

# Filtro $\mathcal{H}_\infty$ com Nível de Robustez Adaptativo para Equalização Espaço-Temporal

Fabiano de S. Chaves, João M. T. Romano, Mohamed Abbas-Turki e Hisham Abou-Kandil

**Resumo**—Este trabalho propõe a combinação entre desempenho médio e robustez no contexto da equalização adaptativa espaço-temporal. Nós discutimos inicialmente e de maneira breve os critérios de otimização  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , que são associados, respectivamente, ao desempenho médio e à robustez. Como alternativa à combinação convexa dos filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para a reunião das propriedades desejadas, nós propomos um esquema de adaptação do nível de robustez do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ , de modo a permitir a combinação entre desempenho médio e robustez com o uso de apenas um filtro.

**Palavras-Chave**—Equalização adaptativa, filtragem  $\mathcal{H}_2$ , filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ , desempenho médio, robustez.

**Abstract**—In this work, we propose the combination of mean performance and robustness in the context of adaptive space-time channel equalization. We first briefly discuss  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  optimization criteria, which are respectively associated to mean performance and robustness. As an alternative to the convex combination of  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filters to join the desirable properties, we propose an adaptation scheme for the robustness level of the  $\mathcal{H}_\infty$  filter for combining mean performance and robustness through a unique filter.

**Keywords**—Adaptive equalization,  $\mathcal{H}_2$  filtering,  $\mathcal{H}_\infty$  filtering, mean performance, robustness.

## I. INTRODUÇÃO

Os sistemas de comunicação têm evoluído no sentido de oferecer taxas de transmissão cada vez mais elevadas. A combinação desfavorável entre as altas taxas de transmissão e a dispersão temporal dos canais dá origem à interferência entre símbolos (IES), que associada à interferência co-canal (ICC) ou multi-usuário, impõe limitações de desempenho a tais sistemas. A equalização espaço-temporal linear adaptativa é uma técnica clássica de reversão ou de atenuação dos efeitos nocivos da IES e da ICC sobre os sinais. Ela se caracteriza pelo uso de filtros transversais como equalizadores lineares em múltiplos sensores de recepção, permitindo a exploração das diversidades temporal e espacial do sinal no receptor [1].

Convencionalmente, os algoritmos de adaptação dos coeficientes do equalizador são obtidos de acordo com um critério de desempenho que leva em consideração o comportamento médio do sistema, como, por exemplo, a minimização do erro quadrático médio entre um sinal de referência e o sinal na saída do equalizador. Entretanto, a recuperação do sinal transmitido pode ser prejudicada ainda por incertezas ou perturbações de

difícil modelagem, como ruídos não-gaussianos. Neste caso, abordagens voltadas à robustez são mais adequadas.

A representação do problema da filtragem adaptativa no espaço de estados permite uma modelagem geral, que suporta tanto a filtragem  $\mathcal{H}_2$ , baseada na otimização do desempenho médio, quanto a filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ , que busca a otimização do desempenho de “pior caso” e por essa razão é associada à robustez [2]–[5]. O filtro de Kalman é a solução ótima para a filtragem  $\mathcal{H}_2$ , sob a condição de que os ruídos envolvidos sejam gaussianos e tenham suas propriedades estatísticas conhecidas. Algoritmos adaptativos clássicos, como o RLS (*Recursive Least Squares*), são reconhecidos como casos especiais do filtro de Kalman, ou filtro  $\mathcal{H}_2$  [2]. Como alternativa à tradicional filtragem  $\mathcal{H}_2$ , a filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ , abordagem determinística, minimiza a máxima transferência de energia das perturbações para o erro filtrado [3]–[5]. Assim, a filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  é apropriada para lidar com incertezas de modelagem significativas, causadas, por exemplo, por interferências assíncronas em sistemas de comunicação sem fio de múltiplo acesso [6], [7]. Porém, se comparados ao filtro  $\mathcal{H}_2$ , os filtros  $\mathcal{H}_\infty$  são conservadores com relação ao desempenho médio [3], [4].

As propriedades complementares dos filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  motivam o estudo de sua combinação. Diferentes estratégias de compromisso entre os critérios  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  podem ser encontradas no âmbito da filtragem mista  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , como em [8], [9]. Entretanto, a equalização mista  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  linear e adaptativa permanece um problema em aberto, pois as soluções mencionadas não são aplicáveis. Por outro lado, a noção de filtragem combinada tem sido largamente explorada em processamento de sinais. Combinações convexas e afins de dois filtros são estratégias conceitualmente simples para a exploração das mais desejáveis características individuais de cada filtro [10], [11]. O trabalho desenvolvido em [12] propõe a combinação convexa dos filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para a equalização linear adaptativa SISO (*Single-Input, Single-Output*).

Neste trabalho, nós propomos uma alternativa à combinação de filtros para a reunião entre desempenho médio e robustez no contexto da equalização espaço-temporal linear adaptativa. O objetivo é alcançado por meio de um esquema de adaptação do nível de robustez do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ , que permite que ele assuma desde configurações robustas até configurações que o reduzem ao equalizador  $\mathcal{H}_2$ . Resultados de simulação são apresentados para um cenário de rede sem fio caracterizada por interferências assíncronas, facilitando assim a observação dos ganhos da solução proposta com relação à combinação convexa dos filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , além da vantagem de utilizar apenas um filtro  $\mathcal{H}_\infty$ .

Com o intuito de facilitar a compreensão da nossa proposta,

Fabiano de S. Chaves, Instituto Nokia de Tecnologia - INdT, Manaus, Brasil, E-mail: fabiano.chaves@indt.org.br.

João M. T. Romano, Departamento de Microonda e Óptica, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, E-mail: romano@dmo.fee.unicamp.br.

Mohamed Abbas-Turki e Hisham Abou-Kandil, Laboratório SATIE, École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, França, E-mails: {abbas-turki, abou-kandil}@satie.ens-cachan.fr.

a Seção II apresenta, em primeiro lugar, a representação do problema da equalização adaptativa no espaço de estados, além de noções das filtragens  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . O filtro  $\mathcal{H}_\infty$  com nível de robustez adaptativo é proposto na Seção III, enquanto que as simulações computacionais e seus resultados são discutidos na Seção IV. Nossas conclusões se encontram na Seção V.

## II. REPRESENTAÇÃO DA EQUALIZAÇÃO

### ESPAÇO-TEMPORAL ADAPTATIVA NO ESPAÇO DE ESTADOS

O modelo simplificado de um sistema de comunicação MIMO (*Multiple-Input, Multiple-Output*) em banda básica, mostrado na Figura 1, é usado para ilustrar o problema da equalização espaço-temporal. Neste modelo discreto no tempo,  $M$  seqüências são transmitidas,  $\mathbf{d}_1(k), \dots, \mathbf{d}_M(k)$ , e o receptor é composto por  $N$  sensores. O canal MIMO é formado por subcanais FIR (*Finite Impulse Response*)  $\mathbf{h}_{ij}(k)$  entre o sensor de transmissão  $j$  e o sensor de recepção  $i$ , onde  $i = \{1, \dots, N\}$  e  $j = \{1, \dots, M\}$ . Os sinais na entrada do receptor  $u_i(k)$  são expressos por:

$$u_i(k) = \sum_{j=1}^M \mathbf{d}_j(k) \star \mathbf{h}_{ij}(k) + \eta_i(k), \quad (1)$$

com “ $\star$ ” representando a convolução discreta e  $\eta_i(k)$  uma amostra do ruído branco gaussiano. Assim, o sinal de entrada do equalizador espaço-temporal corresponde ao seguinte vetor concatenado:

$$\mathbf{u}(k) = [\mathbf{u}_1^T(k), \dots, \mathbf{u}_N^T(k)]^T \in \mathbb{R}^{N \cdot P \times 1}, \quad (2)$$

onde  $\mathbf{u}_i(k) = [u_i(k), \dots, u_i(k - P + 1)]^T$  e  $P$  é o número de amostras utilizadas para equalização.

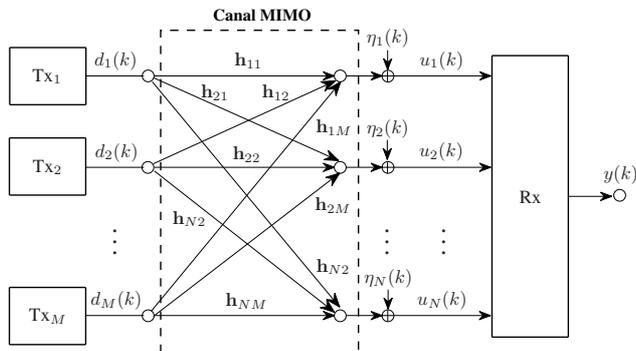


Fig. 1. Sistema de comunicação MIMO em banda básica.

O sinal de saída do equalizador,  $y(k)$ , é uma estimativa do sinal transmitido desejado, representada simplificada por  $d(k)$ . Também por uma questão de simplificação da notação, o atraso de equalização é desprezado no modelo, e  $y(k)$  é escrito como segue:

$$y(k) = \mathbf{u}^H(k) \mathbf{w}(k), \quad (3)$$

onde  $\mathbf{w}(k) = [\mathbf{w}_1^T(k), \dots, \mathbf{w}_N^T(k)]^T \in \mathbb{R}^{N \cdot P \times 1}$  é o vetor concatenado do equalizador espaço-temporal, e  $\mathbf{w}_i(k) = [w_i(k), \dots, w_i(k - P + 1)]^T$ , para  $i = \{1, \dots, N\}$ .

Em nossa representação no espaço de estados, o estado a ser estimado é o vetor de coeficientes do equalizador

ótimo,  $\mathbf{w}_o(k)$ , enquanto que a medida é a seqüência de treinamento (sinal desejado)  $d(k)$ , disponível no receptor. O modelo dinâmico é o seguinte [3]:

$$\mathbf{w}_o(k+1) = \mathbf{w}_o(k), \quad \mathbf{w}_o(0) = \bar{\mathbf{w}}_o \quad (4)$$

$$d(k) = \mathbf{u}^H(k) \mathbf{w}_o(k) + r(k), \quad (5)$$

onde  $\mathbf{w}_o(k)$  é considerado constante, em razão de sua variação lenta se comparada ao tempo de símbolo;  $r(k)$  é o ruído de medida, que resulta do ruído aditivo e das incertezas de modelagem. Na equalização adaptativa supervisionada,  $d(k)$  em (5) é usado para gerar o sinal de erro  $e(k) = d(k) - y(k)$ , utilizado na adaptação dos coeficientes do equalizador.

### A. Filtragem $\mathcal{H}_2$

Na filtragem  $\mathcal{H}_2$ , supõe-se que  $\mathbf{w}_o(0)$  e  $r(k)$  são variáveis aleatórias independentes, gaussianas, de média nula e com estatísticas de segunda ordem conhecidas, dadas por  $\mathbb{E}\{\mathbf{w}_o(0) \mathbf{w}_o^H(0)\} = \mathbf{\Pi}_0$  e  $\mathbb{E}\{r(k) r^*(k)\} = R(k)$ , onde  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  denota o operador esperança matemática. Isto significa que as perturbações envolvidas são completamente caracterizadas em termos estatísticos. O problema consiste em encontrar o estimador linear que minimiza o erro quadrático médio (EQM) abaixo:

$$\min_{\mathbf{z}(k)} \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^k [\mathbf{z}_o(i) - \mathbf{z}(i)]^H [\mathbf{z}_o(i) - \mathbf{z}(i)] \right\}, \quad (6)$$

onde o sinal a ser estimado é uma combinação linear do equalizador ótimo, isto é,  $\mathbf{z}_o(k) = \mathbf{L}(k) \mathbf{w}_o(k)$ , e sua estimativa é dada por  $\mathbf{z}(k) = \mathbf{L}(k) \mathbf{w}(k)$ . Como o estado a ser estimado é o próprio equalizador ótimo,  $\mathbf{L}(k) = \mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

A solução deste problema é o filtro de Kalman, que se reduz ao algoritmo RLS se  $R(k) = 1$ . O equalizador  $\mathcal{H}_2$  considerado neste trabalho é adaptado pelo algoritmo RLS [2], [3].

### B. Filtragem $\mathcal{H}_\infty$

A filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  está diretamente relacionada à noção de robustez. Ela se propõe à otimização do desempenho de “piores casos”, isto é, a minimização da máxima transferência de energia das perturbações para o erro filtrado. Porém, apenas em alguns casos é possível chegar à solução ótima para este problema minimax. Por esta razão, é comum se considerar o seguinte problema subótimo:

$$\max_{\mathbf{w}_o(0), \{r\}} \frac{\sum_{i=0}^k \|\mathbf{z}_o(i) - \mathbf{z}(i)\|^2}{\|\mathbf{w}_o(0) - \mathbf{w}(0)\|^2 + \sum_{i=0}^k r^2(i)} < \gamma^2, \quad (7)$$

em que o parâmetro  $\gamma > 0$ , chamado de nível de atenuação da perturbação, limita o máximo ganho de energia das perturbações para o erro filtrado. Em outras palavras,  $\gamma$  regula o nível de robustez do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ , com valores baixos de  $\gamma$

correspondendo a filtros mais restritivos (robustos), e vice-versa. O relaxamento da restrição de robustez com o aumento do valor de  $\gamma$  aproxima o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  resultante do filtro  $\mathcal{H}_2$  [4].

A existência do filtro  $\mathcal{H}_\infty$  depende da invertibilidade de uma matriz  $\Omega(k)$ , que para o caso específico da equalização adaptativa supervisionada assume a seguinte forma [13]:

$$\Omega(k) = \mathbf{I} + (1 - \gamma^{-2})\mathbf{u}(k)\mathbf{u}^H(k)\mathbf{K}(k), \quad (8)$$

onde  $\mathbf{K}(k)$  é uma matriz definida positiva que satisfaz uma equação recursiva de Riccati [3], [4]. Para que a matriz  $\Omega(k)$  seja invertível, ela deve ser definida positiva em todo instante  $k$ . Considerando (8) e a restrição de positividade da matriz  $\Omega(k)$ , chega-se a uma condição suficiente para a existência do filtro  $\mathcal{H}_\infty$  em função de seu nível de atenuação da perturbação  $\gamma$ :

$$\gamma \geq 1 \Rightarrow \Omega(k) > \mathbf{0}, \quad \forall k. \quad (9)$$

Portanto, o equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  que evita uma amplificação da energia das perturbações para o erro filtrado ( $\gamma = 1$ ) tem sua existência garantida. Esta configuração do filtro corresponde a uma variante do algoritmo NLMS (*Normalized Least Mean Square*) [3], [13].

### III. EQUALIZADOR ESPAÇO-TEMPORAL $\mathcal{H}_\infty$ COM NÍVEL DE ATENUAÇÃO DA PERTURBAÇÃO ADAPTATIVO

De acordo com a discussão da Seção II-B, a robustez do filtro  $\mathcal{H}_\infty$  é determinada pelo nível de atenuação da perturbação,  $\gamma$ . Este parâmetro é, na verdade, o limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ .

A relação entre a robustez e o parâmetro  $\gamma$  é ilustrada na Figura 2, onde  $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$  é a mínima norma  $\mathcal{H}_\infty$  do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ , ou seja,  $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$  é a solução ótima do problema minimax original que define o filtro  $\mathcal{H}_\infty$ . Assim,  $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$  representa o filtro mais robusto. Em contrapartida,  $\gamma_{\mathcal{H}_2}$  representa um valor de  $\gamma$  para o qual o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  associado é equivalente ao filtro  $\mathcal{H}_2$ , que é a solução ótima no sentido do erro quadrático médio. Logo, é possível contemplar os dois aspectos de interesse, o desempenho médio e a robustez, por meio do ajuste do funcionamento do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ , ou seja, por meio da adaptação do parâmetro  $\gamma$ . Valores intermediários do parâmetro representam um compromisso entre a robustez do filtro  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma = \gamma_{\mathcal{H}_\infty}$  e o desempenho médio ótimo do filtro  $\mathcal{H}_2$ , obtido pelo filtro  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma = \gamma_{\mathcal{H}_2}$ .

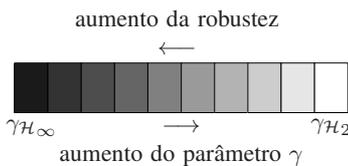


Fig. 2. Nível de robustez do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ .

O primeiro passo para a adaptação do parâmetro  $\gamma$  é a definição de seu intervalo de variação. Em geral, o valor ótimo de  $\gamma$  no sentido da minimização da máxima norma  $\mathcal{H}_\infty$ , ou seja,  $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}$ , é desconhecido. Entretanto, no contexto

da equalização adaptativa,  $\gamma \geq 1$  é uma condição suficiente para a existência do filtro  $\mathcal{H}_\infty$  (ver Seção II-B). Assim, nossa referência de robustez é o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma = 1$ . Por outro lado, deve-se considerar o seguinte resultado estabelecido em [14]: o filtro  $\mathcal{H}_2$  apresenta um limitante superior explícito para o ganho de energia das perturbações para o erro filtrado, ele vale 4. Em outras palavras, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do filtro  $\mathcal{H}_2$  é menor ou igual a 2. Então, pelo menos com respeito à robustez, o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma = 2$  é equivalente ao filtro  $\mathcal{H}_2$ . Como o fato de dois filtros apresentarem o mesmo desempenho em termos de robustez não significa que eles sejam idênticos, é conveniente adotar valores maiores do que 2 para  $\gamma_{\mathcal{H}_2}$ . Nós verificamos por simulações que com  $\gamma = 5$  o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  se reduz numericamente ao filtro  $\mathcal{H}_2$ .

A adaptação do parâmetro  $\gamma$  é inspirada na do parâmetro  $\lambda$  da combinação convexa entre os filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  apresentada em [12]. Uma função sigmóide da uma variável auxiliar  $\alpha(k)$  é usada para garantir  $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma(k) \leq \gamma_{\mathcal{H}_2}$ . A função está definida abaixo:

$$\gamma(k) = \frac{\gamma_{\mathcal{H}_2} - \gamma_{\mathcal{H}_\infty}}{1 + e^{-\alpha(k)}} + \gamma_{\mathcal{H}_\infty}. \quad (10)$$

Esta função sigmóide determina uma adaptação mais dinâmica para valores intermediários de  $\gamma(k)$ , enquanto que para valores próximos das extremidades do intervalo de variação de  $\gamma(k)$ , a adaptação é mais suave.

A adaptação é realizada pelo ajuste do parâmetro  $\alpha(k)$ . A idéia consiste em usar valores elevados de  $\alpha(k)$ , e conseqüentemente de  $\gamma(k)$ , para privilegiar o desempenho médio do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ . O decréscimo de  $\alpha(k)$  (e de  $\gamma(k)$ ) deve ser uma resposta à necessidade de robustez.

A robustez é importante em situações caracterizadas por incertezas significativas de modelagem. No caso da equalização de canal, as incertezas podem resultar de mudanças abruptas nas condições de transmissão, as quais não são representadas pelos modelos adotados, tais como aquelas originadas por ruídos não-gaussianos e interferências assíncronas. Estas perturbações podem ser detectadas, em geral, pelas variações intensas da energia dos sinais na entrada do receptor. Assim, nós definimos a adaptação do parâmetro  $\alpha(k)$  de acordo com a variação da energia do sinal de entrada do equalizador,  $\mathbf{u}(k)$ , como descrito abaixo:

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) - \mu \frac{\|\Delta\mathbf{u}(k)\|^2}{\|\mathbf{u}(k)\|^2} + \varepsilon, \quad (11)$$

onde  $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ ,  $\mu$  é um fator de passo e  $\varepsilon$  é um parâmetro positivo. Em estado permanente,  $\|\Delta\mathbf{u}(k)\|$  assume valores baixos e o parâmetro  $\alpha$  aumenta, enfatizando assim o desempenho médio do filtro  $\mathcal{H}_\infty$ , que tenderá ao filtro  $\mathcal{H}_2$ . Mudanças abruptas fazem  $\|\Delta\mathbf{u}(k)\|$  aumentar. De acordo com (11), se  $\mu\|\Delta\mathbf{u}(k)\|^2/\|\mathbf{u}(k)\|^2 > \varepsilon$ , o valor do parâmetro  $\alpha(k)$  diminui, assim como o de  $\gamma(k)$ , dado por (10). Logo, o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  torna-se mais robusto. O intervalo de variação de  $\alpha(k)$  corresponde, via (10), ao intervalo predeterminado para  $\gamma(k)$ , isto é,  $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} \leq \gamma(k) \leq \gamma_{\mathcal{H}_2}$ . A Tabela I resume as equações do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  com parâmetro  $\gamma$  adaptativo.

TABELA I

 RESUMO DO EQUALIZADOR  $\mathcal{H}_\infty$  COM PARÂMETRO  $\gamma$  ADAPTATIVO.

$\mathbf{G}(k) = \mathbf{K}(k)\mathbf{u}(k) [\mathbf{I} + \mathbf{u}^H(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{u}(k)]^{-1}$
$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{G}(k) [d(k) - y(k)], \mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$
$\gamma(k) = \frac{\gamma_{\mathcal{H}_2} - \gamma_{\mathcal{H}_\infty}}{1 + e^{-\alpha(k)}} + \gamma_{\mathcal{H}_\infty}$
$\mathbf{\Omega}(k) = \mathbf{I} + (1 - \gamma^{-2}(k))\mathbf{u}(k)\mathbf{u}^H(k)\mathbf{K}(k)$
$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{K}(k)\mathbf{\Omega}^{-1}(k), \mathbf{K}(0) = \mathbf{\Pi}_0$
$\alpha(k+1) = \alpha(k) - \mu \frac{\ \Delta\mathbf{u}(k)\ ^2}{\ \mathbf{u}(k)\ ^2} + \varepsilon$

## IV. SIMULAÇÕES E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados resultados de simulações para a avaliação de desempenho dos equalizadores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , da combinação convexa  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  [12] e do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  proposto com  $\gamma$  adaptativo. Os equalizadores são submetidos a situações em que o modelo adotado, apresentado na Seção II, não é capaz de representar precisamente a dinâmica das variáveis envolvidas em razão de mudanças abruptas nas condições de transmissão.

O ambiente de simulação considerado é o de um sistema de comunicação sem fio TDMA (*Time Division Multiple Access*) com modulação BPSK (*Binary Phase Shift Keying*), em que a aleatoriedade do tempo de utilização do canal produz interferências assíncronas entre os usuários. O modelo de canal segue as especificações do GSM/EDGE (*Global System for Mobile Communications/Enhanced Data rates for GSM Evolution*) para ambientes tipicamente urbanos [15], com 5 multi-percursos descorrelacionados, espaçados do tempo de símbolo (3,692  $\mu\text{s}$ ). As diversidades espacial e temporal são exploradas no receptor com 2 antenas, cada uma equipada com um equalizador de 7 coeficientes.

Para facilitar a observação da resposta dos equalizadores às mudanças abruptas das condições de transmissão, um nível elevado de relação sinal-ruído, 40 dB, é considerado. Além disso, foram escolhidos dois intervalos de tempo específicos para a presença de interferências com diferentes intensidades:  $1000 \leq k \leq 4000$  com relação sinal-interferência (RSI) igual a 0 dB, e  $7000 \leq k \leq 8000$  com RSI = 20 dB. Cada realização da simulação corresponde à transmissão de uma seqüência de treinamento de 10000 símbolos. Os resultados apresentados a seguir são valores médios de 1000 realizações.

O equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma$  adaptativo é comparado aos equalizadores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e à combinação convexa  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . O equalizador  $\mathcal{H}_2$  tem seus coeficientes adaptados pelo algoritmo RLS com fator de esquecimento igual a 1, enquanto que o equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  considerado tem  $\gamma = 1$ . Estas são também as configurações dos filtros utilizados na combinação convexa  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . Por fim, o equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma$  adaptativo tem seu nível de atenuação da perturbação variando entre  $\gamma_{\mathcal{H}_\infty} = 1$  e  $\gamma_{\mathcal{H}_2} = 5$ .

A Figura 3 apresenta a evolução no tempo do erro quadrático médio (EQM) dos equalizadores mencionados. Em primeiro lugar, as curvas do EQM ilustram a complementaridade dos equalizadores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Em condições estáveis de transmissão, como para  $0 \leq k \leq 1000$  e também durante o regime estacionário até  $k = 4000$ , o equalizador  $\mathcal{H}_2$  apresenta o melhor desempenho em termos do EQM, enquanto que o conservadorismo do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  é exposto pelos níveis mais altos de EQM na ausência de mudanças abruptas. Por

outro lado, o equalizador  $\mathcal{H}_2$  sofre uma severa degradação de desempenho a partir do instante  $k = 4000$ , quando o desaparecimento da interferência causa uma perturbação importante. O equalizador  $\mathcal{H}_\infty$ , no entanto, reage bem a este evento, pois é menos sensível a perturbações. Todos os equalizadores considerados são menos sensíveis a esta perturbação do que o equalizador  $\mathcal{H}_2$ . A utilização de um fator de esquecimento menor que 1 para o equalizador  $\mathcal{H}_2$  atenua sua degradação de desempenho a partir de  $k = 4000$ , mas não o torna robusto como os demais equalizadores considerados, fato observado em [12]. Além disso, um fator de esquecimento menor que 1 aumenta os níveis do EQM em estado permanente.

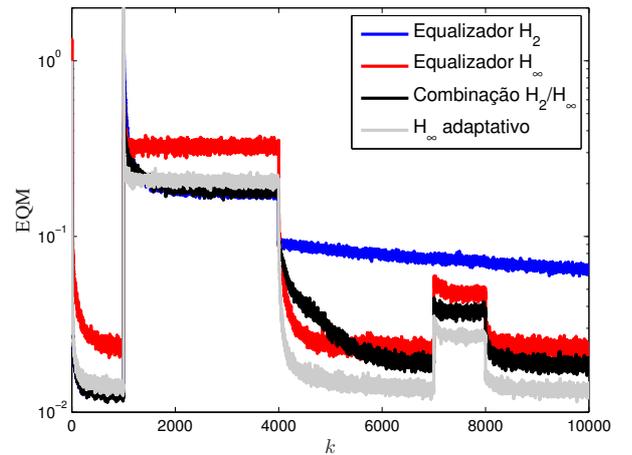


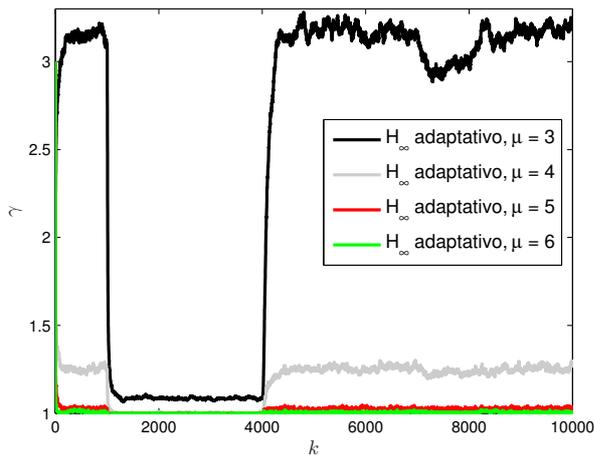
Fig. 3. Evolução temporal do EQM dos equalizadores espaço-temporais  $\mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_\infty$ , combinação convexa  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  e  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma$  adaptativo.

As curvas do EQM na Figura 3 também mostram que a combinação convexa  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  reúne as melhores propriedades de cada equalizador. Confirmando os estudos teóricos em [10] e estudos realizados para sistemas SISO em [12], o desempenho da combinação em termos do EQM em regime estacionário é igual ou melhor do que o desempenho individual do melhor dos dois filtros. Assim, bom desempenho médio e robustez são alcançados pela combinação  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

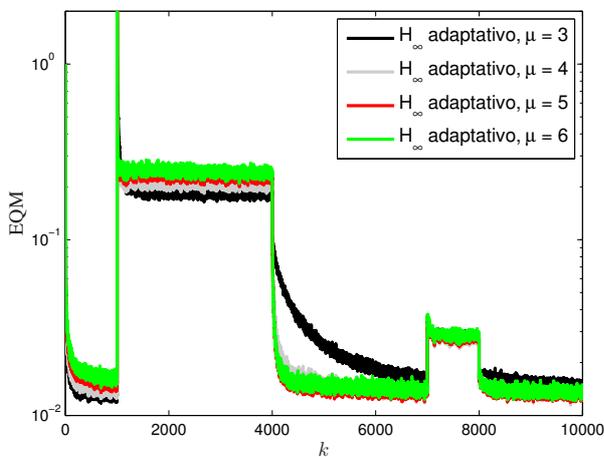
A proposta alternativa à combinação convexa dos dois filtros tem por base a relação entre o parâmetro  $\gamma$  do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  e o seu nível de robustez. Para  $\gamma = 1$ , o equalizador é robusto, no sentido de não amplificar o efeito das perturbações sobre o erro filtrado (ver Seção II-B). Ele converge rapidamente, mas seus níveis de EQM são em geral mais altos do que os do equalizador  $\mathcal{H}_2$ , como mostra a Figura 3. Valores mais baixos do EQM podem ser obtidos com o aumento de  $\gamma$ , mas ao custo da diminuição da robustez [3], [4]. Este compromisso entre desempenho médio e robustez, regulado pelo parâmetro  $\gamma$ , motivou o desenvolvimento do esquema apresentado na Seção III para a adaptação do nível de robustez do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  de acordo com as condições observadas no receptor. Como se observa na Figura 3, o EQM obtido pelo equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma$  adaptativo é similar ao do equalizador  $\mathcal{H}_2$  quando submetido a condições estáveis de transmissão, e mais baixo do que todos os equalizadores considerados a partir de  $k = 4.000$ , quando

ocorre uma perturbação significativa.

Como explicado na Seção III, a variação do nível de robustez do filtro  $\mathcal{H}_\infty$  é ditada por (10) e (11) e depende dos parâmetros  $\mu$  e  $\varepsilon$  em (11). Com o intuito de observar o comportamento do equalizador proposto, consideramos  $\varepsilon = 1$  e verificamos seu desempenho para diferentes valores de  $\mu$ . A Figura 4 mostra a evolução no tempo do nível de atenuação da perturbação,  $\gamma$ , e do EQM do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma$  adaptativo.



(a) Nível de atenuação da perturbação do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$ .



(b) Erro quadrático médio.

Fig. 4. Evolução temporal do nível de atenuação da perturbação e do EQM do equalizador espaço-temporal  $\mathcal{H}_\infty$  com  $\gamma$  adaptativo para diferentes valores do fator de passo  $\mu$  em (11).

As curvas mostradas nas Figuras 4(a) e 4(b) para  $\mu = 3, 4, 5, 6$  são coerentes com as equações (10) e (11) e com o objetivo de associação entre desempenho médio e robustez. Para qualquer valor de  $\mu$ , variações intensas na energia do sinal de entrada do receptor são interpretadas como indícios de perturbações sobre os sinais transmitidos. Neste caso, o valor de  $\gamma$  diminui e o equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  assume uma configuração mais robusta.  $\mu$  determina o intervalo de valores ao alcance do parâmetro  $\gamma$ , e por conseqüência, a flexibilidade de atuação do equalizador  $\mathcal{H}_\infty$  entre configurações mais robustas ou mais

próximas do equalizador  $\mathcal{H}_2$ .

Portanto, pelo menos para perturbações causadas por interferências assíncronas, o mecanismo apresentado na Seção III, equações (10) e (11), para inferir a necessidade de robustez com base na variação de energia do sinal de entrada do equalizador se mostra eficaz. Dessa forma, a combinação entre desempenho médio e robustez no contexto da equalização espaço-temporal adaptativa é realizada com a utilização de apenas um filtro  $\mathcal{H}_\infty$ .

## V. CONCLUSÕES

A complementaridade da filtragem  $\mathcal{H}_2$  e da filtragem  $\mathcal{H}_\infty$ , respectivamente caracterizadas pela otimalidade do desempenho médio e pela robustez, motiva a combinação de suas melhores propriedades. Neste trabalho, nós propomos uma alternativa à combinação convexa dos filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para a reunião de tais propriedades. O filtro  $\mathcal{H}_\infty$  com nível de atenuação da perturbação adaptativo permite desde uma operação robusta até uma operação que se aproxima daquela do filtro  $\mathcal{H}_2$ . Os resultados de simulação apresentados indicam que o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  proposto tem desempenho, em termos do erro quadrático médio, melhor do que o da combinação convexa dos filtros  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] A. J. Paulraj e C. B. Papadias, "Space-time processing for wireless communications," *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 14, no. 6, pags. 49–83, Nov. 1997.
- [2] A. H. Sayed e T. Kailath, "A state space approach to adaptive RLS filtering," *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 11, no. 3, pags. 18–60, Jul. 1994.
- [3] B. Hassibi, A. H. Sayed e T. Kailath, *Indefinite-Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to  $H_2$  and  $H_\infty$  Theories*. SIAM, 1999.
- [4] D. Simon, *Optimal State Estimation*. John Wiley & Sons, 2006.
- [5] U. Shaked e Y. Theodor, " $H_\infty$ -optimal estimation: A tutorial," em *IEEE Conference on Decision and Control*, v. 2, Dez. 1992, pags. 2278–2286.
- [6] A. M. Kuzminskiy e P. Strauch, "Space-time filtering with suppression of asynchronous co-channel interference," em *IEEE Symposium on Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control*, Out. 2000, pags. 385–389.
- [7] F. de S. Chaves, A. L. F. de Almeida e J. C. M. Mota, "Performance evaluation of adaptive  $H_\infty$  space-time equalizers for wireless communication systems with asynchronous interference," em *IEEE VI International Telecommunications Symposium*, Set. 2006, pags. 1–6.
- [8] P. P. Khargonekar, M. A. Rotea e E. Baeyens, "Mixed  $H_2/H_\infty$  filtering," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 6, no. 4, pags. 313–330, Maio 1996.
- [9] R. M. Palhares e P. L. D. Peres, "LMI approach to the mixed  $H_2/H_\infty$  filtering design for discrete-time uncertain systems," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, v. 37, no. 1, pags. 292–296, Jan. 2001.
- [10] J. Arenas-García, A. R. Figueiras-Vidal e A. H. Sayed, "Mean-square performance of a convex combination of two adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 54, no. 3, pags. 1078–1090, Mar. 2006.
- [11] R. Candido, M. T. M. Silva e V. H. Nascimento, "Transient and steady-state analysis of the affine combination of two adaptive filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 58, no. 8, pags. 4064–4078, Ago. 2010.
- [12] F. de S. Chaves, J. M. T. Romano e J. C. M. Mota, "Combinação convexa de filtros  $H_2$  e  $H_\infty$  para equalização adaptativa," em *XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Set. 2008, pags. 1–6.
- [13] F. de S. Chaves, "Controle de potência oportunista e equalização robusta em redes de comunicação sem fio: enfoques via controle automático e teoria dos jogos," Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Dez. 2010.
- [14] B. Hassibi e T. Kailath, " $H_\infty$  bounds for least-squares estimators," *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 46, no. 2, pags. 309–314, 2001.
- [15] 3GPP, "Digital cellular telecommunications system (phase 2+): Radio transmission and reception," 3rd Generation Partnership Project (3GPP), Technical Report TS 45005, Jul. 2001.