

# Aproximações Estatísticas para Somas de Variáveis Rayleigh Correlacionadas e Aplicação

Francisco Raimundo Albuquerque Parente e José Cândido Silveira Santos Filho

**Resumo**— Somas de variáveis aleatórias são largamente aplicadas a sistemas de comunicações sem fio, como em esquemas de combinação de diversidade. Entretanto, a formulação exata para as funções estatísticas dessas somas requer um tratamento matemático complicado, quando não inviável, o que tem motivado a busca por soluções aproximadas mais simples. Neste trabalho, são propostas aproximações estatísticas para somas de variáveis Rayleigh correlacionadas com parâmetros de desvanecimento arbitrários. Tendo por base uma técnica recente denominada casamento de assíntotas, as soluções propostas atingem um excelente ajuste sob regime de alta relação sinal-ruído média. A análise é então aplicada ao esquema de combinação por ganho igual, e resultados de simulação ilustram o bom desempenho atingido.

**Palavras-Chave**— Análise assintótica, canais de desvanecimento, combinação de diversidade, somas de variáveis aleatórias.

**Abstract**— Sums of random variables are largely applied to wireless communications systems, such as in diversity-combining schemes. However, the exact formulation for the statistical functions of these sums requires a complicated, if not impractical, mathematical treatment, which has motivated the search for simpler approximate solutions. This work proposes statistical approximations for sums of correlated Rayleigh variables with arbitrary fading parameters. Capitalizing on a recent technique called asymptotic matching, the proposed solutions achieve an excellent fit under regime of high average signal-to-noise ratio. The analysis is then applied to equal-gain combining, and simulation results illustrate the good performance achieved.

**Keywords**— Asymptotic analysis, diversity combining, fading channels, sums of random variables.

## I. INTRODUÇÃO

Somas de variáveis aleatórias (VAs) aparecem em diversos cenários de sistemas de comunicações sem fio, a exemplo de fenômenos de interferência e esquemas de combinação de diversidade. Em casos assim, avaliar o desempenho dos sistemas em termos de métricas como taxa de erro de bit e probabilidade de interrupção requer o conhecimento das estatísticas de tais somas — função densidade de probabilidade (PDF, do inglês *probability density function*) ou, equivalentemente, função de distribuição acumulada (CDF, do inglês *cumulative distribution function*). Todavia, em geral a PDF e a CDF exatas de somas de VAs apresentam formulações de difícil tratamento matemático, na forma de integrações multidimensionais da PDF conjunta das VAs na soma [1], que se tornam inviáveis à medida que o número de VAs aumenta.

Wireless Technology Laboratory, Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, E-mails: {parente, candido}@decom.fee.unicamp.br.

Este trabalho foi financiado parcialmente pela CAPES.

Nesse contexto, convém obter soluções aproximadas mais simples para a PDF e a CDF das referidas somas de VAs em sistemas de comunicação sem fio. Desde as primeiras propostas de aproximação para essas somas [2], pesquisadores têm apresentado soluções particulares para diversos cenários de desvanecimento. Boa parte dessas soluções considera somas de VAs independentes e adota um método tradicional de ajuste, denominado casamento de momentos [3], [4]. Em [5], foi introduzido um método novo e promissor de ajuste, denominado casamento de assíntotas, aplicado então a somas de VAs independentes do tipo Nakagami- $m$ . Mais recentemente, foram propostas aproximações para somas de VAs correlacionadas, o que se mostra particularmente oportuno em aplicações emergentes com concentração massiva de antenas. Em [6], por exemplo, foram propostas aproximações para somas de VAs correlacionadas do tipo Weibull, e em [7] foram obtidas expressões assintóticas para somas de VAs identicamente correlacionadas do tipo lognormal.

Neste trabalho, são propostas aproximações simples para somas de VAs do tipo Rayleigh correlacionadas com parâmetros de desvanecimento arbitrários. Para tanto, emprega-se o método de ajuste via casamento de assíntotas introduzido em [5]. Nesse método, os parâmetros da distribuição aproximada da soma são ajustados de modo a satisfazer a assíntota da distribuição exata em torno da origem. Isso garante um ótimo ajuste na cauda esquerda da distribuição ou, equivalentemente, em regime de alta relação sinal-ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*) média — um regime primordial para a análise de desempenho de sistemas de comunicações.

O restante deste trabalho está organizado da forma seguinte. Na Seção II, formula-se o problema da soma de envoltórias correlacionadas. A Seção III apresenta a solução exata para o problema abordado. Em seguida, apresentam-se as soluções aproximadas propostas, na Seção IV. A aplicação dessas aproximações a um esquema prático de combinação de diversidade, bem como resultados numéricos de simulação, são discutidos na Seção V. Por fim, a Seção VI apresenta as principais conclusões acerca do trabalho.

No texto que segue,  $f_{(\cdot)}(\cdot)$  denota PDF;  $F_{(\cdot)}(\cdot)$ , CDF;  $\mathbb{E}[\cdot]$ , média estatística;  $\mathbb{V}[\cdot]$ , variância;  $(\cdot)^T$ , transposição;  $\det(\cdot)$ , determinante.

## II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja  $R$  a soma de  $M$  envoltórias  $R_i$  arbitrariamente correlacionadas,  $i \in \{1, \dots, M\}$ , ou seja,

$$R = \sum_{i=1}^M R_i. \quad (1)$$

Neste trabalho, consideram-se somas de envoltórias do tipo Rayleigh, de modo que cada PDF marginal é dada por

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{r_i}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{r_i^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad r_i \geq 0, \quad (2)$$

em que  $\sigma_i > 0$  é um parâmetro de escala, com  $\mathbb{E}[R_i^2] = 2\sigma_i^2$ . A fim de se especificar a PDF conjunta (Rayleigh multivariável) de  $R_1, \dots, R_M$ , é apropriado decompor cada VA em termos de suas componentes em fase e em quadratura:

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}, \quad (3)$$

em que  $X_i$  e  $Y_i$  são VAs gaussianas independentes e identicamente distribuídas (iid), de média nula e variância  $\mathbb{V}[X_i] = \mathbb{V}[Y_i] = \sigma_i^2$  [8]. Note que, de forma geral,  $(X_i, X_j)$ ,  $(Y_i, Y_j)$  e  $(X_i, Y_j)$  são pares de VAs correlacionadas,  $i \neq j$ . Convém agrupar as componentes  $X_i$  e  $Y_i$  em formato vetorial,

$$\mathbf{X} \triangleq [X_1 \dots X_M]^T \text{ e } \mathbf{Y} \triangleq [Y_1 \dots Y_M]^T, \quad (4)$$

de modo que suas estatísticas marginais e conjuntas podem ser especificadas pela matriz de covariância de  $\mathbf{X}$ , pela matriz de covariância de  $\mathbf{Y}$  e pela matriz de covariância cruzada entre  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  —  $\mathbf{K}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$ ,  $\mathbf{K}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T]$  e  $\mathbf{K}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{X}\mathbf{Y}^T]$ , respectivamente. Essas três matrizes, por sua vez, podem ser agrupadas em uma única matriz (simétrica e não-singular), definida como

$$\mathbf{K} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} & \mathbf{K}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^T & \mathbf{K}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Dessa forma, a PDF conjunta Rayleigh multivariável pode ser expressa apenas em função da matriz  $\mathbf{K}$  como [8]

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \frac{\prod_{i=1}^M r_i}{(2\pi)^M (\det(\mathbf{K}))^{\frac{1}{2}}} \times \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\phi})\right) d\phi_1 \dots d\phi_M, \quad (6)$$

em que  $\mathbf{R} \triangleq [R_1 \dots R_M]^T$ ,  $\mathbf{r} \triangleq [r_1 \dots r_M]^T \in [0, \infty)^M$ ,  $\boldsymbol{\phi} \triangleq [\phi_1 \dots \phi_M]^T \in [-\pi, \pi)^M$ , e  $g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\phi})$  é definida em [8, Eq. (11b)] em termos de  $\mathbf{K}$ .

O objetivo deste trabalho é propor aproximações simples e precisas para a PDF e a CDF da soma  $R$  no cenário Rayleigh correlacionado em questão. Antes, porém, é oportuno revisar a formulação geral para a solução exata do problema, cuja complexidade inviabiliza, em muitos casos, sua análise e implementação numérica.

### III. SOLUÇÃO EXATA

Em se tratando de somas de VAs positivas, como é o caso de envoltórias, a formulação geral para obter a PDF  $f_R(\cdot)$  e a CDF  $F_R(\cdot)$  exatas de  $R$  se baseia no uso da integral de Brennan [1]. Essa abordagem fornece uma expressão em forma integral em termos da PDF conjunta  $f_{\mathbf{R}}(\cdot)$  de  $\mathbf{R}$ .

Especificamente, por meio de um argumento geométrico, é possível mostrar que  $f_R(\cdot)$  e  $F_R(\cdot)$  são dadas por [1]

$$f_R(r) = \int_0^r \int_0^{r-r_M} \dots \int_0^{r-\sum_{i=3}^M r_i} f_{R_1, \dots, R_M}\left(r - \sum_{i=2}^M r_i, r_2, \dots, r_M\right) dr_2 \dots dr_{M-1} dr_M \quad (7a)$$

$$F_R(r) = \int_0^r \int_0^{r-r_M} \dots \int_0^{r-\sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{r-\sum_{i=2}^M r_i} f_{R_1, \dots, R_M}(r_1, r_2, \dots, r_M) dr_1 \dots dr_{M-1} dr_M. \quad (7b)$$

Note que tanto  $f_R(\cdot)$  quanto  $F_R(\cdot)$  são expressas em termos de uma integração multidimensional da PDF conjunta  $f_{\mathbf{R}}(\cdot) = f_{R_1, \dots, R_M}(\cdot)$ . Assim, apesar de ser uma formulação geral e exata, a integral de Brennan admite solução em forma fechada apenas para casos muito limitados. Além disso, seu uso em rotinas de integração numérica se torna inviável à medida que cresce o número  $M$  de VAs na soma (por exemplo,  $M > 5$ ).

Para contornar essas dificuldades, são propostas a seguir soluções aproximadas para o problema. Além de simples, tais soluções apresentam um excelente desempenho ao garantir que a distribuição aproximada coincida com a exata na região de alta SNR média. Essa é uma região crítica quando se analisam métricas de desempenho fundamentais como taxa de erro de bit e probabilidade de interrupção.

### IV. SOLUÇÕES APROXIMADAS PROPOSTAS

Nesta seção, são propostas aproximações estatísticas para somas de envoltórias Rayleigh correlacionadas. Foram escolhidas as distribuições (i) Nakagami- $m$  e (ii)  $\alpha$ - $\mu$  para aproximar a distribuição exata da soma. A razão de (i) é que existe ao menos um caso em que a VA Nakagami- $m$  representa uma soma exata de VAs Rayleigh — a soma quadrática de VAs Rayleigh iid é uma VA Nakagami- $m$  quadrática —, enquanto que a razão de (ii) é que a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  é um caso generalizado — e de complexidade matemática equivalente à — da distribuição Nakagami- $m$ , da qual se espera, portanto, maior flexibilidade de ajuste sob baixo aumento de custo analítico. A análise que segue é realizada em termos da PDF, da qual a CDF pode ser obtida diretamente.

#### A. Preliminares

Seja a expansão em série de Maclaurin da PDF marginal  $f_{R_i}(\cdot)$  em (2), dada por

$$f_{R_i}(r_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} r_i^{b_{i,n}}, \quad (8)$$

em que  $a_{i,n}$  é função de  $\sigma_i$ , e  $b_{i,n}$  é monotonicamente crescente. A meta aqui é encontrar uma expressão assintótica, em torno da origem, para a PDF da soma  $R$ , cuja expansão em série de Maclaurin pode ser expressa por

$$f_R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{b_n}. \quad (9)$$

Sabe-se que o termo de menor expoente  $a_0 r^{b_0}$  governa o comportamento assintótico da PDF da soma em torno da origem, de forma que

$$f_R(r) \sim a_0 r^{b_0}, \quad (10)$$

em que o símbolo  $\sim$  denota “assintoticamente igual a”. O objetivo, portanto, consiste em encontrar expressões para  $a_0$  e  $b_0$  em função dos dados de entrada do problema, quais sejam o número  $M$  de VAs na soma e a matriz  $\mathbf{K}$  definida em (5).

Em particular, considerando-se o cenário em que a soma  $R$  envolve VAs independentes, a PDF conjunta  $f_R(\cdot)$  pode ser expressa simplesmente como o produto das PDFs marginais [9]. Nesse caso, com uso de (8) e (9), foi mostrado em [5] (a partir de um esboço de prova em [10, Proposição 4]) que  $a_0$  e  $b_0$  são dados por

$$a_0 = \frac{\prod_{i=1}^M a_{i,0} \Gamma(b_{i,0} + 1)}{\Gamma\left(M + \sum_{i=1}^M b_{i,0}\right)} \quad (11a)$$

$$b_0 = (M - 1) + \sum_{i=1}^M b_{i,0}, \quad (11b)$$

em que  $a_{i,0}$  e  $b_{i,0}$  correspondem ao primeiro termo ( $n = 0$ ) da expansão em (8), e  $\Gamma(\cdot)$  denota a função gama.

Para o cenário geral em que a soma  $R$  envolve VAs mutuamente correlacionadas, a análise é feita a partir da PDF conjunta Rayleigh multivariável  $f_R(\cdot)$  em (6). Nesse caso, expandindo-se o integrando de (6) em série de Maclaurin e preservando-se apenas o primeiro termo, a assíntota da PDF conjunta Rayleigh multivariável é obtida como

$$f_R(r) \sim \prod_{i=1}^M \frac{r_i}{(\det(\mathbf{K}))^{\frac{1}{2M}}} = \prod_{i=1}^M \hat{a}_{i,0} r_i^{\hat{b}_{i,0}}, \quad (12)$$

em que  $\hat{a}_{i,0} \triangleq (\det(\mathbf{K}))^{\frac{-1}{2M}}$  e  $\hat{b}_{i,0} \triangleq 1$ . A partir de (12), note que o  $i$ -ésimo termo  $\hat{a}_{i,0} r_i^{\hat{b}_{i,0}}$  no produto pode ser visto como a assíntota de uma PDF marginal equivalente, tal que o produto dos  $M$  termos é assintoticamente igual à PDF conjunta de  $\mathbf{R}$ . Ou seja, (12) implica que, em torno da origem, as VAs correlacionadas se comportam como um conjunto equivalente de VAs independentes. Assim, a assíntota  $a_0 r^{b_0}$  da PDF da soma  $R$  em (10) é dada pela convolução das  $M$  assíntotas  $\hat{a}_{i,0} r_i^{\hat{b}_{i,0}}$  em (12). Este resultado é uma das principais contribuições originais deste trabalho, com diversas implicações práticas. Uma consequência direta, por exemplo, consiste em aplicar (11), obtida no cenário independente, para o caso correlacionado, igualando-se  $a_{i,0}$  e  $b_{i,0}$  a  $\hat{a}_{i,0}$  e  $\hat{b}_{i,0}$ , respectivamente. Dessa forma, substituindo-se  $a_{i,0} = (\det(\mathbf{K}))^{\frac{-1}{2M}}$  e  $b_{i,0} = 1$  em (11), obtém-se para o cenário correlacionado

$$a_0 = \frac{1}{(\det(\mathbf{K}))^{\frac{1}{2}} \Gamma(2M)} \quad (13a)$$

$$b_0 = 2M - 1. \quad (13b)$$

## B. Aproximação Nakagami- $m$

Na primeira solução proposta, a soma  $R$  de envoltórias Rayleigh correlacionadas é aproximada por uma VA  $\tilde{R}$  do tipo Nakagami- $m$ , cuja PDF é dada por [2]

$$f_{\tilde{R}}(r) = \frac{2\tilde{m}\tilde{\Omega}r^{2\tilde{m}-1}}{\Gamma(\tilde{m})\tilde{\Omega}^{\tilde{m}}} \exp\left(-\frac{\tilde{m}r^2}{\tilde{\Omega}}\right), \quad (14)$$

em que  $\tilde{\Omega} = \mathbb{E}[\tilde{R}^2]$  e  $\tilde{m} = \tilde{\Omega}^2/\mathbb{V}[\tilde{R}^2]$  são os parâmetros da distribuição. O objetivo aqui é encontrar valores para os parâmetros  $\tilde{m}$  e  $\tilde{\Omega}$  da PDF Nakagami- $m$  tal que  $f_{\tilde{R}}(\cdot)$  seja uma boa aproximação para a PDF  $f_R(\cdot)$  da soma exata. Em particular, optou-se por privilegiar a qualidade do ajuste na cauda esquerda da distribuição, em torno da origem. A razão para isso é que tal região corresponde ao regime de alta SNR média do sistema — se, equivalentemente, mantém-se fixo o nível de envoltória e eleva-se a potência média —, sendo portanto mais relevante na prática que o bojo e a cauda direita da distribuição.

Em vista do exposto, com o intuito de garantir um bom ajuste em regime de alta SNR média, emprega-se o método de casamento de assíntotas proposto em [5]. Esse método consiste em ajustar os parâmetros da PDF aproximada  $f_{\tilde{R}}(\cdot)$  de forma que sua assíntota na origem, a saber,

$$f_{\tilde{R}}(r) \sim \tilde{a}_0 r^{\tilde{b}_0}, \quad (15)$$

seja igual à assíntota da PDF exata, dada em (10). Isso é garantido forçando-se

$$\tilde{a}_0 = a_0 \quad (16a)$$

$$\tilde{b}_0 = b_0. \quad (16b)$$

Obtém-se, assim, um sistema de duas equações e duas incógnitas. Os termos  $a_0$  e  $b_0$  são dados por (13). Quanto a  $\tilde{a}_0$  e  $\tilde{b}_0$ , para o caso Nakagami- $m$  são obtidos substituindo-se a exponencial em (14) por sua representação em série de Maclaurin e, então, extraindo-se o primeiro termo da expansão. Após as devidas simplificações, tem-se que

$$\tilde{a}_0 = \frac{2\tilde{m}\tilde{\Omega}^{\tilde{m}}}{\Gamma(\tilde{m})\tilde{\Omega}^{\tilde{m}}} \quad (17a)$$

$$\tilde{b}_0 = 2\tilde{m} - 1. \quad (17b)$$

Finalmente, substituindo-se esses resultados em (16) e resolvendo-se o sistema de equações para os parâmetros de ajuste  $\tilde{m}$  e  $\tilde{\Omega}$ , a solução é obtida como

$$\tilde{m} = M \quad (18a)$$

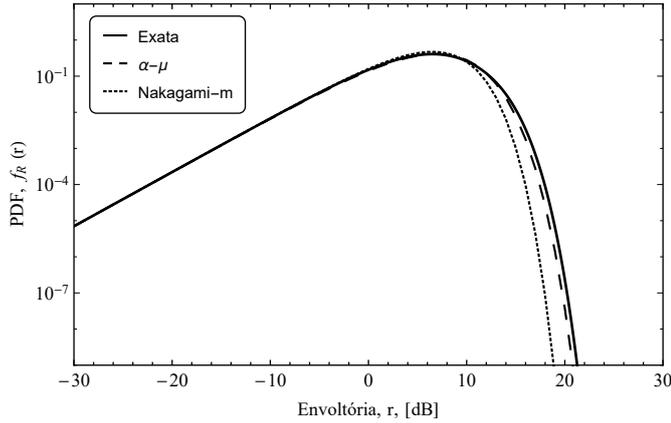
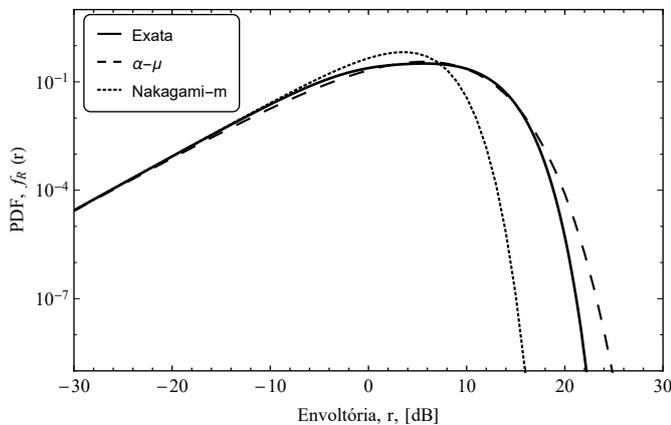
$$\tilde{\Omega} = M \left[ \frac{2(\det(\mathbf{K}))^{\frac{1}{2}} \Gamma(2M)}{\Gamma(M)} \right]^{\frac{1}{M}}. \quad (18b)$$

## C. Aproximação $\alpha$ - $\mu$

A segunda solução proposta consiste em aproximar a soma exata por uma VA do tipo  $\alpha$ - $\mu$ , cuja PDF é dada por [11]

$$f_{\tilde{R}}(r) = \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}r^{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}-1}}{\Gamma(\tilde{\mu})\tilde{\Omega}^{\tilde{\mu}}} \exp\left(-\frac{\tilde{\mu}r^{\tilde{\alpha}}}{\tilde{\Omega}}\right), \quad (19)$$

em que  $\tilde{\alpha} > 0$ ,  $\tilde{\Omega} = \mathbb{E}[\tilde{R}^{\tilde{\alpha}}]$  e  $\tilde{\mu} = \tilde{\Omega}^2/\mathbb{V}[\tilde{R}^{\tilde{\alpha}}]$  são os parâmetros da distribuição (note que a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  se


 Fig. 1. PDF da soma para  $M = 2$  e  $\rho = 0,5$ .

 Fig. 2. PDF da soma para  $M = 2$  e  $\rho = 0,9$ .

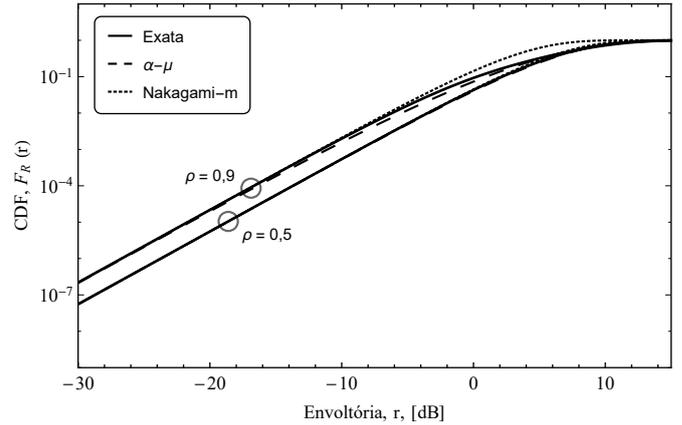
reduz à Nakagami- $m$  quando  $\tilde{\alpha} = 2$  e  $\tilde{\mu} = \tilde{m}$ ). O desenvolvimento é similar ao feito acima para Nakagami- $m$ , exceto que há agora três parâmetros a serem ajustados:  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\Omega}$ . Logo, são necessárias três equações para que se obtenha a solução do sistema. Esse grau de liberdade adicional da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  oferece uma maior flexibilidade de ajuste, o que permite explorar outras técnicas de casamento. Assim, para fornecer a terceira equação de ajuste, propõe-se aqui o casamento de um dado ( $n$ -ésimo) momento da soma, ou seja,  $\mathbb{E}[\tilde{R}^n] = \mathbb{E}[R^n]$ . Para os casos em que existe fórmula fechada para a função característica  $\Phi_R(\cdot)$  de  $R$ ,  $\mathbb{E}[R^n]$  pode ser obtido por meio de [9]

$$\mathbb{E}[R^n] = \frac{1}{j^n} \frac{d^n}{d\omega^n} \Phi_R(\omega) \Big|_{\omega=0}. \quad (20)$$

Caso contrário,  $\mathbb{E}[R^n]$  pode ser estimado numericamente a partir da PDF conjunta em (6). Em particular, o momento de primeira ordem  $\mathbb{E}[R]$  mostra-se suficiente para o escopo deste trabalho, sendo facilmente obtido a partir de (2) como

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^M \sigma_i \sqrt{\pi/2}. \quad (21)$$

É importante frisar que o casamento de assíntotas não tem nenhum compromisso em oferecer um bom ajuste no bojo e na cauda direita da distribuição. Essa técnica visa garantir tão


 Fig. 3. CDF da soma para  $M = 2$ .

somente um ajuste assintótico preciso na cauda esquerda. Em contrapartida, o casamento de momentos, embora não garanta um bom ajuste na cauda esquerda da distribuição, oferece bons resultados no bojo e na cauda direita. Portanto, o casamento de momentos constitui um complemento oportuno ao casamento de assíntotas. Em particular, os parâmetros  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\Omega}$  são obtidos como solução do seguinte sistema de equações:

$$\tilde{a}_0 = a_0 \quad (22a)$$

$$\tilde{b}_0 = b_0 \quad (22b)$$

$$\mathbb{E}[\tilde{R}^n] = \mathbb{E}[R^n]. \quad (22c)$$

Têm-se, portanto, três equações e três incógnitas. Os termos  $a_0$ ,  $b_0$  e  $\mathbb{E}[R^n]$ , com  $n = 1$ , referentes à soma exata são dados por (13) e (21). É necessário, então, determinar  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{b}_0$  e  $\mathbb{E}[\tilde{R}^n]$  para a distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . Substituindo-se a exponencial em (19) por sua representação em série de Maclaurin, de forma similar à realizada para o caso Nakagami- $m$ , obtém-se, após simplificações,

$$\tilde{a}_0 = \frac{\tilde{\alpha} \tilde{\mu}^{\tilde{\mu}}}{\Gamma(\tilde{\mu}) \tilde{\Omega}^{\tilde{\mu}}} \quad (23a)$$

$$\tilde{b}_0 = \tilde{\alpha} \tilde{\mu} - 1. \quad (23b)$$

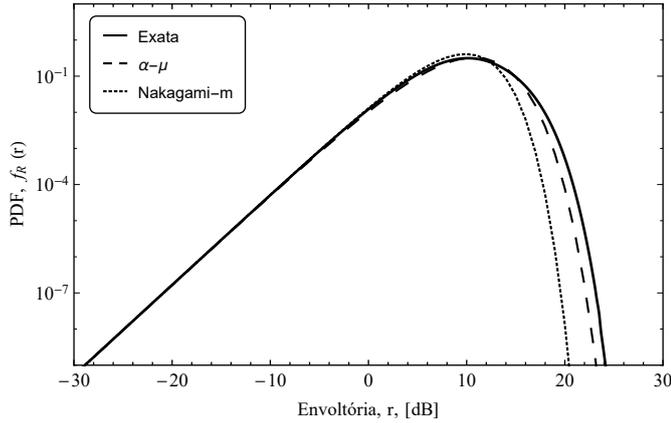
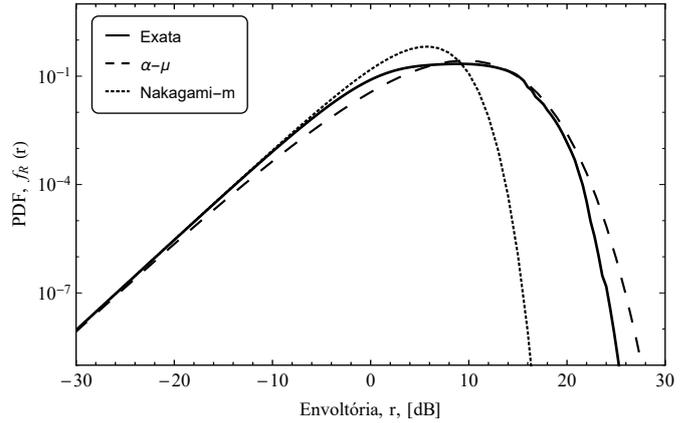
Por fim, o  $n$ -ésimo momento da VA  $\alpha$ - $\mu$  é dado como [11]

$$\mathbb{E}[\tilde{R}^n] = \frac{\tilde{\Omega}^{\frac{n}{\tilde{\alpha}}} \Gamma(\frac{n}{\tilde{\alpha}} + \tilde{\mu})}{\tilde{\mu}^{\frac{n}{\tilde{\alpha}}} \Gamma(\tilde{\mu})}. \quad (24)$$

Com a substituição de (13), (21), (23) e (24) em (22), obtém-se um sistema de equações transcendentais para as incógnitas  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\Omega}$ . Apesar de não admitir solução analítica em forma fechada, esse sistema de equações pode ser facilmente resolvido de forma numérica em pacotes computacionais como Mathematica e Matlab.

## V. APLICAÇÃO E RESULTADOS NUMÉRICOS

As aproximações propostas neste trabalho podem ser aplicadas diretamente ao estudo da técnica de combinação por ganho igual (EGC, do inglês *equal-gain combining*) operando com ramos de diversidade correlacionados sob desvanecimento do tipo Rayleigh. Nesse caso, a envoltória na saída do EGC equivale a  $R/\sqrt{M}$ , sendo  $R$  a soma de envoltórias (dos ramos)

Fig. 4. PDF da soma para  $M = 3$  e  $\rho = 0,5$ .Fig. 5. PDF da soma para  $M = 3$  e  $\rho = 0,9$ .

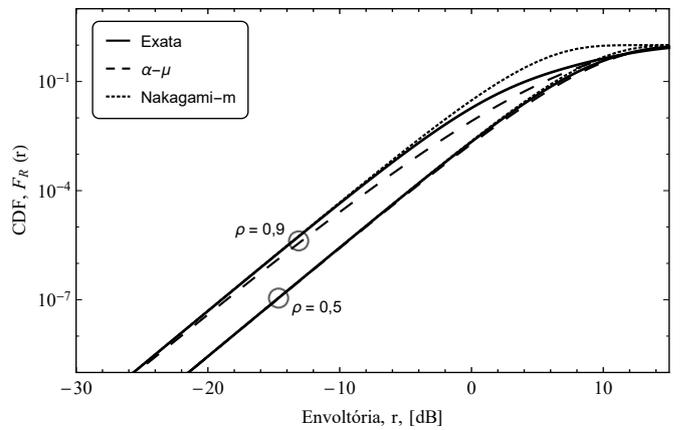
definida em (1). Por simplicidade, abstraiu-se a normalização por  $\sqrt{M}$  nos exemplos ora apresentados. As aproximações propostas são confrontadas à solução exata avaliada numericamente via (7). Adotam-se  $\sigma_i = 1, \forall i, \mathbb{E}[X_i Y_j] = 0, \forall i, j$ , e  $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[Y_i Y_j] = \rho, \forall i \neq j$ . Note que  $\rho$  é o coeficiente de correlação entre as componentes (pois  $\sigma_i = 1$ ), normalmente modelado por  $\rho = J_0(2\pi d/\lambda)$ , em que  $J_0(\cdot)$  é a função de Bessel do primeiro tipo de ordem zero,  $d$  é a distância entre as antenas, e  $\lambda$  é o comprimento de onda da portadora.

As Figs. 1 e 2 apresentam a PDF da soma de duas VAs Rayleigh correlacionadas, para  $\rho = 0,5$  e  $\rho = 0,9$ , respectivamente, e a Fig. 3 apresenta as CDFs correspondentes. De forma similar, as Figs. 4, 5 e 6 ilustram a soma de três VAs. Estas são as principais observações: (i) para ambas as aproximações propostas, verifica-se um ajuste excelente na cauda esquerda da distribuição, em virtude do casamento de assíntotas; (ii) a aproximação  $\alpha$ - $\mu$  apresenta melhor ajuste que a aproximação Nakagami- $m$  na cauda direita da distribuição, em virtude do casamento de momentos utilizado na primeira; (iii) de forma geral, o ajuste na cauda direita piora com o aumento do número de VAs na soma.

Note que, apesar de a aproximação  $\alpha$ - $\mu$  ser superior à aproximação Nakagami- $m$  na cauda direita, essa é uma região pouco relevante na prática. A cauda esquerda é muito mais representativa de um sistema de comunicações, por espelhar o comportamento de métricas como taxa de erro de bit e probabilidade de interrupção nas regiões de média a alta SNR. Ocorre que, na cauda esquerda, a aproximação Nakagami- $m$  apresenta uma leve vantagem (veja, por exemplo, a Fig. 6 para  $\rho = 0,9$ ), mostrando-se portanto superior nessa região.

## VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram introduzidas aproximações estatísticas simples para somas de VAs Rayleigh arbitrariamente correlacionadas. Conforme mostram os resultados de simulação, as soluções propostas são muito precisas na cauda esquerda da distribuição, uma região primordial para a avaliação de desempenho de sistemas de comunicação. Em trabalhos futuros, pretende-se estender a proposta a outros cenários de desvanecimento e outras técnicas de combinação de diversidade.

Fig. 6. CDF da soma para  $M = 3$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] D. G. Brennan, "Linear diversity combining techniques," in *Proc. IRE*, vol. 47, no. 6, pp. 1075–1102, Jun. 1959.
- [2] M. Nakagami, "The  $m$ -distribution - a general formula of intensity distribution of rapid fading," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman, Ed. Oxford, England: Pergamon, 1960.
- [3] J. C. S. Santos Filho and M. D. Yacoub, "Nakagami- $m$  approximation to the sum of  $M$  non-identical independent Nakagami- $m$  variates," *Electronics Letters*, vol. 40, no. 15, pp. 951–952, Jul. 2004.
- [4] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, "Highly accurate closed-form approximations to the sum of  $\alpha$ - $\mu$  variates and applications," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 9, pp. 3301–3306, Sep. 2008.
- [5] J. D. V. Sánchez, "Aproximações Nakagami- $m$  para somas de envoltórias Nakagami- $m$  via casamento de assíntotas e mistura aleatória". 2015. 67 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.
- [6] F. El Bouanani and D. B. da Costa, "Accurate closed-form approximations for the sum of correlated Weibull random variables," *IEEE Wireless Commun. Letters*, Jan. 2018.
- [7] B. Zhu, J. Cheng, J. Yan, J. y. Wang, L. Wu, and Y. Wang, "A new asymptotic analysis technique for diversity receptions over correlated lognormal fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 66, no. 2, pp. 845–861, Feb. 2018.
- [8] R. K. Mallik, "On multivariate Rayleigh and exponential distributions," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 49, no. 6, pp. 1499–1515, Jun. 2003.
- [9] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
- [10] Z. Wang and G. B. Giannakis, "A simple and general parameterization quantifying performance in fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 8, pp. 1389–1398, Aug. 2003.
- [11] M. D. Yacoub, "The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: a physical fading model for the Stacy distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.