Projeto de Códigos LDPC para o Canal Nakagami-m

Felipe Gabriel de Melo Elias, Evelio Martin Garcia Fernandez e Richard Demo Souza

***Resumo*— Apresentamos códigos LDPC otimizados para canais com desvanecimento Nakagami-m. Através do algoritmo *Density Evolution* associado ao algoritmo de busca *Differential Evolution*, foram encontrados códigos LDPC para o canal em questão. Simulações computacionais mostram que os novos códigos encontrados possuem desempenho superior a outros códigos construídos para outros modelos de desvanecimento, quando avaliados sob o efeito de desvanecimento Nakagami-m.**

***Palavras-Chave*— Códigos LDPC, Canal Nakagami-m.**

***Abstract*— We present LDPC codes optimized for the Nagakagami-m fading channel. By using the Density Evolution technique, associated to the Differential Evolution search algorithm, LDPC codes were found for the referred channel. Computer simulations show that the new codes outperform codes optimized for other fading channels, when evaluated under the effect of Nakagami-m fading.**

***Keywords*— LDPC Codes, Nakagami-m Channel.**

I. INTRODUÇÃO

Códigos LDPC (*Low-Density Parity Check Codes*) foram descobertos na década de 60 por Gallager [1], e têm recebido muita atenção devido ao seu excelente desempenho de correção de erros [3], tão bom quanto ou melhor do que o de códigos turbo e com complexidade de decodificação menor. O projeto de códigos LDPC deve levar em conta o canal de comunicação a ser usado. O projeto de códigos de correção de erros otimizados para determinado canal pode trazer melhora de desempenho em termos de taxas de erros, o que implica em menor potência de transmissão e economia de recursos.

O projeto de códigos para sistemas de comunicações sem fio tem que levar em conta o fenômeno do desvanecimento no canal. Meios de comunicação sem fio com desvanecimento são descritos através de uma função de distribuição de probabilidade (pdf) apropriada, sendo que a grande parte dos projeto de códigos para canais com desvanecimento têm se baseado nos modelos Rayleigh e Rician. Porém, alguns cenários de comunicação sem fio são melhor modelados com a distribuição de Nakagami-m [4]. Resultados recentes mostram que dados empíricos são melhor modelados segundo o desvanecimento Nakagami-m para diversos tipos de comunicações, por exemplo: comunicação via rádio em ambientes *indoor* e *outdoor* [5], dados de satélites GPS em canais satélite-indoor e satélite-outdoor [6] e por fim sistemas celulares CDMA e 3G segundo estudos realizados em [7] e [8], respectivamente. Desta forma surge a importância de um projeto correto para este canal.

Felipe G. M. Elias e Evelio M. G. Fernandez, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. {felipe.eletrica, evelio}@ufpr.br. Richard D. Souza, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, Paraná, Brasil. richard@utfpr.edu.br

Não encontramos na literatura projetos de códigos LDPC específicos para o canal Nakagami-m. Assim, o foco deste trabalho é justamente a construção de códigos otimizados para este canal. Para a construção de códigos LDPC foi utilizada a técnica *Density Evolution* [9] (em português, Evolução de Densidade, ou simplesmente DE) associada à técnica de busca *Differential Evolution* [10] (em português, Evolução Diferencial). A técnica DE necessita do cumprimento das condições de simetria e estabilidade, que são provadas para o canal Nakagami-m neste trabalho. Conforme será mostrado mais adiante, através do projeto otimizado para o canal Nakagami-m, é possível obter um ganho de cerca de 0,2 dB de SNR. Este ganho é considerável pois, levando em conta que o projeto deverá ser realizado apenas uma vez e depois disso o código será utilizado por muitos usuários por diversas vezes, essa economia é acumulada indefinidamente.

O restante deste artigo é divido da seguinte maneira. A Seção II discute alguns detalhes sobre códigos LDPC, enquanto na Seção III é abordado o algoritmo DE e são definidas e provadas as condições de estabilidade e simetria para o canal Nakagami-m. Na Seção IV são mostrados os resultados de projeto de códigos, enquanto a Seção V encerra o artigo.

II. CÓDIGOS LDPC

Códigos LDPC [1], [2], [3] realizam a codificação de uma mensagem de K bits a partir da adição de $N - K$ bits de redundância, gerando uma palavra código de N bits. A decodificação é realizada utilizando uma matriz esparsa de verificação de paridade $\mathbf{H}$, a qual neste trabalho é construída sobre o corpo de Galois GF(2). A matriz $\mathbf{H}$ possui N colunas e m linhas onde cada linha pode ser vista como uma equação de verificação de paridade do código. A taxa de um código LDPC é dada por $R = \frac{K}{N}$. Códigos LDPC também podem ser representados por grafos de Tanner [11], que são grafos bipartidos possuindo dois conjuntos de nós. O grafo possui N nós de variáveis denotados v para as palavras codificadas e m nós de verificação denotados c para as equações de paridade. Uma aresta liga um nó de variável a um nó de verificação se existe um bit "um" na linha da matriz correspondente.

Códigos LDPC que possuem o mesmo comportamento em termos de desempenho de decodificação são classificados como um *ensemble* de códigos[1], e são representados por duas funções de distribuição de graus da matriz $\mathbf{H}$ [3]:

$$\lambda(x) = \sum_{i=2}^{\lambda_{max}} \lambda_i x^{i-1}, \tag{1}$$

[1]Neste trabalho consideramos apenas o caso de códigos LDPC irregulares, dado seu melhor desempenho que o de códigos LDPC regulares [3].

$$\rho\left(x\right) = \sum_{i=2}^{\rho_{max}} \rho_i x^{i-1}, \tag{2}$$

onde a fração de colunas com peso (quantidade de elementos diferentes de zero na coluna) i é denotada por λ_i e a fração de linhas com peso i é ρ_i. Os maiores pesos para as colunas e as linhas são denotados por λ_{max} e ρ_{max}, respectivamente. Além disso, $\sum_{i=2}^{\lambda_{max}} \lambda_i = 1$ e $\sum_{i=2}^{\rho_{max}} \rho_i = 1$.

A decodificação de códigos LDPC é realizada por uma classe de algoritmos iterativos chamados *message-passing* [3]. Seu princípio é a troca de mensagens, durante certo número de iterações, dos nós de variáveis para nós de verificação e dos nós de verificação para nós de variáveis. A subclasse mais utilizada para a decodificação é conhecida como *Belief-Propagation*, também chamado de Soma-Produto [3], e que será utilizada neste trabalho.

III. Técnicas de Otimização

Nesta seção discutimos o algoritmo DE [9], a ferramenta mais utilizada para a busca de bons *ensembles* de códigos LDPC, assim como sua adaptação para o canal Nakagami-m.

A. *Algoritmo* Density Evolution

Através do algoritmo DE [9] é possível encontrar um *emsemble* otimizado para um dado canal. O algoritmo determina, para um *ensemble*, qual o máximo nível de ruído no qual ainda é possível obter decodificação livre de erros usando o algoritmo *Belief Propagation*. O algoritmo DE realiza um processo de cálculo a partir das pdfs das mensagens recebidas, estas pdfs são trocadas entre os nós de maneira iterativa durante um número máximo de iterações l_{max}.

A cada iteração o algoritmo DE realiza o cálculo da pdf $p_l^{(v)}$ das mensagens enviadas de um nó de variável para um nó de verificação, denotada por [2]:

$$p_l^{(v)} = p_0 * \sum_{d=1}^{\lambda_{max}} \lambda_d (p_{l-1}^{(c)})^{(d-1)}, \tag{3}$$

onde $*$ é o operador de convolução, o índice l denota o número da iteração e p_0 é a pdf das mensagens recebidas através do canal. A função $p_l^{(c)}$ é a pdf das mensagens enviadas de um nó de verificação para um nó de variável:

$$p_l^{(c)} = 2\tanh^{-1}\left[\sum_{d=1}^{\rho_{max}} \rho_d \left(\tanh\left(\frac{p_{l-1}^{(v)}}{2}\right)\right)^{(d-1)}\right]. \tag{4}$$

De acordo com [9] a probabilidade de que determinado bit esteja errado, P_e^l, é a probabilidade de a mensagem ser menor do que zero, dada por:

$$P_e^l = \int_{-\infty}^{0} p_l^{(v)}(x)dx. \tag{5}$$

Para um dado valor de SNR é possível executar o algoritmo DE até encontrar $P_e^l = 0$, ou até uma probabilidade finita irredutível.

O algoritmo DE necessita que duas propriedades sejam atendidas para seu devido funcionamento: simetria e estabilidade. Para ser atendida a propriedade de simetria uma pdf $p(x)$ deve satisfazer $p\left(x\right) = p(-x)\exp(x)$, de acordo com [9]. Por sua vez, a propriedade de estabilidade garante o desempenho otimizado de um *ensemble* de códigos. A prova desta propriedade e da convergência dos códigos que cumprem com ela aparece em [3] [9], onde é mostrado que a fração de mensagens incorretas converge para zero se:

$$\lambda_2 < e^s, \tag{6}$$

onde $s = -\log\left(2\int_0^\infty p(x)e^{\frac{-x}{2}}dx\right)$. A propriedade da estabilidade define uma limitação na construção de códigos LDPC pois determina o valor de λ_2. Este resultado serve como base para encontrar os demais valores de λ.

O algoritmo DE retorna apenas o limiar de ruído para um *ensemble*. Para encontrar o *ensemble* ótimo é preciso realizar a busca entre infinitos *ensembles*, o que é inviável. Por este motivo utilizamos a técnica de busca *Differential Evolution* [10], que considera um espaço finito de amostras (ou de *ensembles*, no caso). O algoritmo *Differential Evolution* define uma população de variáveis, onde cada variável é um vetor contendo o par (λ,ρ). Para cada variável é rodado o algoritmo DE e então é feito um processo de mutação. Este processo é rodado por diversas iterações até ser encontrado um vetor otimizado para o canal. O algoritmo é ainda muito custoso computacionalmente, e na literatura são encontradas estratégias para o aumento da rapidez [9], [13], como a inserção de restrições para o par de distribuição de graus.

Por fim, diversas matrizes $\mathbf{H}$ estão contidas no *ensemble* otimizado encontrado através da utilização do algoritmo DE aliado à técnica de *Differential Evolution*. Para encontrar uma matriz específica, de alto desempenho, neste artigo é realizada a sua construção utilizando o algoritmo *Progressive Edge Growth* (PEG) [12]. A entrada do algoritmo é um *ensemble* e a matriz $\mathbf{H}$ possui distribuições de pesos de acordo com as equações de distribuição de graus.

B. *A pdf Nakagami-m*

A pdf da distribuição Nakagami-m é:

$$p_N(a) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{2\sigma_{Naka}^2}\right)^m a^{2m-1}\exp\left(-\frac{ma^2}{2\sigma_{Naka}^2}\right), \tag{7}$$

onde $\Gamma(m)$ é a função Gama, m é o fator de forma, a é o fator de desvanecimento e $E[a^2] = 2\sigma_{Naka}^2$. O fator m indica a severidade do desvanecimento (quanto menor m, mais severo o desvanecimento). A distribuição de Rayleigh é um caso especial da distribuição de Nakagami-m para $m = 1$. Além disso, se $E[a^2] = 1$ então (7) se torna:

$$p_N(a) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(m\right)^m a^{2m-1}\exp\left(-ma^2\right). \tag{8}$$

O bit x que será transmitido pelo canal é mapeado como $w = (1-2x)$, gerando um símbolo pertencente ao conjunto $\{1,-1\}$. O símbolo y amostrado no receptor após a filtragem casada possui pdf dada por:

$$p\left(y|w,a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2}}\exp\left(-\frac{\left(y-wa\right)^2}{2\sigma_R^2}\right), \tag{9}$$

onde $\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{1}{2R}\frac{E_b}{N_0}\right)}$ é o desvio padrão do ruído Gaussiano.

Se $P_r(x=0) = P_r(x=1) = \frac{1}{2}$ então a mensagem inicial observada pelo canal pode ser expressa da seguinte forma:

$$r_0 = \log \frac{P\left(x_i = 0|y_i\right)}{P\left(x_i = 1|y_i\right)} = \frac{2}{\sigma^2} y_i. \tag{10}$$

É suposta a transmissão da palavra toda-zero, portanto, $w = 1$ em (9), e inserindo (10) em (9):

$$p_0\left(r_0|a\right) = \frac{\sigma_R}{2a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(r_0 - \frac{2a^2}{\sigma_R^2}\right)^2}{\left(\frac{8a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right). \tag{11}$$

Quando o valor médio de a é usado a função de densidade condicional de r_0 pode ser escrita de acordo com:

$$p_0\left(r_0\right) = \int_0^\infty \frac{\sigma_R}{2a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(r_0 - \frac{2a^2}{\sigma_R^2}\right)^2}{\left(\frac{8a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right) p_N(a) da. \tag{12}$$

Aplicando (8) em (12), obtem-se:

$$\begin{aligned} p_0\left(r_0\right) &= \int_0^\infty \frac{\sigma_R}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(r_0 - \frac{2a^2}{\sigma_R^2}\right)^2}{\left(\frac{8a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right) \times \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(m)} (m)^m a^{2m-1} \exp\left(-ma^2\right) da, \end{aligned} \tag{13}$$

que é a pdf utilizada no algoritmo DE para o canal Nakagami-m, sendo que a relação logarítmica usada para representar as mensagens recebidas é $r(x) = \log\left(\frac{p(x=0)}{p(x=1)}\right)$. Deste modo o valor do sinal de $r(x)$ representa a decisão abrupta sobre x e a magnitude $|r(x)|$ representa a confiança da variável.

C. Simetria e Estabilidade

Para verificar a condição de simetria primeiro note que:

$$\begin{aligned} p_0(-r_0)\exp(r_0) &= \int_0^\infty \frac{\sigma_R}{a\sqrt{2\pi}} \chi \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{\left(-r_0 - \frac{2a^2}{\sigma_R^2}\right)^2}{\left(\frac{4a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right) da \\ &= \int_0^\infty \frac{\sigma_R}{a\sqrt{2\pi}} \chi \times \\ &\quad \exp\left(\frac{-{r_0}^2 - \frac{4a^4 r_0 - 4a^4 + 8a^4 r_0}{\sigma_R^2}}{\left(\frac{4a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right) da, \end{aligned} \tag{14}$$

onde $\chi = \frac{1}{\Gamma(m)} (m)^m a^{2m-1} \exp\left(-ma^2\right) \exp(r_0)$. Simplificando-se:

$$\begin{aligned} p_0(-r_0)\exp(r_0) &= \int_0^\infty \frac{\sigma_R}{a\sqrt{2\pi}} \chi \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{\left(r_0 - \frac{2a^2}{\sigma_R^2}\right)^2}{\left(\frac{4a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right) da \\ &= p_0(r_0)\exp(r_0), \end{aligned} \tag{15}$$

o que comprova a propriedade e garante que existem *ensembles* otimizados para o canal.

A condição de estabilidade é obtida a partir de (6):

$$\begin{aligned} e^{-s} &= 2\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sigma_R}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(r_0 - \frac{2a^2}{\sigma_R^2}\right)^2}{\left(\frac{4a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right) \times \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(m)} (m)^m a^{2m-1} \exp\left(-ma^2\right) \exp\left(\frac{-r_0}{2}\right) da dr_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Rearranjando (16):

$$\begin{aligned} e^{-s} &= 2\int_0^\infty \exp\left(-ma^2\right) \frac{(m)^m}{\Gamma(m)} \frac{a^{2m-1}}{a} \frac{\sigma_R}{\sqrt{2\pi}} da \times \\ &\quad \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left(r_0 - \frac{2a^2}{\sigma_R^2}\right)^2}{\left(\frac{4a^2}{\sigma_R^2}\right)}\right) e^{\frac{-r_0}{2}} dr_0, \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-ma^2\right) \frac{(m)^m}{\Gamma(m)} \frac{a^{2m-1}}{a} 2a exp\left(\frac{-a^2}{2\sigma_R^2}\right) da, \\ &= \frac{(m)^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty 2a^{2m-1} exp\left(-\left(m + \frac{1}{2\sigma_R^2}\right) a^2\right) da, \\ &= \frac{m^m}{\left(\frac{1}{2\sigma_R^2} + m\right)^m}, \end{aligned} \tag{17}$$

obtendo-se por fim a condição de estabilidade do algoritmo DE para o canal Nakagami-m:

$$\lambda_2 < \frac{\left(\frac{1}{2\sigma_R^2} + m\right)^m}{m^m}. \tag{18}$$

IV. Resultados

Foram realizados projetos de códigos LDPC com taxa $R = \frac{1}{2}$ para o canal Nakagami-m com $m = \{0{,}8; 2{,}1; 4\}^2$. Foram impostas restrições sobre os elementos de grau máximo $\lambda_{max} = 20$ e $\rho_{max} = 6$. Outra restrição é feita sobre a quantidade de elementos das funções de distribuição de graus. Foram escolhidos os elementos $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{19}$ e λ_{20}. Os valores de λ_2 para cada projeto são encontrados através dos cálculos de estabilidade. Com o valor encontrado é possível utilizar as equações de restrições limitando os demais valores de λ e ρ. Como resultado chegou-se nas distribuições de graus mostradas na Tabela I.

[2] A escolha destes valores para o parâmetro m foi motivada pelos resultados de medidas reportados em [5].

TABELA I
FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DE GRAU PARA CANAIS NAKAGAMI-m.

	$m = 0{,}8$	$m = 2{,}1$	$m = 4$
λ_2	0,2223	0,2110	0,2109
λ_3	0,1997	0,1951	0,2483
λ_4	0,1836	0,1671	0,0234
λ_6	0,0128	0,0334	0,1627
λ_7	0,0182	0,0054	0,0538
λ_8	0,0221	0,1401	0,0610
λ_9	0,0011	0,0023	0,0034
λ_{19}	0,1986	0,0729	0,0815
λ_{20}	0,1416	0,1729	0,1550
ρ_8	0,9434	0,9363	0,923
ρ_9	0,0566	0,0637	0,077

A. Simulação Computacional

O desempenho de cada um dos novos códigos projetados foi comparado via simulação computacional com o de outros projetos já encontrados na literatura [13], porém otimizados para outros canais. Estes códigos conhecidos otimizados para outros canais foram simulados em cenários Nakagami-m, e comparados com os novos códigos apresentados neste artigo. Desta forma será possível verificar que os três novos códigos projetados para canal Nakagami-m possuem desempenho de correção superior aos projetos realizados para outros canais, quando usados em ambiente Nakagami-m. A análise é realizada em termos de taxa de erro de bit (BER) versus E_b/N_0, onde E_b é a energia por bit de informação e $N_0 = 2\sigma_R^2$ é a densidade espectral de ruído. Para cada valor de E_b/N_0 foram transmitidas 10000 palavras de informação de tamanho 1536 bits. Este é o mesmo tamanho de bloco utilizado em [13].

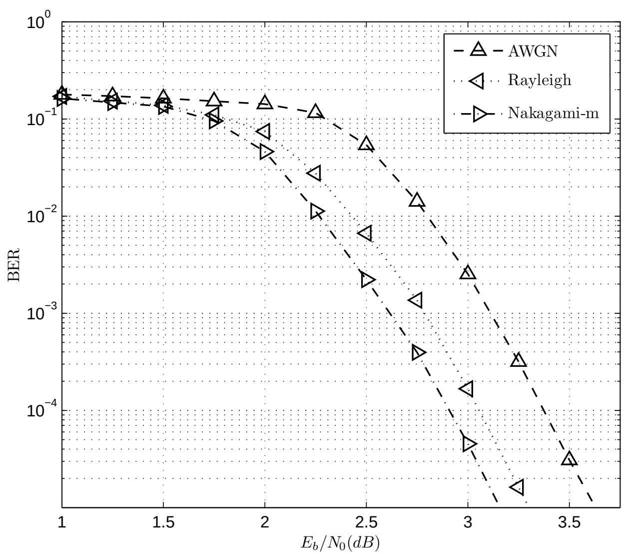

Fig. 1. BER versus E_b/N_0 para códigos LDPC otimizados para diferentes canais de comunicação, mas utilizados em um canal Nakagami-$m = 0{,}8$.

A Figura 1 mostra o resultado para o caso de $m = 0{,}8$. Consegue-se uma BER de aproximadamente $4{,}5 \times 10^{-5}$ para $E_b/N_0 = 3$ dB usando o novo código da Tabela I. Por sua vez, o código projetado para canal Rayleigh [13] possui desempenho de correção inferior, atingindo uma BER de aproximadamente $1{,}7 \times 10^{-4}$ para $E_b/N_0 = 3$ dB. Na mesma figura é mostrada a BER obtida com um código projetado para o canal AWGN [12], este código possui desempenho de $2{,}5 \times 10^{-3}$ para $E_b/N_0 = 3$ dB.

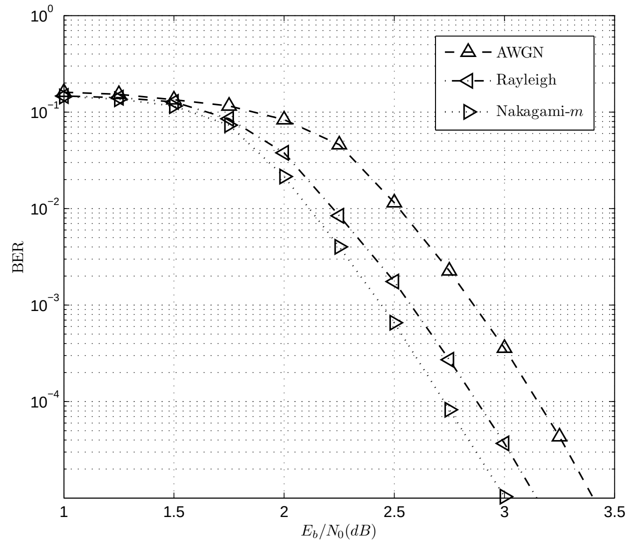

Fig. 2. BER versus E_b/N_0 para códigos LDPC otimizados para diferentes canais de comunicação, mas utilizados em um canal Nakagami-$m = 2{,}1$.

A Figura 2 considera o caso de $m = 2{,}1$. O novo código projetado garante uma BER de aproximadamente $1{,}03 \times 10^{-5}$ para $E_b/N_0 = 3$ dB, o código projetado para canal Rayleigh atinge $3{,}7 \times 10^{-5}$ para $E_b/N_0 = 3$ dB, e o código projetado para o canal AWGN tem desempenho de aproximadamente $3{,}6 \times 10^{-4}$ para $E_b/N_0 = 3$ dB. As três curvas simuladas em ambiente com desvanecimento Nakagami-m com $m = 2{,}1$ tem um desempenho superior se comparadas às com $m = 0{,}8$, pois quanto maior o valor de m menos severo fica o desvanecimento.

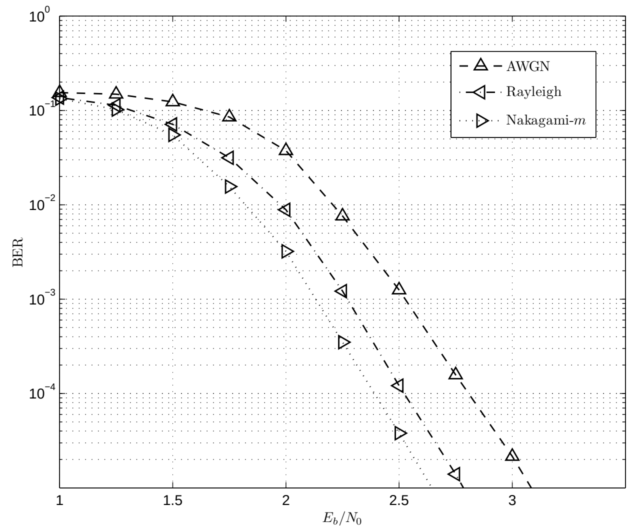

Fig. 3. BER versus E_b/N_0 para códigos LDPC otimizados para diferentes canais de comunicação, mas utilizados em um canal Nakagami-$m = 4{,}0$.

A Figura 3 mostra resultados semelhantes, mas para o caso de $m = 4{,}0$. Novamente, o desempenho do código otimizado para o canal Nakagami-m é superior ao dos códigos otimizados para outros canais. Estes resultados mostram a importância de projetar o código para o modelo correto do canal que será utilizado pelo sistema de comunicação.

V. CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo a construção de códigos LDPC para canais com desvanecimento Nakagami-m. Para chegar aos resultados obtidos foram encontrados os parâmetros de construção de *ensembles* otimizados para o canal em questão. As propriedades de simetria e estabilidade do algoritmo DE foram provadas para garantir que o par de distribuição de graus gerasse códigos otimizados para o canal, e que o processo de decodificação convergisse quando o número de iterações tendesse ao infinito. O desempenho de cada novo código projetado foi analisado via simulação e foi verificado que estes códigos são superiores a outros códigos existentes na literatura. Os códigos projetados neste trabalho tiveram um ganho de cerca de $0{,}2$ dB aproximadamente se comparados a códigos projetados para canal Rayleigh, quando simulados em ambiente Nakagami-m. Este ganho pode parecer modesto, mas deve ser levado em conta que a economia de 0,2 dB será feita por todos os usuários do sistema todas as vezes que estes utilizarem o mesmo, gerando uma economia acumulada muitas vezes maior.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio da Positivo Informática e do CNPq.

REFERÊNCIAS

[1] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*. Monograph, M.I.T. Press, Cambridge. 1963.

[2] W. E. Ryan e S. Lin, *Channel Codes: Classical and Modern. Cambridge University Press*, 2009.

[3] S. J. Johnson, *Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes*. Cambridge Press, 2010.

[4] M. Nakagami, "The m-Distribution, a general formula of intensity of rapid fading," *Statistical Methods in Radio Wave Propagation: Proceedings of a Symposium*, pp. 3–36, Junho 1958.

[5] M. D. Yacoub, "The κ-μ Distribution and the η-μ Distribution," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, v. 49, n.1, pp. 68–81, Fevereiro 2007.

[6] A. Lakhzouri, E. S. Lohan, I. Saastamoinen e M. Renfors, "On second order statistics of the satellite-to-indoor channel based on field measurements," *Proc. IEEE Symposium on Personal, Indoor, Mobile and Radio Communications (PIMRC)*, pp. 2632–2636, Setembro 2005.

[7] E. Pajala, T. Isotalo, A. Lakhzouri e E. S. Lohan, "An improved simulation model for Nakagami-m fading channels for satellite positioning applications," *Proceedings Of The 3rd Workshop On Positioning, Navigation And Communication*, pp. 81–90, Fevereiro 2006.

[8] E. S. Lohan, A. Lakhzouri e M. Renfors, "Statistical Properties of Urban WCDMA Channel for Mobile Positioning Applications," *International Journal of Wireless and Optical Communications*, pp. 1–16, Dezembro 2004.

[9] T. J. Richardson e R. Urbanke, "The Capacity of Low-Density Parity Check Codes Under Message-Passing Decoding," *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 47, n.2, pp. 599–618, Fevereiro 2001.

[10] R. Storn e K. Price, "Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces," *Journal of Global Optimization*, v. 11, pp. 341-359, Junho 1997.

[11] R. Tanner, "A recursive approach to low complexity codes," *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 27, n.5, pp. 533–547, Setembro 1981.

[12] X. Hu, E. Eleftheriou e D. M. Arnold, "Regular and Irregular Progressive Edge-Growth Tanner Graphs," *IEEE Transactions on Communications*, v. 51, n.1, pp. 386–398, Janeiro 2005.

[13] J. Hou, P. Siegel, e L. Milstein, "Performance Analysis and Code Optimization of Low-Density Parity-Check Codes on Rayleigh Fading Channels," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 19, n.5, pp. 924–934, Maio 2001.