

Desempenho de Códigos de Bloco em Canais Markovianos de Estados Finito Ternários

Igor Moreira e Cecilio Pimentel

Resumo— Este trabalho propõe uma técnica enumerativa para avaliar analiticamente o desempenho de um código de bloco linear em um canal de estados finitos Markoviano não binário, denominado de modelo com apagamento (MA). Será desenvolvida uma expressão de recorrência para o cálculo da probabilidade de uma decodificação sem sucesso. A expressão obtida será estendida a fim de englobar os casos em que um entrelaçamento finito é incorporado ao sistema de comunicações.

Palavras-Chave— canais de estados finitos, desvanecimento códigos de bloco, entrelaçamento, probabilidade de erro.

Abstract— This paper proposes an enumerative technique to evaluate analytically the performance of a linear block code over non-binary finite-state Markov channel (FSMC) model, called model with erasure (MA). It will be developed a recurrence expression for calculating the probability of unsuccessful decoding. This derivation will be extended to include the case in which a finite interleaving is incorporated into the communications system.

Keywords— finite-state channel, fading, block codes, interleaving, error probability.

I. INTRODUÇÃO

Um canal de estados finitos Markoviano (FSMC, do inglês *finite-state Markov channel*) é um canal discreto que possui um conjunto finito de estados, com transição de estados descrita por uma cadeia de Markov, a qual tem probabilidades de transição atribuídas de forma independente do tempo. Canais FSMC têm sido usados para modelar sistemas de comunicações binários (entrada binária, saída binária) [1]–[5].

Em [6] foi proposto um modelo FSMC para modelar canais com desvanecimento correlacionado no tempo e decisão suave (entrada binária, saída ternária), denominado de modelo com apagamento (MA). Desta forma, o decodificador irá rotular os símbolos recebidos pouco confiáveis por um símbolo de apagamento, resultando em uma atuação mais eficiente do código corretor de erro.

Neste trabalho, analisa-se o desempenho de um código de bloco binário, linear, de parâmetros (n, k) e distância de Hamming mínima d_{min} quando o ruído é modelado como um canal MA. A técnica enumerativa desenvolvida em [7] será generalizada para desenvolver uma fórmula de recorrência para a probabilidade de uma decodificação sem sucesso. Esta fórmula será estendida a fim de englobar também os casos em que um entrelaçamento finito, com nível de entrelaçamento I_d , é incorporado ao sistema de comunicações, sendo possível

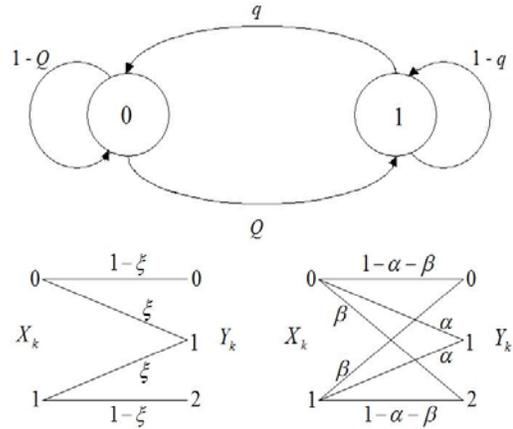


Fig. 1. Modelo com apagamento para canais com memória.

a avaliação de desempenho do canal discreto com o uso de códigos de bloco para correção de erros e apagamentos e entrelaçamento finito. Resultados numéricos ilustram o compromisso entre a distância mínima e o nível de entrelaçamento para se obter um determinado desempenho.

II. MODELO COM APAGAMENTO

O canal MA é um FSMC não-binário com três níveis de quantização. As sequências de variáveis aleatórias na entrada e saída do canal são denotadas, respectivamente, por $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $X_k \in \{0, 1\}$ e $Y_k \in \{0, 1, 2\}$. As distorções e interferências causadas pelo canal são representadas pela sequência de ruído ternária $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $Z_k \in \{0, 1, 2\}$. É dito que ocorreu um erro na recepção, no k -ésimo intervalo, se $Z_k = 2$, um apagamento se $Z_k = 1$, ou a recepção foi correta se $Z_k = 0$.

A Figura 1 mostra o diagrama de estados do canal MA. Este consiste de uma cadeia de Markov com dois estados. Quando a cadeia se encontra no estado 0 (denominado de estado bom), a probabilidade de apagamento é ξ . Quando a cadeia se encontra no estado 1 (denominado de estado ruim), poderá ocorrer um erro com probabilidade β ou um apagamento com probabilidade α . A probabilidade de transição do estado 0 para o estado 1 é dada por Q , e a probabilidade de transição do estado 1 para o estado 0 é dada por q .

A probabilidade de ocorrer uma sequência de ruído $\mathbf{z}_n = (z_1 \dots z_n)$, de comprimento n , é escrita na forma matricial. Seja $\mathbf{P}(z_k)$, $z_k \in \{0, 1, 2\}$, uma matriz $N \times N$, cujos (i, j) -ésimo elemento é a probabilidade da cadeia transicionar do

Igor Moreira, Agência Nacional de Telecomunicações, Brasília-DF, email: igormoura@anatel.gov.br. Cecilio Pimentel, CODEC/DES/UFPE, Recife-PE, email: cecilio@ufpe.br.

Este trabalho recebeu suporte do CNPq.

estado i para o estado j e gerar um dígito de ruído z_k . Escreva-se $P(\mathbf{z}_n)$ da seguinte forma:

$$P(\mathbf{z}_n) = \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=1}^n \mathbf{P}(z_k) \right) \mathbf{1}$$

onde $\mathbf{\Pi}^T = [\pi_0 \pi_1 \dots \pi_{N-1}]$ é o vetor de distribuição do estado inicial, na qual o sobrescrito $[\cdot]^T$ indica a transposta da matriz, e $\mathbf{1}$ é um vetor coluna com todos os elementos iguais a um. O canal MA é especificado pelas matrizes $\mathbf{P}(0)$, $\mathbf{P}(1)$ e $\mathbf{P}(2)$, dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} (1-Q)(1-\xi) & Q(1-\alpha-\beta) \\ q(1-\xi) & (1-q)(1-\alpha-\beta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(1) = \begin{bmatrix} (1-Q)\xi & Q\alpha \\ q\xi & (1-q)\alpha \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{P}(2) = \begin{bmatrix} 0 & Q\beta \\ 0 & (1-q)\beta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

A matriz de probabilidade de transição da cadeia de Markov é dada por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) + \mathbf{P}(2) = \begin{bmatrix} (1-Q) & Q \\ q & (1-q) \end{bmatrix}.$$

O vetor de probabilidade estacionária dos estados é:

$$\mathbf{\Pi} = [\pi_0 \ \pi_1]^T = \left[\frac{q}{Q+q} \quad \frac{Q}{Q+q} \right]^T.$$

O MA possui cinco parâmetros (α , β , ξ , q e Q). Este modelo foi usado em [6] modelar um sistema de comunicações composto por um modulador BPSK, um canal com desvanecimento Rayleigh correlacionado no tempo com função autocorrelação com decaimento exponencial, um demodulador coerente e um quantizador com três níveis de quantização. Esse sistema foi denominado canal discreto com correlação exponencial (CDCE), e é descrito por três parâmetros: a relação sinal ruído E_s/N_0 , a banda Doppler normalizada $B_d T$ e o passo do quantizador δ . A Tabela I ilustra os parâmetros do modelo MA que aproxima um CDCE especificado pela tripla $(E_s/N_0, B_d T, \delta)$ [6].

A análise de desempenho de códigos de blocos em um canal MA será realizada na próxima seção.

III. ANÁLISE DE DESEMPENHO

O diagrama de blocos de um sistema codificado é mostrado na Figura 2. Seja $\mathbf{u} = (u_1 u_2 \dots u_k)$ uma sequência de k dígitos binários de informação que é a entrada de um codificador de bloco binário, linear, de parâmetros (n, k) e distância de Hamming mínima d_{min} . A saída do codificador é uma palavra-código binária $\mathbf{v} = (v_1 v_2 \dots v_n)$. Os efeitos indesejados da propagação são modelados como uma sequência ternária de ruídos $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \dots z_n)$, modelada estatisticamente pelo MA que, por sua vez, produz a sequência $\mathbf{r} = (r_1 r_2 \dots r_n)$ na entrada do decodificador. A sequência de ruídos é tal que $r_i = 2v_i + (-1)^{v_i} z_i$, ou seja,

$$r_i = \begin{cases} z_i, & \text{se } v_i = 0 \\ 2 - z_i, & \text{se } v_i = 1. \end{cases}$$

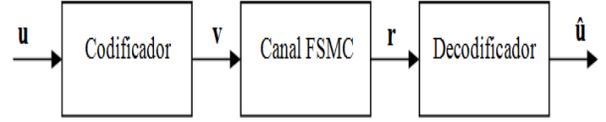


Fig. 2. Sistema de comunicações codificado.

Se $z_i = 1$, um apagamento ocorrerá na saída ($r_i = 1$) independentemente de v_i . Um erro ocorrerá quando $z_i = 2$, ou seja, $v_i = 0$ e $r_i = 2$ ou $v_i = 1$ e $r_i = 0$. A transmissão será correta se $z_i = 0$, ou seja, $v_i = 0$ e $r_i = 0$ ou $v_i = 1$ e $r_i = 2$. Seja e o número de erros em \mathbf{r} e a a quantidade de apagamentos em \mathbf{r} . Se $2e + a + 1 \leq d_{min}$, o padrão de ruídos é corrigível pelo código, o que implica $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$. A probabilidade de uma decodificação correta, $P(c)$, é dada por:

$$P(c) = P(\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}) = P(2e + a + 1 \leq d_{min}).$$

Porém, se $2e + a + 1 > d_{min}$, duas situações podem ocorrer: falha na decodificação, o que irá gerar um apagamento, ou erro de decodificação. Estes dois eventos serão considerados como decodificação sem sucesso. Assim, a probabilidade de uma decodificação sem sucesso, denominada de PCE, é [8]:

$$\text{PCE} = 1 - P(c).$$

Define-se $P(m, k, n)$ como a probabilidade de ocorrerem m erros e k apagamentos na sequência \mathbf{r} de comprimento n , ou seja, $P(m, k, n)$ é igual a probabilidade da sequência $\mathbf{z} = (z_1 z_2 \dots z_n)$ ter m posições iguais a 2 e k posições iguais a 1. Assim, $P(c)$ é a probabilidade de ocorrerem m dígitos incorretos e k apagamentos, de modo que $2m + k + 1 \leq d_{min}$, em uma palavra de comprimento n recebida pelo decodificador. Então

$$P(c) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n P(m, k, n)$$

onde $2m + k + 1 \leq d_{min}$. Portanto, para que seja possível analisar o desempenho de um sistema de comunicações codificado, deve-se calcular $P(m, k, n)$. Seja \mathcal{R} o corpo dos números reais. Define-se $\mathcal{R} < x_0, x_1, x_2 >$ como o conjunto de todas as somas finitas de produtos não comutativos de x_0, x_1 e x_2 , com coeficientes tomados de \mathcal{R} . Seja ζ_n um conjunto arbitrário de sequências de ruído ternária de comprimento n . Define-se uma série geradora para ζ_n da seguinte forma:

$$F_{\zeta_n} = \sum_{z_n \in \zeta_n} x_{z_1} x_{z_2} \dots x_{z_n} \in \mathcal{R} < x_0, x_1, x_2 >$$

onde $x_{z_i} \in \{x_0, x_1, x_2\}$, e os indeterminantes x_0, x_1 e x_2 marcam um dígito de ruído igual a 0, 1 ou 2, respectivamente, em cada sequência pertencente a ζ_n . Denota-se $\zeta_n^{m,k}$ o conjunto de todas as sequências de comprimento n com m erros e k apagamentos. Então, $P(m, k, n) = P(\zeta_n^{m,k})$.

A probabilidade de um conjunto arbitrário de sequências de comprimento n , ζ_n , pode ser expressa na forma [7]:

$$P(\zeta_n) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\zeta_n}) \mathbf{1}. \quad (4)$$

TABELA I
VALORES DOS PARÂMETROS DO MA QUE MODELAM UM CDCE.

Parâmetros do CDCE	α	β	ξ	q	Q
$E_s/N_0 = 0$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,45$	0,3817	0,1001	0,1051	0,0866	0,1003
$E_s/N_0 = 2$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,35$	0,3554	0,0901	0,0701	0,1024	0,0795
$E_s/N_0 = 5$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,25$	0,3374	0,0751	0,0351	0,1711	0,0717
$E_s/N_0 = 8$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,20$	0,3247	0,0501	0,0201	0,1915	0,0488
$E_s/N_0 = 10$ dB, $B_dT = 0,01$, $\delta = 0,15$	0,4430	0,0151	0,0151	0,2580	0,0580

A fim de enumerar o conjunto $\zeta_n^{m,k}$, define-se $\mathcal{R}[[s, w, z]]$ o anel de todas as séries de potências com indeterminantes comutativos s, w e z , e coeficientes tomados de \mathcal{R} . Seja $H(s, w, z)$ uma série geradora definida da seguinte forma:

$$H(s, w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n P(m, k, n) s^m w^k z^n \in \mathcal{R}[[s, w, z]]$$

em que s, w e z são indeterminantes comutativos que marcam, respectivamente, a quantidade de erros, a quantidade de apagamentos e o comprimento de uma sequência de ruído. Define-se $[s^m w^k z^n]$ um operador tal que $[s^m w^k z^n]H(s, w, z)$ é o coeficiente do termo $s^m w^k z^n$ na série de potências $H(s, w, z)$, ou seja, $P(m, k, n)$. Assim,

$$P(m, k, n) = [s^m w^k z^n]H(s, w, z). \quad (5)$$

Define-se ζ^* como o conjunto de todas as sequências ternárias de qualquer comprimento, incluindo a sequência vazia, isto é, $\zeta^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \zeta_n^*$. A série geradora F_{ζ^*} é:

$$F_{\zeta^*} = \sum_{i=0}^{\infty} (x_0 + x_1 + x_2)^i = (1 - (x_0 + x_1 + x_2))^{-1}.$$

Com o objetivo de enumerar a quantidade de erros e apagamentos e o comprimento de cada sequência em F_{ζ^*} e, considerando-se os indeterminantes s, w e z definidos anteriormente, define-se a seguinte série geradora:

$$F(x_0, x_1, x_2, s, w, z) = (1 - (z(x_0 + wx_1 + sx_2)))^{-1}. \quad (6)$$

É possível calcular $H(s, w, z)$ substituindo-se, em (6), x_{z_i} por $\mathbf{P}(z_i)$ e multiplicando-se a matriz resultante pelo vetor linha $\mathbf{\Pi}^T$ à esquerda e pelo vetor $\mathbf{1}$ à direita [7]

$$H(s, w, z) = \mathbf{\Pi}^T \{\mathbf{I} - z\mathbf{P}(0) - zw\mathbf{P}(1) - zs\mathbf{P}(2)\}^{-1} \mathbf{1}. \quad (7)$$

A partir de (7) encontra-se a seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{aligned} P(m, k, n) &= -c_1 P(m, k, n-1) - c_2 P(m-1, k, n-1) \\ &\quad - c_3 P(m, k-1, n-1) - c_4 P(m, k, n-2) \\ &\quad - c_5 P(m-1, k, n-2) - c_6 P(m, k-1, n-2) \\ &\quad - c_7 P(m-1, k-1, n-2) - c_8 P(m, k-2, n-2) \end{aligned} \quad (8)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} P(m, k, n) &= 0 \text{ para } m, n, k < 0, m+k > n \\ P(0, 0, 0) &= 1 \\ P(0, 0, 1) &= c_{1p} - c_1 = Q(1 + Q\xi - \alpha) + q(1 - \beta - \xi) \\ P(1, 0, 1) &= c_{2p} - c_2 = -2q^2\beta + Q\beta \\ P(0, 1, 1) &= c_{3p} - c_3 = Q\alpha + q\xi, \end{aligned}$$

A série $H(s, w, z)$ é uma razão de dois polinômios em s, w e z , escrita na forma

$$\begin{aligned} H(s, w, z) &= \frac{c_{0p} + c_{1p}z + c_{2p}zs + c_{3p}zw}{1 + c_1z + c_2zs + c_3zw + c_4z^2 + c_5z^2s + c_6z^2w + c_7z^2ws + c_8z^2w^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^n P(m, k, n) s^m w^k z^n \end{aligned} \quad (9)$$

em que

$$\begin{aligned} c_1 &= -Q\xi - 2 + \alpha + \beta + q + \xi + Q - q\alpha - q\beta \\ c_2 &= q\beta - \beta \\ c_3 &= q\alpha + Q\xi - \xi - \alpha \\ c_4 &= Q\alpha + q\alpha + \xi\beta - q\xi\alpha - q\xi\beta - Q\xi\alpha - Q\xi\beta - \alpha - \beta \\ &\quad - \xi - q - Q + Q\beta + Q\xi + Q\alpha + q\beta + q\xi + 1 \\ c_5 &= \beta - q\beta - \xi\beta - Q\beta + q\xi\beta + Q\xi\beta \\ c_6 &= \alpha - q\alpha - 2\xi\alpha - Q\alpha - \xi\beta - q\xi - Q\xi + \xi + 2q\alpha\xi \\ &\quad + 2Q\alpha\xi + q\xi\beta + Q\xi\beta \\ c_7 &= \xi\beta - q\xi\beta - Q\xi\beta \\ c_8 &= \xi\alpha - q\xi\alpha - Q\xi\alpha, \\ c_{0p} &= 1 \\ c_{1p} &= \frac{(Q^2 - q^2\beta - q^2\alpha + Q\xi + 2qQ - qQ\xi)}{Q + q} \\ &\quad \frac{-qQ\alpha + q^2 - q - Q + q\alpha - qQ\beta}{Q + q} \\ c_{2p} &= \frac{-q\beta + q^2\beta + qQ\beta}{Q + q} \\ c_{3p} &= \frac{-q\alpha - Q\xi + q^2\alpha + Q^2\xi + qQ\xi + qQ\alpha}{Q + q}. \end{aligned}$$

IV. CANAIS COM ENTRALAJAMENTO

O diagrama de blocos de um sistema codificado com entrelaçamento finito é mostrado na Figura 3. Seja $\mathbf{u} = (u_1 u_2 \dots u_j)$ uma sequência de j dígitos binários de informação que é a entrada de um codificador de bloco binário de parâmetros (n, j) e distância de Hamming mínima d_{min} . A saída do codificador é uma palavra-código binária $\mathbf{v} = (v_1 v_2 \dots v_n)$ a qual, após passar pelo entrelaçador com nível de entrelaçamento I_d , é representada por $\bar{\mathbf{v}}$. Os efeitos indesejados da propagação são modelados como uma sequência ternária de ruídos $\mathbf{z}_n = (z_i z_{i+1} \dots z_{i+n-1})$, de comprimento n , produzida pelo canal. A sequência $\bar{\mathbf{r}} = (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \dots \bar{r}_n)$ chega na entrada do desentrelaçador, no qual a sequência de ruído em cada linha será separada de I_d posições, ou seja, $\bar{\mathbf{z}}_n = (\bar{z}_i \bar{z}_{i+1} \dots \bar{z}_{i+n-1}) = (z_i z_{i+I_d} \dots z_{i+(n-1)I_d})$. Em

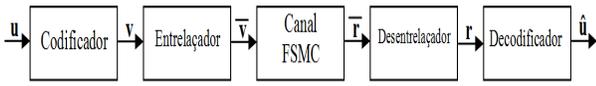


Fig. 3. Sistema de comunicações com entrelaçamento.

seguida, a sequência \mathbf{r} entra no decodificador e, finalmente, obtém-se $\hat{\mathbf{u}}$ na saída do sistema. Dada uma sequência $\overline{\mathbf{z}}_n$ específica, define-se um conjunto \mathcal{X}_n^i formado pela inserção do conjunto $\zeta_{I_d-1}^*$ entre cada dígito da sequência $\overline{\mathbf{z}}_n$, ou seja, $\mathcal{X}_n^i = \{\zeta_{I_d-1}^* z_i \zeta_{I_d-1}^* z_{i+I_d} \dots \zeta_{I_d-1}^* z_{i+(n-1)I_d}\}$. É importante salientar que o primeiro conjunto $\zeta_{I_d-1}^*$ foi incluído por conveniência. Deve ser notado que a probabilidade de ocorrência da sequência $\overline{\mathbf{z}}_n$ é igual à probabilidade de ocorrência do conjunto \mathcal{X}_n^i , isto é:

$$P(\overline{z_i z_{i+1} \dots z_{i+n-1}}) = P(z_i z_{i+I_d} \dots z_{i+(n-1)I_d}) = P(\mathcal{X}_n^i).$$

Define-se uma série geradora para o conjunto \mathcal{X}_n^i :

$$F_{\mathcal{X}_n^i} = F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_{z_i} F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_{z_{i+I_d}} \dots F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_{z_{i+(n-1)I_d}}$$

onde $F_{\zeta_{I_d-1}^*} = (x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1}$ é a série geradora do conjunto $\zeta_{I_d-1}^*$. A probabilidade da sequência \mathbf{z}_i é dada por:

$$\begin{aligned} P(z_i z_{i+I_d} \dots z_{i+(n-1)I_d}) &= \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^i}) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=0}^{n-1} \Delta(x_0 + x_1 + x_2) x_{z_{i+kI_d}} \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=0}^{n-1} \{\mathbf{P}(0) + \mathbf{P}(1) + \mathbf{P}(2)\}^{I_d-1} \mathbf{P}_{(z_{i+kI_d})} \right) \mathbf{1} \\ &= \mathbf{\Pi}^T \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}^{I_d-1} \mathbf{P}_{(z_{i+kI_d})} \right) \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Em seguida, será determinada a probabilidade do MA entrelaçado, com nível de entrelaçamento I_d , gerar m dígitos errados e k dígitos de apagamento em uma palavra recebida de comprimento n em cada linha do entrelaçador, denotada por $P^{I_d}(m, k, n)$. Seja o conjunto $\mathcal{X}_n^{m,k}$ a união de todos os conjuntos $\mathcal{X}_n^{i,j}$, no qual a sequência \mathbf{z}'_n possui m erros e k apagamentos. Portanto, observa-se que $P^{I_d}(m, k, n) = P(\mathcal{X}_n^{m,k})$. Assim, é possível determinar-se $P^{I_d}(m, k, n)$ calculando-se inicialmente uma expressão para a série geradora de $\mathcal{X}_n^{m,k}$ e utilizando-se a mesma idéia contida em (4), isto é:

$$P^{I_d}(m, k, n) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^{m,k}}) \mathbf{1}. \quad (10)$$

Define-se o conjunto \mathcal{X}^* como a união de todos os conjuntos \mathcal{X}_n^* para todas as sequências produzidas pelo canal entrelaçado. A série geradora para \mathcal{X}_n^* é:

$$F_{\mathcal{X}_n^*} = \left(F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_2 \right)^n.$$

Considerando-se \mathcal{X}^* como a união de todos os conjuntos \mathcal{X}_n^* para todos os valores de n , isto é, $\mathcal{X}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}_n^*$, então a

série geradora de \mathcal{X}^* é dada por:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{X}^*} &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{\mathcal{X}_n^*} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 + F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_2 \right)^n \\ &= \left(1 - ((x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_0 \right. \\ &\quad \left. + (x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_1 + (x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_2) \right)^{-1} \\ &\in \mathcal{R} \ll \langle x_0, x_1, x_2 \rangle \gg. \end{aligned}$$

Utilizando os indeterminantes s, w e z para enumerar a quantidade de erros, apagamentos e o comprimento de cada sequência em $F_{\mathcal{X}^*}$, respectivamente, define-se a seguinte série geradora:

$$\begin{aligned} F^{I_d}(x_0, x_1, x_2, s, w, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} z^i \left(F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_0 + w F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_1 + s F_{\zeta_{I_d-1}^*} x_2 \right)^i \\ &= \left(1 - z((x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_0 + w(x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_1 \right. \\ &\quad \left. + s(x_0 + x_1 + x_2)^{I_d-1} x_2) \right)^{-1} \in \mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle [[s, w, z]]. \end{aligned}$$

Desta forma, é possível observar a seguinte relação:

$$F_{\mathcal{X}_n^{m,k}} = [s^m w^k z^n] F^{I_d}(x_0, x_1, x_2, s, w, z) \in \mathcal{R} \langle x_0, x_1, x_2 \rangle. \quad (11)$$

Portanto, $F_{\mathcal{X}_n^{m,k}}$ enumera as sequências de erros produzidos pelo canal entrelaçado com m erros, k apagamentos e comprimento n . Utilizando-se (10) e (11), obtém-se:

$$\begin{aligned} P^{I_d}(m, k, n) &= P(\mathcal{X}_n^{m,k}) = \mathbf{\Pi}^T (\Delta F_{\mathcal{X}_n^{m,k}}) \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T (\Delta F^{I_d}(x_0, x_1, x_2, s, w, z)) \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T \left(\mathbf{I} - z \mathbf{P}^{I_d-1} \{ \mathbf{P}(0) + w \mathbf{P}(1) + s \mathbf{P}(2) \} \right)^{-1} \mathbf{1} \\ &= [s^m w^k z^n] \mathbf{\Pi}^T \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}^{I_d-1} \{ z \mathbf{P}(0) + z w \mathbf{P}(1) + z s \mathbf{P}(2) \} \right)^{-1} \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Usando os mesmos procedimentos da Seção III, é possível obter-se uma fórmula recursiva para $P^{I_d}(m, k, n)$, dada por:

$$\begin{aligned} P^{I_d}(m, k, n) &= b_1 P^{I_d}(m, k, n-1) + b_2 P^{I_d}(m-1, k, n-1) \\ &\quad + b_3 P^{I_d}(m, k-1, n-1) \\ &\quad + b_5 P^{I_d}(m-1, k, n-2) + b_6 P^{I_d}(m, k-1, n-2) \\ &\quad + b_7 P^{I_d}(m-1, k-1, n-2) + b_8 P^{I_d}(m, k-2, n-2) \end{aligned} \quad (12)$$

para $n \geq 2$, $0 \leq m+k \leq n$, onde

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{(1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} (-q^2 - Q^2 - q\alpha - q\beta_q^2 \alpha + q^2 \beta + Qq\alpha + Qq\beta \\ &\quad + q + Q - Q\xi + Q^2 \xi - 2qQ + qQ\xi) - \frac{q+Q - Q\beta - Q\alpha - q\xi}{q+Q} \\ b_2 &= -\frac{Q\beta + (-Qq\beta + q\beta - q^2 \beta) (1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \\ b_3 &= -\frac{Q\alpha + q\xi}{q+Q} \\ &\quad + \frac{(-\alpha q Q - \alpha q^2 + \alpha q + \xi Q - \xi Q^2 - qQ\xi) (1-q-Q)^{I_d-1}}{q+Q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_4 &= -\frac{(-Q - q^2\alpha - q^2\beta - q^2\xi - Q^2\beta - Q^2\alpha - Q^2\xi + 2qQ + q\alpha)}{q + Q} \\
 &\quad + \frac{+q\beta + q\xi + Q\beta + Q\alpha + Q\xi - q + q^2 + Q^2 + q^2\xi\alpha + q^2\xi\beta}{q + Q} \\
 &\quad - \frac{-Q\xi\beta - Q\xi\alpha + Q^2\xi\beta + Q^2\xi\alpha + 2qQ\beta\xi - 2qQ\alpha}{q + Q} \\
 &\quad - \frac{-2qQ\beta + 2qQ\alpha\xi - 2qQ\xi - q\beta\xi - q\alpha\xi}{q + Q} (1 - q - Q)^{I_d - 1} \\
 b_5 &= -\frac{(q\beta\xi + q^2\beta + Q^2\beta - q^2\xi\beta - Q^2\xi\beta + 2qQ\beta - 2qQ\beta\xi)}{q + Q} \\
 &\quad - \frac{-q\beta - Q\beta + Q\xi\beta}{q + Q} (1 - q - Q)^{I_d - 1} \\
 b_6 &= -\frac{(q^2\alpha - 2q^2\xi\alpha + Q^2\alpha - 2Q^2\xi\alpha + q^2\xi - q^2\xi\beta - Q^2\xi\beta + Q^2\xi)}{q + Q} \\
 &\quad + \frac{+2qQ\xi - 2qQ\xi\beta - 4qQ\alpha\xi + 2qQ\alpha - q\xi + q\beta\xi + q\alpha\xi}{q + Q} \\
 &\quad - \frac{-q\alpha + 2Q\xi\alpha - Q\alpha - Q\xi\beta - Q\xi}{q + Q} (1 - q - Q)^{I_d - 1} \\
 b_7 &= -\frac{(2qQ\beta\xi - q\beta\xi - Q\beta\xi + Q^2\beta\xi + q^2\beta\xi)}{q + Q} (1 - q - Q)^{I_d - 1} \\
 b_8 &= -\frac{(q^2\xi\alpha + \xi\alpha q^2 + 2qQ\alpha\xi - q\alpha\xi - Q\alpha\xi)}{q + Q} (1 - q - Q)^{I_d - 1}
 \end{aligned}$$

com as mesmas condições iniciais dadas em (9). É possível perceber que fazendo-se $I_d = 1$ em (12), isto é, sem utilização do entrelaçamento, chega-se a (8). Deve ser dito que o canal entrelaçado, que engloba o entrelaçador, o MA e o desentrelaçador, corresponde a um novo modelo de canal de estado finito, cuja matriz de transição da cadeia de Markov é \mathbf{P}^{I_d} [7]. A Figura 4 ilustra a variação da PCE em função da

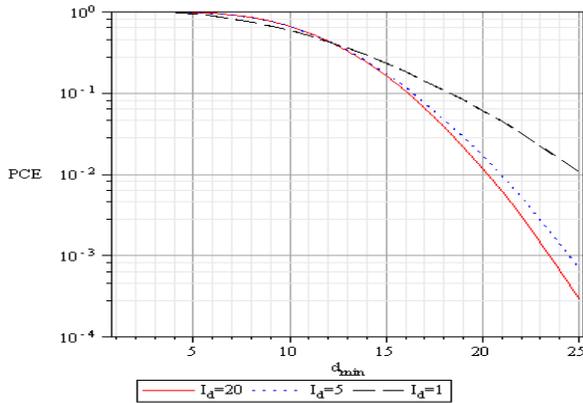


Fig. 4. PCE versus d_{min} tendo I_d como parâmetro para o canal MA que modela um CDCE com parâmetros $E_s/N_0 = 5$ dB, $B_d T = 0,01$ e $\delta = 0,25$, com um código de bloco de comprimento $n = 63$.

distância mínima de um código de bloco de comprimento $n = 63$, tendo I_d como parâmetro, para $E_s/N_0 = 5$ dB. Valores combinados de d_{min} e I_d podem ser escolhidos para obter-se um certo desempenho. É possível observar, na Figura 5, que para $I_d \geq 20$ o canal se comporta como um canal sem

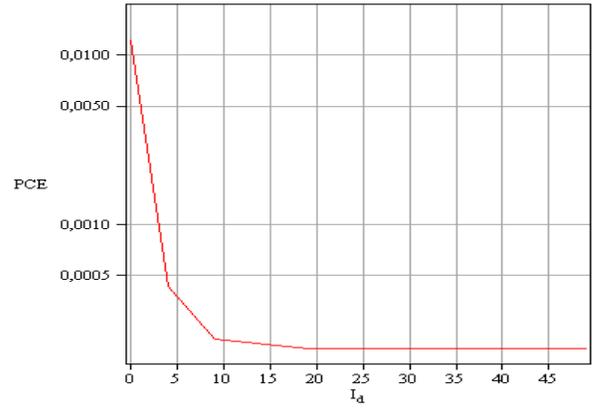


Fig. 5. PCE versus I_d para um MA que modela um CDCE com parâmetros $E_s/N_0 = 10$ dB, $B_d T = 0,01$ e $\delta = 0,15$. Código de bloco de comprimento $n = 63$ e $d_{min} = 17$.

memória. Em outras palavras, valores de $I_d > 20$ introduzem um maior atraso e requerem mais processamento do sistema sem nenhum ganho considerável de desempenho. Desta forma, é possível avaliar o compromisso entre a distância mínima do código e o valor do nível de entrelaçamento para se obter um certo desempenho.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi desenvolvida uma expressão de recorrência para o cálculo da probabilidade da decodificação sem sucesso, ou seja, a probabilidade do canal MA gerar m erros e k apagamentos numa sequência de comprimento n . Em complemento a essa investigação, foi obtida uma expressão para avaliar o comportamento do canal com o uso do entrelaçamento finito. A metodologia desenvolvida permite avaliar a perda de desempenho quando utiliza-se nível de entrelaçamento finito em relação ao caso de entrelaçamento ideal, bem como projetar o valor mínimo de I_d que torna o canal sem memória.

REFERÊNCIAS

- [1] F. Babich, O. Kelly, and G. Lombardi, "Generalized Markov modeling for flat fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, pp. 547–551, Apr. 2000.
- [2] H. Turin and R. van Nobelen, "Hidden Markov modeling of flat fading channels," *IEEE J. Select Areas Commun.*, vol. 16, pp. 1809–1817, Dec. 1998.
- [3] W. Kumwilaisak, C. Kuo, and D. Wu, "Fading channel modeling via variable-length Markov chain technique," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 1338–1358, May 2008.
- [4] C. Pimentel, T. H. Falk, and L. Lisbôa, "Finite-state markov modeling of correlated rician fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, no. 5, pp. 1491–1501, Sep. 2004.
- [5] L. Zhong, F. I. Alajaji, and G. Takahara, "A binary communication channel with memory based on a finite queue," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, pp. 2815–2840, Aug. 2007.
- [6] I. Moreira and C. Pimentel, "Modelo de canal de estados finitos para canais com desvanecimento correlacionado no tempo e decisão suave," *Proc. XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Set-Out 2009.
- [7] R. P. Ramos and C. Pimentel, "Análise de desempenho de códigos de bloco em canais de estados finitos entrelaçados," *Proc. IX Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica*, João Pessoa, PB, pp. 405–499, Ago. 2000.
- [8] C. Pimentel and I. F. Blake, "Concatenated coding performance for FSK modulation on time-correlated Rician fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 46, no. 12, pp. 1610–1618, 1998.