}\right), \\ &\quad -\infty < x_1, y_1, x_2, y_2 < \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Sabendo-se que  $X_1 = R_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \cos \Theta_1$ ,  $Y_1 = R_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \sin \Theta_1$ ,  $X_2 = R_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \cos \Theta_2$  e  $Y_2 = R_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \sin \Theta_2$ , então  $f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) |J|$  onde  $|J| = \frac{\alpha_1 \alpha_2 R_1^{\alpha_1 - 1} R_2^{\alpha_2 - 1}}{4}$ .

Novamente, utilizando o processo de transformação de variáveis sobre  $f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)$  com o objetivo de normalizar a FDP em relação a  $\hat{r}_1$  e  $\hat{r}_2$ ,  $f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) = f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) |J|$ , onde  $P_1 = \frac{R_1}{\hat{r}_1}$ ,  $P_2 = \frac{R_2}{\hat{r}_2}$  e  $|J| = \hat{r}_1 \hat{r}_2$ , obtêm-se

$$\begin{aligned} f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \lambda^{2-\mu} \rho_1^{-1 + \alpha_1(1 + \frac{\mu}{2})} \rho_2^{-1 + \alpha_2(1 + \frac{\mu}{2})}}{4(1 - \lambda^2) 2\Gamma\left(\frac{(1+p)\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{(1-p)\mu}{2}\right)} \\ &\times ((1+p)\mu)^{\frac{(1+p)\mu}{2} + 1} ((1-p)\mu)^{\frac{(1-p)\mu}{2} + 1} (1+p)^{-\frac{(1+p)\mu}{2} - 1} \\ &\times (1-p)^{-\frac{(1-p)\mu}{2} - 1} |\sin \theta_1 \sin \theta_2|^{(1-p)\frac{\mu}{2}} |\cos \theta_1 \cos \theta_2|^{(1+p)\frac{\mu}{2}} \\ &\times \exp\left(\frac{-\mu(\rho_1^{\alpha_1} + \rho_2^{\alpha_2} - 2\rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \lambda \cos(\theta_1 - \theta_2))}{(1 - \lambda^2)}\right) \\ &\times I_{\frac{(1+p)\mu}{2} - 1}\left(\frac{2\mu \rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \lambda |\cos \theta_1 \cos \theta_2|}{(1 - \lambda^2)}\right) \\ &\times \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu \rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \lambda |\cos \theta_1 \cos \theta_2|}{(1 - \lambda^2)}\right) \\ &\times I_{\frac{(1-p)\mu}{2} - 1}\left(\frac{2\mu \rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \lambda |\sin \theta_1 \sin \theta_2|}{(1 - \lambda^2)}\right) \\ &\times \operatorname{sech}\left(\frac{2\mu \rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \lambda |\sin \theta_1 \sin \theta_2|}{(1 - \lambda^2)}\right), \\ &\quad 0 \leq \rho_1, \rho_2 < \infty, -\pi \leq \theta_1, \theta_2 < \pi. \end{aligned} \quad (20)$$

A FDP conjunta de fase é obtida através dos procedimentos estatísticos padrões, i.e.  $f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) d\rho_1 d\rho_2$ .

Infelizmente, não é possível chegar-se a uma formulação fechada como resultado dessa integração. Assim, métodos numéricos são necessários.

#### IV. UMA NOVA IDENTIDADE MATEMÁTICA

Como mencionado na Seção anterior, a FDP conjunta de fase, só pode ser obtida por métodos numéricos. Por outro lado, a FDP conjunta das envoltórias é amplamente conhecida.

De acordo com [6], a FDP conjunta de envoltória normalizada do modelo  $\alpha$ - $\mu$  é dada por

$$\begin{aligned} f_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu^{\mu+1} \rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}(1+\mu)-1} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}(1+\mu)-1}}{\Gamma(\mu)(1 - \lambda^2) \lambda^{\mu-1}} \\ &\times \exp\left(-\frac{\mu(\rho_1^{\alpha_1} + \rho_2^{\alpha_2})}{(1 - \lambda^2)}\right) I_{\mu-1}\left(\frac{2\mu \rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \lambda}{(1 - \lambda^2)}\right), \\ &\quad 0 \leq \rho_1, \rho_2 < \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Sabe-se que

$$f_{P_1, P_2}(\rho_1, \rho_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{P_1, \Theta_1, P_2, \Theta_2}(\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \quad (22)$$

Substituindo-se (20), (21) em (22) e  $w = \frac{2\mu \rho_1^{\frac{\alpha_1}{2}} \rho_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \lambda}{(1 - \lambda^2)}$ , tem-se

a identidade matemática

$$\begin{aligned}
 I_{\mu-1}(w) &= \frac{\Gamma(\mu)((1+p)\mu)^{\frac{(1+p)\mu}{2}+1}((1-p)\mu)^{\frac{(1-p)\mu}{2}+1}(1+p)^{\frac{-(1+p)\mu}{2}-1}}{8\mu^{\mu+2}\Gamma\left(\frac{(1+p)\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{(1-p)\mu}{2}\right)} \\
 &\times (1-p)^{\frac{-(1-p)\mu}{2}-1}w \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(w \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\
 &\times |\cos \theta_1 \cos \theta_2|^{\frac{(1+p)\mu}{2}} |\sin \theta_1 \sin \theta_2|^{\frac{(1-p)\mu}{2}} \\
 &\times I_{\frac{(1+p)\mu}{2}-1}(w|\cos \theta_1 \cos \theta_2|) \operatorname{sech}(w|\cos \theta_1 \cos \theta_2|) \\
 &\times I_{\frac{(1-p)\mu}{2}-1}(w|\sin \theta_1 \sin \theta_2|) \operatorname{sech}(w|\sin \theta_1 \sin \theta_2|) d\theta_1 d\theta_2. \quad (23)
 \end{aligned}$$

A identidade foi comprovada por métodos numéricos para a extensão de seus parâmetros.

## V. RESULTADOS

As Figuras 1–6 mostram o comportamento da FDP conjunta da fase para diferentes valores de  $p$  e de  $\lambda$ . Vale lembrar que o parâmetro  $\alpha$  não tem influência na fase [6]. (Nos comentários que se seguem, por conveniência, chamaremos de elevações as concentrações de massa de probabilidade.) Nas Figuras 1 e 2, nota-se que quando  $p \rightarrow 1$  as elevações tendem a se distribuir no plano  $(\theta_1, \theta_2)$  da seguinte maneira: um grupo de quatro elevações em torno de  $(0, 0)$ , quatro grupos de duas elevações em torno de  $(0, \pm\pi)$  e  $(\pm\pi, 0)$  e quatro elevações em torno de  $(\pm\pi, \pm\pi)$ . Esse comportamento demonstra a influência predominante da componente em fase. À medida em que o valor de  $p$  aumenta ( $p \rightarrow 1$ ) a potência do sinal vai se concentrando na componente em fase (a potência na componente em quadratura tende a zero com o aumento de  $p$ ). Observando-se as Figuras 2 e 6, percebe-se que quando o fator de correlação aumenta ( $\lambda \rightarrow 1$ ) as elevações que permanecem são somente aquelas em que o par de ângulos de localização,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , são iguais em módulo entre si ( $|\theta_1| = |\theta_2|$ ). Com relação às Figuras 1 e 3, nota-se que quando  $p \rightarrow -1$  as elevações tendem a se distribuir no plano  $(\theta_1, \theta_2)$  de maneira que se têm quatro grupos de quatro elevações cada um em que localizam-se em torno de  $(\pm\pi/2, \pm\pi/2)$ . Nessa condição há uma influência predominante da componente em quadratura e a potência do sinal tende a se concentrar nela (a potência da componente em fase tende a zero com a diminuição de  $p$ ). Das Figuras 3 e 5 conclui-se que quando o fator de correlação aumenta ( $\lambda \rightarrow 1$ ) as elevações que mantêm-se são somente aquelas em que o par de ângulos de localização,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , são iguais em módulo ( $|\theta_1| = |\theta_2|$ ) e sinal. Fato semelhante acontece ao observar-se as Figuras 1 e 4, pois quando o fator de correlação aumenta ( $\lambda \rightarrow 1$ ) os ângulos em que localizam-se os picos de FDP, das elevações que permanecem, são iguais em módulo ( $|\theta_1| = |\theta_2|$ ) e sinal. As outras elevações tendem a desaparecer.

## VI. CONCLUSÕES

Este artigo propôs um modelo complexo  $\alpha$ - $\mu$  de dois processos correlacionados. O parâmetro de fase introduzido no modelo em conjunto com a introdução do parâmetro  $\alpha$  permite um modelagem mais ampla e próxima da realidade. Ressalte-se que os resultados aqui apresentados são preliminares mas fundamentais para o avanço do entendimento do processo complexo  $\alpha$ - $\mu$ . Como em [13], este artigo também abre um

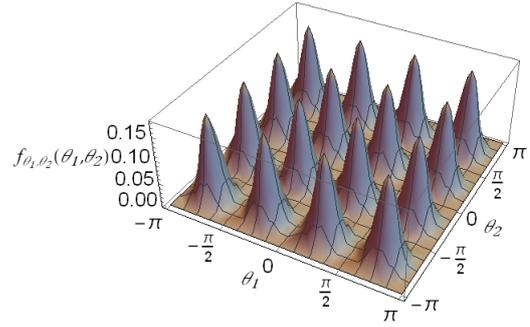


Fig. 1. FDP conjunta de fase para  $p = 0$ ,  $\mu = 5$  e  $\lambda = 0$ .

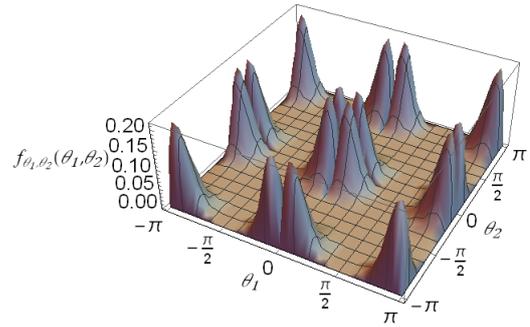


Fig. 2. FDP conjunta de fase para  $p = 0.7$ ,  $\mu = 5$  e  $\lambda = 0$ .

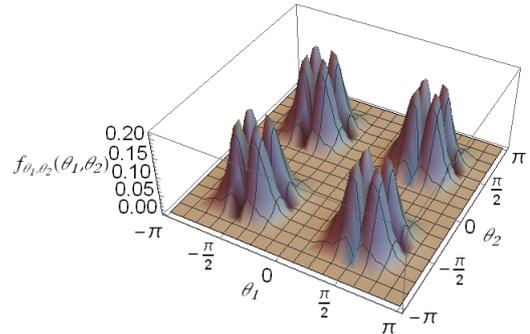
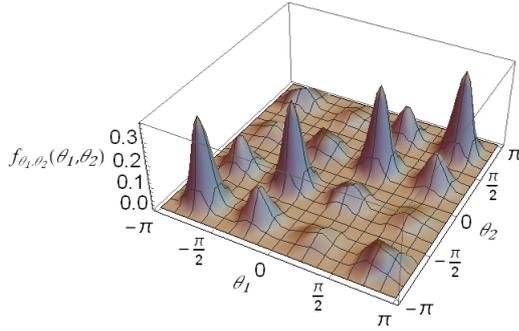
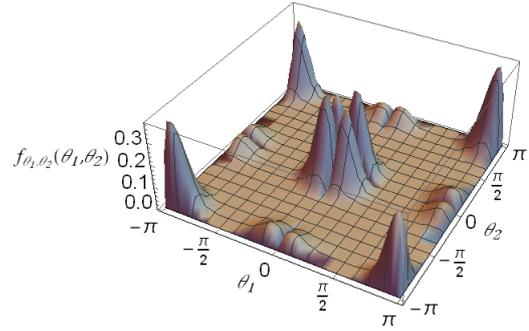
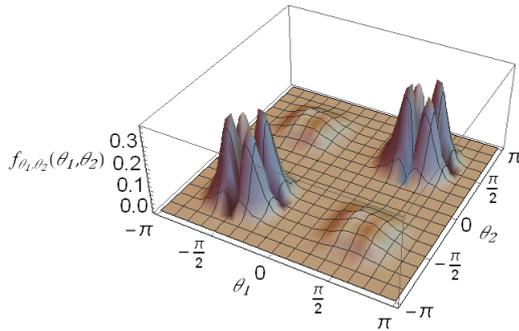


Fig. 3. FDP conjunta de fase para  $p = -0.7$ ,  $\mu = 5$  e  $\lambda = 0$ .

novo campo de pesquisa para o estudo de desempenho de sistemas de comunicações sem fio em que o comportamento das envoltórias e fases devem ser levados em consideração. Observe-se que o trabalho proposto em [13] constitui um caso particular do modelo aqui apresentado. Questões como a influência da fase com relação ao desempenho de sistemas de modulação, banda de coerência, tempo de coerência, e distância de coerência deverão ser respondidas em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. Rayleigh, "On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase," *Philos. Mag.*, no. 60, pp. 73–78, Aug. 1880.
- [2] R. S. Hoyt, "Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate," *Bell System Technical Journal*, vol. 26, no. 2, pp. 318–359, Apr. 1947.
- [3] S. O. Rice, "Mathematical analysis of random noise," in *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, N. Max, Ed. New York: Dover, 1954, pp. 184–246.


 Fig. 4. FDP conjunta de fase para  $p = 0$ ,  $\mu = 5$  e  $\lambda = 0.1$ .

 Fig. 6. FDP conjunta de fase para  $p = 0.7$ ,  $\mu = 5$  e  $\lambda = 0.1$ .

 Fig. 5. FDP conjunta de fase para  $p = -0.7$ ,  $\mu = 5$ , e  $\lambda = 0.1$ .

- [4] M. Nakagami, "The m-distribution, a general formula of intensity of rapid fading," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation: Proceedings of a Symposium held at University of California, Los Angeles, June 18-20, 1958*, W. C. Hoffman, Ed. Pergamon Press, Jun. 1960, pp. 3–36.
- [5] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista, and L. G. R. Guedes, "On higher order statistics of the nakagami-m distribution," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 48, no. 3, pp. 790–794, May 1999.
- [6] M. D. Yacoub, "The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A physical fading model for the stacy distribution," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [7] —, "The  $\kappa$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [8] S. Cotton and W. Scanlon, "Higher-order statistics for  $\kappa$ - $\mu$  distribution," *Electronics Letters*, vol. 43, no. 22, pp. 1215–1217, Oct 2007.
- [9] D. B. Costa, J. C. S. S. Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, "Second-order statistics of  $\eta$ - $\mu$ ," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, no. 3, pp. 819–824, March 2008.
- [10] J. C. S. S. Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, "A simple accurate method for generating autocorrelated nakagami-m envelope sequences," *IEEE Communications Letters*, vol. 11, no. 3, pp. 231–233, Mar. 2007.
- [11] J. R. Mendes, M. D. Yacoub, and U. S. Dias, "Power correlation coefficient of a very general fading model in maximal ratio combining," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 58, no. 9, pp. 2472–2479, September 2010.
- [12] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, and J. C. S. Santos Filho, "Nakagami-m phase-envelope joint distribution," *Electronics Letters*, vol. 41, no. 5, pp. 259–261, Mar. 2005.
- [13] M. D. Yacoub, "Nakagami-m phase-envelope joint distribution: A new model," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [14] D. B. da Costa and M. D. Yacoub, "The  $\eta$  -  $\mu$  joint phase-envelope distribution," *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 6, pp. 195–198, Apr. 2007.
- [15] U. S. Dias and M. D. Yacoub, "The  $\kappa$ -  $\mu$  phase-envelope joint distribution," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 58, no. 1, pp. 40–45, Jan. 2010.
- [16] C. L. Selvati and U. S. Dias, "On the fading parameters characterization of the  $\kappa$ - $\mu$  distribution: Measurements and statistics," in *Communications (LATINCOM), 2011 IEEE Latin-American Conference on*, Oct 2011, pp. 1–5.
- [17] I. B. G. Porto, M. D. Yacoub, J. Santos Filho, S. L. Cotton, and W. G. Scanlon, "Nakagami-m phase model: Further results and validation," *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 2, no. 5, pp. 523–526, Oct. 2013.
- [18] K. A. Hamdi, "Analysis of ofdm over nakagami-m fading with nonuniform phase distributions," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 11, no. 2, pp. 488–492, February 2012.
- [19] T. R. C. Zhong, S. Jin and K. k. Wong, "On the capacity of non-uniform phase mimo nakagami-m fading channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 14, no. 6, pp. 536–538, Jun. 2010.
- [20] Y. Ma and D. Zhang, "A method for simulating complex nakagami fading time series with nonuniform phase and prescribed autocorrelation characteristics," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 59, no. 1, pp. 29–35, Jan. 2010.
- [21] G. T. F. de Abreu, "On the moment-determinance and random mixture of nakagami-m variates," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 58, no. 9, pp. 2561–2575, September 2010.
- [22] J. C. S. S. Filho, B. V. Teixeira, M. D. Yacoub, and G. T. F. Abreu, "The  $rm^2$  nakagami fading channel simulator," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 12, no. 5, pp. 2323–2333, May. 2013.
- [23] L. Shi, Z. Guo, Y. Liu, and X. Li, "A novel simulation method for nakagami-m fading channel," in *General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS), 2014 XXXIth URSI*, Aug. 2014, pp. 1–4.
- [24] J. Marcum, "A statistical theory of target detection by pulsed radar," *IRE Transactions on Information Theory*, vol. 6, no. 2, pp. 59–267, Apr. 1960.
- [25] J. H. Roberts, *Angle modulation : The Theory of System Assessment*. Stevenage, UK: Peregrinus, 1977.
- [26] R. F. Pawula, "On the theory of error rates for narrow-band digital fm," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 29, no. 11, pp. 1634–1643, Nov. 1981.
- [27] M. K. Simon, S. M. Hinedi, and W. C. Lindsey, *Digital Communication Techniques: signal design and detection*. Englewood Cliffs, NJ: PTR Prentice Hall, 1995.
- [28] J. G. Proakis, *Digital Communications*. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2001.
- [29] C. M. Lo and W. H. Lam, "Error probability of binary phase shift keying in nakagami-m fading channel with phase noise," *Electronics Letters*, vol. 36, no. 21, pp. 1773–1774, Oct. 2000.
- [30] J. H. Roberts, "Phase-difference distribution for a narrow-band non-gaussian noise and related statistics," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34, no. 6, pp. 1483–1490, Nov. 1988.
- [31] C. C. Chai, "Distribution of phase difference between two rice- or nakagami-lognormal processes perturbed by gaussian noise," in *Gateway to 21st Century Communications Village. VTC 1999-Fall. IEEE VTS 50th Vehicular Technology Conference (Cat. No.99CH36324)*, vol. 1, 1999, pp. 82–86 vol.1.
- [32] C. Fedele, L. Izzo, and M. Tanda, "Distribution of phase difference between two nakagami faded signals perturbed by gaussian noise," *Electronics Letters*, vol. 31, no. 7, pp. 526–527, Mar. 1995.
- [33] C. Polprasert and J. A. Ritcey, "A nakagami fading phase difference distribution and its impact on ber performance," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, no. 7, pp. 2805–2813, Jul. 2008.
- [34] T. A. M. Bairos and M. D. Yacoub, "Distribuição conjunta fase-envoltória nakagami-m bivariável," in *Anais do XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT2015)*, Set. 2015.