

Considerações sobre a Modelagem Estocástica dos Coeficientes do Algoritmo Adaptativo IAF-PNLMS

Francisco das Chagas de Souza e Rui Seara

Resumo—Este artigo apresenta um modelo estocástico para a evolução dos coeficientes do algoritmo adaptativo LMS normalizado proporcional com fatores de ativação individuais (IAF-PNLMS). Para tal, um novo procedimento de autodecomposição das matrizes surgidas no cálculo dos valores esperados envolvidos no desenvolvimento do modelo é considerado; além disso, é assumido que a matriz de ganhos do algoritmo seja variante no tempo. Por consequência, o modelo prediz tanto a resposta transitória quanto a resposta estacionária do comportamento médio do vetor de coeficientes adaptativos. Através de resultados de simulação numérica, a precisão do modelo proposto bem como as principais aproximações consideradas são verificadas.

Palavras-Chave—Algoritmo LMS normalizado proporcional (PNLMS), evolução dos coeficientes adaptativos, filtragem adaptativa, modelo estocástico, resposta ao impulso esparsa.

Abstract—This paper presents a stochastic model for the adaptive coefficient evolution of the individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square (IAF-PNLMS) adaptive algorithm. For such, a new eigendecomposition procedure for the matrices arising from the expected value calculus involved in the model development is used; in addition, the algorithm gain matrix is assumed time-variant. As a consequence, the proposed model predicts both transient and steady-state phases of the mean behavior of the adaptive coefficient vector. Through simulation results, the accuracy of the proposed model as well as the key approximations used are verified.

Keywords—Adaptive coefficient evolution, adaptive filtering, proportionate normalized least-mean-square (PNLMS) algorithm, sparse impulse response, stochastic model.

I. INTRODUÇÃO

A concepção de filtros adaptativos explorando a natureza esparsa da resposta ao impulso da planta vem se tornando um tópico de pesquisa de grande relevância, visto que essa classe de respostas é encontrada em muitas aplicações, tais como cancelamento de eco, localização de fontes, sistemas de transmissão de televisão digital, processos sísmicos, dentre outras [1]-[2]. Para tal classe de respostas ao impulso, os algoritmos adaptativos clássicos, usando o mesmo passo de adaptação para todos os coeficientes do filtro, tal como o algoritmo LMS normalizado (NLMS – *normalized least-mean-square*), são superados tanto em termos de velocidade de convergência quanto em habilidade de rastreamento por aqueles algoritmos

Francisco das Chagas de Souza e Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Depto. de Eng. Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, Brasil., Email: fsouza@linse.ufsc.br, seara@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

especialmente projetados para explorar a natureza esparsa de tais respostas [3]-[8]. Por exemplo, os algoritmos da classe NLMS proporcional (PNLMS), tais como o PNLMS padrão, o PNLMS melhorado (IPNLMS), o PNLMS com lei μ (MPNLMS) e o PNLMS com fatores de ativação individuais (IAF-PNLMS), são especialmente projetados para lidar com plantas esparsas [3]-[8]. Assim, considerando a ampla gama de aplicações dos algoritmos da classe PNLMS, a sua modelagem estocástica é de grande utilidade prática. Ela é usada como uma ferramenta para prever o desempenho do algoritmo adaptativo sob diferentes condições de operação (evitando o uso de simulações exaustivas para a avaliação do algoritmo) bem como para obter valores apropriados de parâmetros do algoritmo, tais como o passo de adaptação e o comprimento do filtro, dentre outros. Além do mais, o modelo pode ser usado para entender melhor o funcionamento do algoritmo [9], [10].

A modelagem dos algoritmos da classe PNLMS ainda é um tema em aberto na literatura especializada, devido principalmente à complexidade matemática envolvida. Uma modelagem precisa desses algoritmos não é uma tarefa trivial, visto que é necessário levar em conta tanto as características da planta (representada pela matriz de distribuição de ganhos) quanto a entrada de dados correlacionados. Os modelos existentes são baseados em simplificações severas (ou até mesmo grosseiras); por consequência, tais modelos, muitas vezes, não predizem adequadamente o comportamento do algoritmo [3], [11]-[13]. Então, visando o uso de dados de entrada correlacionados, em [14] é apresentado um modelo estocástico para a evolução dos coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS. Em tal modelo, a matriz de ganhos é considerada variante no tempo e o vetor de entrada tem uma distribuição gaussiana multivariada; a última condição dá origem a integrais hiperelípticas de alta ordem (HOHI – *high-order hyperelliptic integral*) no desenvolvimento do modelo, as quais são calculadas seguindo o procedimento proposto em [10]. Portanto, nesse contexto, o presente trabalho estende o estudo realizado em [14], considerando os seguintes objetivos:

- i) Derivar um modelo estocástico para a evolução dos coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS, agora usando uma autodecomposição alternativa das matrizes envolvidas na modelagem do algoritmo.
- ii) Conceber uma metodologia de análise que possa ser aplicada a outros algoritmos da classe PNLMS.

Baseado nesses objetivos, um modelo estocástico para a evolução dos coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS é derivado. Comparações entre simulações de Monte Carlo e previsões teóricas obtidas comprovam a precisão do modelo proposto, considerando dados de entrada gaussianos.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A. Algoritmos da Classe PNLMS

A equação de atualização dos coeficientes dos algoritmos da classe PNLMS é dada por [4]-[8]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu \mathbf{G}(n) e(n) \mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \quad (1)$$

onde $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ w_2(n) \ \dots \ w_N(n)]^T$ é o vetor de coeficientes adaptativos e $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$, o vetor de entrada. O fator μ representa o parâmetro de controle de passo e ξ , um parâmetro de regularização positivo que previne a divisão por zero no denominador de (1), estabilizando a solução. A matriz $\mathbf{G}(n) = \text{diag}[g_1(n) \ g_2(n) \ \dots \ g_N(n)]$, cujos elementos são dados por

$$g_i(n) = \frac{\phi_i(n)}{\frac{1}{N} \|\boldsymbol{\phi}(n)\|_1}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

distribui ganhos entre os coeficientes do filtro adaptativo, governando o ajuste do passo de adaptação do i -ésimo coeficiente do filtro adaptativo. O ganho individual $g_i(n)$ é determinado em termos do vetor função de proporcionalidade $\boldsymbol{\phi}(n) = [\phi_1(n) \ \phi_2(n) \ \dots \ \phi_N(n)]^T$ [4]-[8], sendo esse vetor uma função das magnitudes dos coeficientes do filtro adaptativo, bem como de alguns parâmetros pré-definidos da classe de algoritmos PNLMS [4]-[8]. O sinal de erro é

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) + z(n) \quad (3)$$

onde $d(n)$ denota o sinal desejado e $z(n)$ é um ruído de medição de média zero, independente e identicamente distribuído (i.i.d.), com variância σ_z^2 .

B. Algoritmo PNLMS com Fatores de Ativação Individuais

O algoritmo IAF-PNLMS é obtido a partir das expressões gerais (1)-(2) com a função de proporcionalidade dada por [6]-[8]

$$\phi_i(n) = \max\{a_i(n), |w_i(n)|\} \quad (4)$$

onde

$$a_i(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} |w_i(n)| + \frac{1}{2} \phi_i(n-1), & n = mN, \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ a_i(n-1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

é o fator de ativação individual associado ao i -ésimo coeficiente do filtro adaptativo.

C. Hipóteses

As hipóteses gerais utilizadas no desenvolvimento do modelo estocástico para a evolução dos coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS são as seguintes:

- H1. O sinal de entrada é obtido a partir de um processo gaussiano com média zero e o sinal $z(n)$ é um ruído de medição i.i.d. com média zero, variância σ_z^2 e descorrelacionado de qualquer outro sinal do sistema. Na literatura, essa hipótese é típica no desenvolvimento de modelos estocásticos [15].
- H2. Os vetores $\mathbf{w}(n)$ e $\mathbf{x}(n)$ são estatisticamente independentes para a condição de adaptação lenta [15]. A Hipótese H2, também comum na literatura, permite separar os valores esperados envolvendo $f_1[\mathbf{w}(n)]$ e $f_2[\mathbf{x}(n)]$. Como consequência, $E\{f_1[\mathbf{w}(n)]f_2[\mathbf{x}(n)]\} \cong E\{f_1[\mathbf{w}(n)]\}E\{f_2[\mathbf{x}(n)]\}$.
- H3. A matriz $\mathbf{G}(n)$ varia lentamente em relação ao vetor de coeficientes $\mathbf{w}(n)$. Essa hipótese implica que $E[\mathbf{G}(n)\mathbf{w}(n)] \cong E[\mathbf{G}(n)]E[\mathbf{w}(n)]$.

- H4. Para valores de N grande, o i -ésimo ganho $g_i(n)$ e o fator $f_N(n) = [\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n)]$ são fracamente correlacionados. Segundo a Hipótese H4, pode ser assumido que $E[g_i(n)f_N^{-1}(n)] \cong E[g_i(n)]E[f_N^{-1}(n)]$.

D. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Visando obter a expressão geral que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes, substitui-se (3) em (1) e toma-se o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante. Dessa forma, obtém-se

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = E[\mathbf{w}(n)] - \mu E \left[\frac{\mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right] + \mu E \left[\frac{\mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) d(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right] + \mu E \left[\frac{\mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) z(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right]. \quad (6)$$

Para determinar as expectâncias em (6), as seguintes aproximações, baseadas nas Hipóteses H2-H4 (veja testes das aproximações, Seção IV), são primeiramente estabelecidas:

$$E \left[\frac{\mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right] \cong E[\mathbf{G}(n)] E \left[\frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right] E[\mathbf{w}(n)]. \quad (7)$$

$$E \left[\frac{\mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) d(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right] \cong E[\mathbf{G}(n)] E \left[\frac{\mathbf{x}(n) d(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right]. \quad (8)$$

Agora, usando H1, (7) e (8), (6) pode ser reescrita como

$$E[\mathbf{w}(n+1)] \cong [\mathbf{I} - \mu \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{R}_G(n)] E[\mathbf{w}(n)] + \mu \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{p}_G(n) \quad (9)$$

onde $\bar{\mathbf{G}}(n) \triangleq \text{diag}[\bar{g}_1(n) \ \bar{g}_2(n) \ \dots \ \bar{g}_N(n)]$ com $\bar{g}_i(n) \triangleq E[g_i(n)]$ e \mathbf{I} denota a matriz identidade. As variáveis $\mathbf{R}_G(n)$ e $\mathbf{p}_G(n)$ representam, respectivamente, uma matriz de autocorrelação normalizada e um vetor de correlação cruzada normalizada entre $d(n)$ e $\mathbf{x}(n)$, dadas pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{R}_G(n) = E \left[\frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right] \quad (10)$$

$$\mathbf{p}_G(n) = E \left[\frac{d(n) \mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}^T(n) \mathbf{G}(n) \mathbf{x}(n) + \xi} \right]. \quad (11)$$

III. ANÁLISE ESTOCÁSTICA

O maior obstáculo encontrado na obtenção de um modelo preciso para os algoritmos da classe PNLMS é a complexidade matemática envolvida na determinação dos valores esperados $\mathbf{R}_G(n)$, $\mathbf{p}_G(n)$ e $\bar{\mathbf{G}}(n)$. Neste trabalho, visando obter um modelo mais preciso, esses valores esperados são obtidos usando um número reduzido de aproximações simplificadoras.

A. Determinação do Valor Esperado Associado às Características da Planta

A determinação de $\bar{\mathbf{G}}(n)$ é realizada aqui usando o vetor $E[\mathbf{w}(n)]$, obtido através da expressão recursiva do modelo (9). Dessa forma, a partir de (2), assumindo N grande, o i -ésimo elemento da diagonal de $\bar{\mathbf{G}}(n)$ é dado por

$$\bar{g}_i(n) \equiv \frac{E[\phi_i(n)]}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E[\phi_j(n)]} \quad (12)$$

Visando determinar o numerador de (12), a seguinte aproximação é utilizada:

$$E[\phi_i(n)] \cong \max\{E[a_i(n)], |E[w_i(n)]|\} \quad (13)$$

com

$$E[a_i(n)] = \begin{cases} \frac{1}{2}|E[w_i(n)]| + \frac{1}{2}E[\phi_i(n-1)], & n = mN \\ E[a_i(n-1)], & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14)$$

onde o i -ésimo elemento de $E[\mathbf{w}(n)]$ é recursivamente obtido de (9). O valor esperado (13) é baseado no fato de que $a_i(n) \rightarrow |w_i(n)|$ quando n aumenta (veja [8]).

B. Determinação dos Valores Esperados Associados aos Dados de Entrada

A partir de (10) e (11), verifica-se que a determinação dos valores esperados associados aos dados de entrada requer o conhecimento da matriz $\mathbf{G}(n)$; entretanto, tal matriz não está prontamente disponível para ser utilizada no modelo. Note que a matriz $\mathbf{G}(n)$ é uma variável do algoritmo, podendo somente ser obtida através de simulações. Agora, considerando que, em cada iteração n , o valor esperado da matriz de distribuição de ganhos $\bar{\mathbf{G}}(n)$ está prontamente disponível [veja (9) e (12)-(14)], usa-se $\bar{\mathbf{G}}(n)$ no lugar de $\mathbf{G}(n)$ para determinar $\mathbf{R}_G(n)$ e $\mathbf{p}_G(n)$, em contraste ao procedimento considerado em [14]. Assim, assumindo que a entrada $\mathbf{x}(n)$ é um vetor aleatório real com distribuição gaussiana multivariável, obtém-se $\mathbf{R}_G(n)$ e $\mathbf{p}_G(n)$ como segue.

1) *Determinação de $\mathbf{R}_G(n)$* : Assumindo o valor do parâmetro de regularização muito pequeno, isto é, $\xi \ll \mathbf{x}^T(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)$, os elementos da matriz de autocorrelação normalizada $\mathbf{R}_G(n)$ podem ser expressos como (veja [14])

$$[\mathbf{R}_G(n)]_{i,k} \cong \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det(\mathbf{R})}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N \text{ vezes}} \frac{x_i(n)x_k(n)}{\mathbf{x}^T(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)} e^{-\frac{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}(n)}{2}} d\mathbf{x} \quad (15)$$

onde $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$ é a matriz de autocorrelação do vetor de entrada e $x_j(n) = x(n-j+1)$ é o j -ésimo elemento de $\mathbf{x}(n)$. A solução de $\mathbf{R}_G(n)$ (veja [14]), obtida aqui usando o método de autodecomposição apresentado no Apêndice, é dada por

$$\mathbf{R}_G(n) = \mathbf{R}\mathbf{Q}_A(n)\mathbf{H}_G(n)\mathbf{P}_A(n) \quad (16)$$

onde $\mathbf{Q}_A(n)$ e $\mathbf{P}_A(n)$ são as matrizes de autovetores da autodecomposição $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} \cong \mathbf{Q}_A(n)\mathbf{\Lambda}_A(n)\mathbf{P}_A(n)$ (veja Apêndice) com a matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}_A(n)$ contendo os autovalores $\lambda_i(n)$, e $\mathbf{H}_G(n)$ é uma matriz diagonal cujos elementos são dados por

$$[h_G(0,n)]_i \cong \frac{-0,5}{\lambda_i(n)\sqrt{a_M(n)}} \left\{ B_i(n) \ln[-\omega_i(n)] + \sum_{q=1}^{M/2} A_{i,q}(n) \ln[-\omega'_q(n)] \right\} \quad (17)$$

com

$$B_i(n) = \frac{1}{\prod_{q=1}^{M/2} [\omega_i(n) - \omega'_q(n)]} \quad (18)$$

e

$$A_{i,q}(n) = \frac{1}{[\omega'_q(n) - \omega_i(n)] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{M/2} [\omega'_q(n) - \omega'_j(n)]} \quad (19)$$

onde, sem perda de generalidade, os autovalores $\lambda_i(n)$ são assumidos distintos. As variáveis $a_M(n)$, $\omega_i(n)$ e $\omega'_q(n)$ são definidas, respectivamente, como [10], [14]

$$a_M(n) = 2^M \prod_{i=1}^M \lambda_i(n) \quad (20)$$

$$\omega_i(n) = -1/[2\lambda_i(n)] \quad (21)$$

e

$$\omega'_q(n) = -\sqrt{\omega_{2q-1}(n)\omega_{2q}(n)}, \quad q = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (22)$$

com M definido no Apêndice.

2) *Determinação de $\mathbf{p}_G(n)$* : Assumindo que $d(n)$ e $x_j(n)$ são conjuntamente gaussianos, o vetor de correlação cruzada normalizada $\mathbf{p}_G(n)$ é determinado resolvendo a seguinte integral múltipla [14]:

$$[\mathbf{p}_G(n)]_i \cong \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N+1}{2}} \sqrt{\det \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & \sigma_d^2 \end{bmatrix}}} \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(N+1) \text{ vezes}} \frac{d(n)x_i(n)}{\mathbf{x}^T(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)} e^{-\frac{\mathbf{u}^T(n) \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & \sigma_d^2 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{u}(n)}{2}} d\mathbf{u} \quad (23)$$

onde $\mathbf{u}(n) = [\mathbf{x}^T(n) \ d(n)]^T$, $\mathbf{p} = E[d(n)\mathbf{x}(n)]$ é o vetor de correlação cruzada entre $d(n)$ e $\mathbf{x}(n)$, e $\sigma_d^2 = E[d^2(n)]$ é a variância do sinal desejado. Em (23), também é assumido que $\xi \ll \mathbf{x}^T(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)$. Resolvendo (23) [14], e considerando o método de autodecomposição do Apêndice, pode-se mostrar que

$$\mathbf{p}_G(n) = \mathbf{T}_A(n)\mathbf{H}_G(n)\mathbf{U}_A(n)\mathbf{p} \quad (24)$$

onde $\mathbf{T}_A(n)$ e $\mathbf{U}_A(n)$ são as matrizes de autovetores da autodecomposição $\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{G}}(n) \cong \mathbf{T}_A(n)\mathbf{\Lambda}_A(n)\mathbf{U}_A(n)$.

C. Modelo Estocástico Proposto

Aqui, levando em conta os valores esperados (16) e (24), a expressão final do momento de primeira ordem é determinada. Dessa forma, substituindo (16) e (24) em (9), a expressão final para a equação dos coeficientes médios do algoritmo IAF-PNLMS é reescrita como

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = [\mathbf{I} - \mu\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}\mathbf{Q}_A(n)\mathbf{H}_G(n)\mathbf{P}_A(n)] \times E[\mathbf{w}(n)] + \mu\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{T}_A(n)\mathbf{H}_G(n)\mathbf{U}_A(n)\mathbf{p}. \quad (25)$$

A abordagem desenvolvida nesta seção para derivar um modelo estocástico de primeira ordem para o algoritmo IAF-PNLMS pode também ser aplicada a outros algoritmos da classe PNLMS; para tal, é necessário modificar a maneira na qual o valor esperado da matriz de ganhos é calculado, levando em conta o algoritmo particular a ser modelado. Além disso, tal abordagem pode ser usada para obter o modelo de segunda ordem; entretanto, essa tarefa não é trivial, tendo em vista a complexidade matemática envolvida na determinação dos valores esperados oriundos do modelo de segunda ordem.

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, visando verificar a eficácia do modelo proposto, simulações de Monte Carlo (média de 100 realizações independentes) do algoritmo IAF-PNLMS são realizadas, considerando um problema de identificação de sistemas. Além disso, as aproximações (7) e (8) são também verificadas. Para tal, é usada uma planta esparsa \mathbf{w}^o com $N = 128$ coeficientes, cujos elementos não nulos são dados por

$$(\mathbf{w}^o)_i = \begin{cases} 0,8, & i = 1 \\ 1,0, & i = 30 \\ -0,9, & i = 35 \\ -0,7, & i = 85. \end{cases} \quad (26)$$

Visando quantificar a esparsidade dessa planta, usa-se uma medida típica, encontrada na literatura [1], [2], baseada na relação entre a norma 1 e a norma 2 da planta, definida como

$$\xi(\mathbf{w}^o) \triangleq \frac{N}{N - \sqrt{N}} \left(1 - \frac{\|\mathbf{w}^o\|_1}{\sqrt{N} \|\mathbf{w}^o\|_2} \right) \quad (27)$$

onde $\|\mathbf{w}^o\|_1$ e $\|\mathbf{w}^o\|_2$ são, respectivamente, a norma 1 e a norma 2 de \mathbf{w}^o . A partir de (27), o grau de esparsidade da planta \mathbf{w}^o é $\xi(\mathbf{w}^o) = 0,9047$.

O sinal de entrada é correlacionado, com média zero e variância unitária, obtido a partir de um processo AR(2) expresso por

$$x(n) = 1,29x(n-1) - 0,75x(n-2) + v(n) \quad (28)$$

onde $v(n)$ é um ruído branco com variância $\sigma_v^2 = 0,20$. Dessa forma, a dispersão dos autovalores da matriz de autocorrelação do vetor de entrada é $\chi = 324$. O ruído de medição $z(n)$ é branco com variância $\sigma_z^2 = 10^{-2}$ (SNR = 20 dB) e o sinal desejado é dado por

$$d(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}^o. \quad (29)$$

Os parâmetros do algoritmo IAF-PNLMS são $a_i(0) = 10^{-3}$ e $\mu = 7,25 \times 10^{-3}$. A condição inicial considerada na simulação de Monte Carlo é $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ e no modelo proposto, $E[\mathbf{w}(0)] = \mathbf{0}$.

A Fig. 1 mostra as curvas do comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, localizados nas posições {1, 2, 30, 35, 85}, obtidas usando simulações de Monte Carlo e o modelo proposto (25). Dessa figura, a precisão do modelo proposto é verificada para os coeficientes ativos e inativos.

Nas Figs. 2(a) e (b), as curvas com os testes das Aproximações (7) e (8), correspondentes aos lados esquerdo e direito de tais expressões, são apresentadas. Note, dessas figuras, o casamento muito bom entre as curvas que representam ambos os lados de (7) e (8), mostrando a consistência de tais aproximações.

Com respeito às Hipóteses H2, H3 e H4, pode-se mostrar através de simulações que elas são também consistentes. Além disso, salienta-se que a consistência das Aproximações (7) e (8) sustentam as Hipóteses H2, H3 e H4, visto que essas aproximações são baseadas em tais hipóteses.

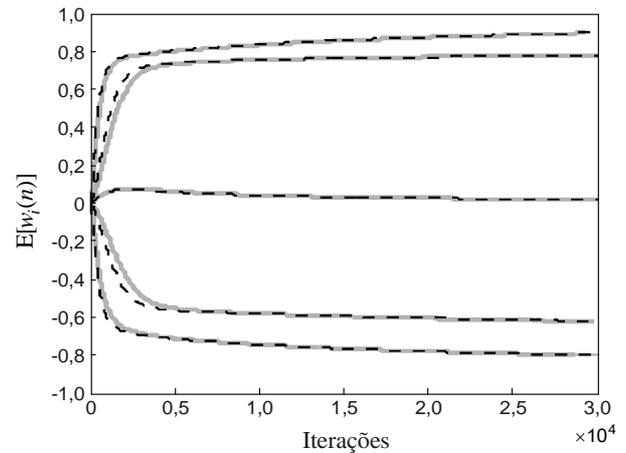


Fig. 1. Comportamento médio dos coeficientes obtido usando simulações de Monte Carlo (linhas contínuas cinzas) e o modelo proposto (linhas tracejadas escuras). De cima para baixo: curvas de $E[w_{30}(n)]$, $E[w_1(n)]$, $E[w_2(n)]$, $E[w_{85}(n)]$ e $E[w_{35}(n)]$.

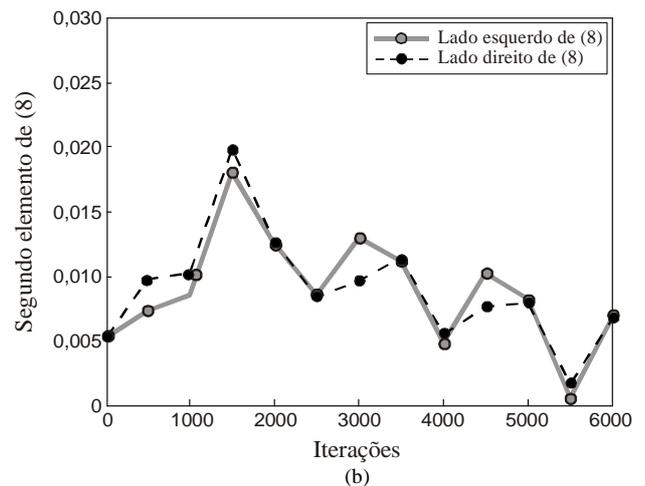
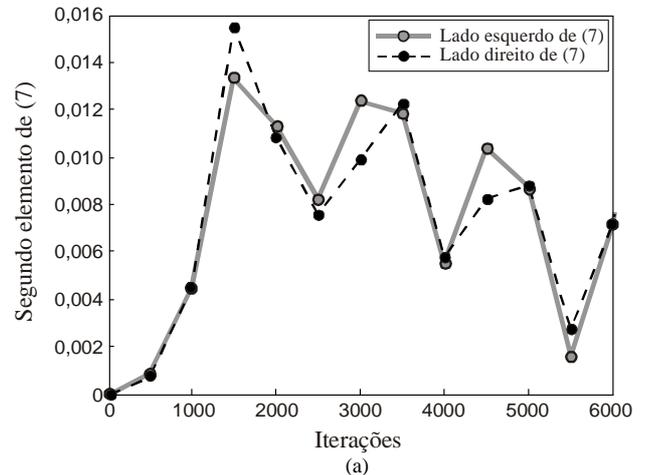


Fig. 2. Testes das Aproximações (7) e (8). (a) 2º elemento de (7): lado esquerdo (linha sólida cinza) e lado direito (linha tracejada escura). (b) 2º elemento de (8): lado esquerdo (linha sólida cinza) e lado direito (linha tracejada escura).

V. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou um novo modelo estocástico de primeira ordem para a evolução do vetor de coeficientes do filtro adaptativo do algoritmo IAF-PNLMS. Para tal, considera-se que a matriz de ganhos é variante no tempo e os dados de entrada são sinais gaussianos correlacionados. O modelo proposto foi obtido levando em conta um novo procedimento de autodecomposição das matrizes surgidas no cálculo das expectâncias envolvidas na modelagem do algoritmo. Tal procedimento de autodecomposição é baseado na ordenação dos autovalores e descarte dos menos significativos. Através de simulações numéricas, a precisão do modelo proposto assim como das aproximações principais foram confirmadas. A metodologia derivada aqui pode também ser usada para modelar outros algoritmos da classe PNLMS.

APÊNDICE

AUTODECOMPOSIÇÃO DAS MATRIZES $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ E $\mathbf{R}\bar{\mathbf{G}}(n)$

A abordagem usada em [14] para obter o modelo da evolução dos coeficientes médios do algoritmo IAF-PNLMS leva em conta um parâmetro de regularização, prevenindo divisão por autovalores muito pequenos surgidos da autodecomposição da matriz $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$. Tal abordagem estabiliza o cálculo das HOHIs. Aqui, para assegurar o cálculo dessas integrais, usa-se uma abordagem alternativa baseada na ordenação dos autovalores de $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$, descartando aqueles menos significativos. Para esse fim, primeiro ordena-se todos os autovalores da matriz $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ (em ordem decrescente). Assim, seja a autodecomposição expressa como

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} = \mathbf{Q}(n)\mathbf{\Lambda}(n)\mathbf{Q}^{-1}(n) \quad (30)$$

com

$$\mathbf{\Lambda}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_A(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_B(n) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

As matrizes $\mathbf{\Lambda}_A(n)$ e $\mathbf{\Lambda}_B(n)$ são, respectivamente, dadas por

$$\mathbf{\Lambda}_A(n) = \text{diag}[\lambda_1(n) \quad \lambda_2(n) \quad \cdots \quad \lambda_M(n)] \quad (32)$$

e

$$\mathbf{\Lambda}_B(n) = \text{diag}[\lambda_{M+1}(n) \quad \lambda_{M+2}(n) \quad \cdots \quad \lambda_N(n)] \quad (33)$$

com

$$\lambda_1(n) > \cdots > \lambda_M(n) > \lambda_{M+1}(n) > \cdots > \lambda_N(n). \quad (34)$$

Em (32), $\lambda_M(n) \geq \gamma$ define o último elemento da diagonal de $\mathbf{\Lambda}_A(n)$, onde γ é um limiar de magnitude para o menor autovalor significativo de $\mathbf{\Lambda}(n)$. A partir de (30) e (31), a matriz de autovetores $\mathbf{Q}(n)$ pode ser reescrita como

$$\mathbf{Q}(n) \triangleq [\mathbf{Q}_A(n) \quad \mathbf{Q}_B(n)] \\ = [\mathbf{q}_1(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_M(n) \quad \mathbf{q}_{M+1}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{q}_N(n)] \quad (35)$$

onde os vetores N -dimensionais $\mathbf{q}_i(n)$, para $i=1, 2, \dots, N$, são os autovetores associados com os autovalores $\lambda_i(n)$. Agora, substituindo (31) e (35) em (30), obtém-se

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} = [\mathbf{Q}_A(n) \quad \mathbf{Q}_B(n)] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_A(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_B(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_A(n) \\ \mathbf{P}_B(n) \end{bmatrix} \quad (36)$$

com $[\mathbf{P}_A^T(n) \quad \mathbf{P}_B^T(n)]^T \triangleq \mathbf{Q}^{-1}(n)$. Então, assumindo que $\gamma \ll 1$ (tipicamente, $\gamma = 10^{-4}$), resulta em

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} \cong \mathbf{Q}_A(n)\mathbf{\Lambda}_A(n)\mathbf{P}_A(n) \quad (37)$$

onde a matriz $\mathbf{P}_A(n)$ é formada pelas primeiras M linhas de $\mathbf{Q}^{-1}(n)$.

Agora, usando o mesmo procedimento descrito anteriormente para obter a autodecomposição da matriz $\mathbf{R}\bar{\mathbf{G}}(n)$, tem-se

$$\mathbf{R}\bar{\mathbf{G}}(n) = \mathbf{T}(n)\mathbf{\Lambda}(n)\mathbf{T}^{-1}(n) \\ = [\mathbf{T}_A(n) \quad \mathbf{T}_B(n)] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_A(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_B(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A(n) \\ \mathbf{U}_B(n) \end{bmatrix} \quad (38)$$

com

$$\mathbf{T}(n) \triangleq [\mathbf{T}_A(n) \quad \mathbf{T}_B(n)] \\ = [\mathbf{t}_1(n) \quad \cdots \quad \mathbf{t}_M(n) \quad \mathbf{t}_{M+1}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{t}_N(n)] \quad (39)$$

e $[\mathbf{U}_A^T(n) \quad \mathbf{U}_B^T(n)]^T \triangleq \mathbf{T}^{-1}(n)$. Dessa forma, obtém-se

$$\mathbf{R}\bar{\mathbf{G}}(n) \cong \mathbf{T}_A(n)\mathbf{\Lambda}_A(n)\mathbf{U}_A(n) \quad (40)$$

onde a matriz $\mathbf{U}_A(n)$ representa as primeiras M linhas de $\mathbf{T}^{-1}(n)$. Saliencia-se aqui que a utilização do limiar γ (definido neste apêndice) não afeta a eficácia do modelo proposto.

REFERÊNCIAS

- [1] Y. Huang, J. Benesty, and J. Chen, *Acoustic MIMO Signal Processing*. New York: Springer-Verlag, 2006.
- [2] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochina, *Sparse Adaptive Filters for Echo Cancellation*. San Rafael, CA: Morgan and Claypool Publishers, 2010.
- [3] D. L. Duttweiler, "Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancellers," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 508-518, Sep. 2000.
- [4] J. Benesty and S. L. Gay, "An improved PNLMS algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1881-1884.
- [5] H. Deng and M. Doroslovacki, "Proportionate adaptive algorithms for network echo cancellation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 5, pp. 1794-1803, May 2006.
- [6] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "Alternative approach for computing the activation factor of the PNLMS algorithm," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Glasgow, Scotland, Aug. 2009, pp. 2633-2637.
- [7] F. C. de Souza, O. J. Tobias e R. Seara, "Considerações sobre o algoritmo PNLMS com fatores de ativação individuais," in *Anais XXVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBTr 2009)*, Blumenau, SC, Oct. 2009, pp. 1-6.
- [8] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "A PNLMS algorithm with individual activation factors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp. 2036-2047, Apr. 2010.
- [9] M. Rupp, "The behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 3, pp. 1149-1160, Mar. 1993.
- [10] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic modeling of the transform domain sLMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1840-1852, May 2008.
- [11] M. I. Doroslovacki and H. Deng, "On convergence of proportionate-type NLMS adaptive algorithms," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Toulouse, France, May 2006, vol. 3, pp. 105-108.
- [12] K. T. Wagner and M. I. Doroslovacki, "Towards analytical convergence analysis of proportionate-type NLMS algorithms," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Las Vegas, NV, Mar. 2008, pp. 3825-3828.
- [13] P. Loganathan, E. A. P. Habets, and P. A. Naylor, "A performance analysis of IPNLMS for identification of time-varying systems," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Dallas, TX, Mar. 2010, pp. 317-320.
- [14] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "Stochastic model for the mean-weight evolution of the IAF-PNLMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 11, pp. 5895-5901, Nov. 2010.
- [15] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4 ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.