

Implementação Eficiente de Filtros IFIR Completamente Adaptativos

Eduardo Luiz Ortiz Batista e Rui Seara

Resumo—Este trabalho apresenta uma nova estratégia para implementação de estruturas IFIR completamente adaptativas (FAIFIR) usando os algoritmos LMS e NLMS. O objetivo dessa estratégia é eliminar problemas de convergência e estabilidade numérica decorrentes da adaptação simultânea dos dois filtros em cascata (filtro esparsos e interpolador) que compõem uma estrutura FAIFIR. Para tal, uma modificação na estrutura do interpolador é proposta sem gerar qualquer impacto significativo tanto na aplicabilidade da estrutura FAIFIR quanto em termos de complexidade computacional. Como resultado, um algoritmo adaptativo com melhores propriedades numéricas é obtido. A efetividade da estratégia proposta é corroborada através de simulações numéricas.

Palavras-Chave—Algoritmo LMS, algoritmo NLMS, filtros adaptativos, filtros FIR interpolados.

Abstract—This paper presents a novel strategy for implementing fully adaptive IFIR filters (FAIFIR) using the LMS and NLMS algorithms. The aim of this strategy is to overcome convergence and numerical stability issues resulting from simultaneously adapting the two cascaded filters (sparse filter and interpolator), which compose an FAIFIR structure. For such, the interpolator structure is modified without producing any significant impact either on the generality of the FAIFIR structure or on the computational burden. As a result, an efficient algorithm presenting superior numerical properties is obtained. The effectiveness of the proposed strategy is attested through numerical simulations.

Keywords—LMS algorithm, NLMS algorithm, adaptive filters, interpolated FIR filters.

I. INTRODUÇÃO

A capacidade dos processadores digitais de sinais (DSPs) tem crescido consideravelmente nos últimos anos. Tal crescimento vem permitindo aumentar na mesma proporção a complexidade das aplicações utilizando DSPs como, por exemplo, as de filtragem adaptativa. Por outro lado, muitos algoritmos têm sofrido restrições severas de complexidade em função do seu intensivo e crescente uso em sistemas embarcados. Nesse contexto, o desenvolvimento de algoritmos de filtragem adaptativa aliando eficiência e baixa complexidade computacional vem sendo de fundamental importância para suportar diversas aplicações nessa área.

Os filtros FIR lineares são as estruturas mais comumente utilizadas como base para os algoritmos de filtragem adaptativa [1]. No entanto, a complexidade computacional de tais filtros pode ser muito elevada em algumas aplicações. Dessa forma, muitas implementações utilizam estruturas FIR com

complexidade reduzida em substituição aos filtros FIR convencionais. Uma dessas estruturas é o filtro FIR interpolado (IFIR) [2], o qual vem sendo utilizado com sucesso para controle ativo de ruído [3], processamento de áudio em aparelhos auditivos [4], supressão de interferências em sistemas CDMA [5], cancelamento de eco [6], dentre outras aplicações.

A complexidade computacional reduzida das estruturas IFIR é obtida utilizando um filtro FIR esparsos em cascata com um interpolador (ambos com número reduzido de coeficientes) para implementar um filtro FIR. No contexto adaptativo, os filtros IFIR são implementados adaptando apenas o filtro esparsos (IFIR adaptativo - AIFIR) [2] ou adaptando ambos, o filtro esparsos e o interpolador (IFIR completamente adaptativo - FAIFIR) [7]. Abordagens do tipo AIFIR proporcionam menor complexidade computacional, enquanto abordagens FAIFIR levam a melhor desempenho [7]. Como a diferença de complexidade entre tais abordagens é relativamente pequena [7], o uso de abordagens FAIFIR em geral apresenta uma melhor razão custo-benefício. Por outro lado, por envolver a adaptação de dois filtros simultaneamente, o processo de adaptação das estruturas FAIFIR é mais delicado, podendo acarretar problemas de convergência e estabilidade que não são verificados no caso das estruturas AIFIR. Nesse contexto, este trabalho apresenta uma nova estratégia de implementação para filtros FAIFIR, usando os algoritmos LMS e NLMS, na qual os problemas decorrentes do processo adaptativo dos filtros envolvidos são resolvidos através da modificação da estrutura adaptativa do interpolador. Tal estratégia é desenvolvida a partir da implementação de filtros IFIR com remoção do efeito de borda (BIFIR), a qual apresenta melhor desempenho em comparação com implementações IFIR convencionais [7]. Resultados de simulação numérica são apresentados visando verificar o desempenho da abordagem proposta.

Este artigo está organizado como segue. Na Seção II, as principais características dos filtros BIFIR e a sua implementação completamente adaptativa são descritas. Na Seção III, a estratégia proposta para implementação de filtros BIFIR completamente adaptativos é discutida, bem como são derivadas expressões para atualização de seus coeficientes usando tanto o algoritmo LMS quanto o NLMS. A Seção IV apresenta resultados de simulação com o objetivo de avaliar o desempenho da estratégia proposta. Finalizando, a Seção V apresenta as conclusões deste trabalho.

II. FILTROS IFIR COMPLETAMENTE ADAPTATIVOS COM REMOÇÃO DO EFEITO DE BORDA

A estrutura de um filtro IFIR é ilustrada na Fig. 1. Nessa figura, \mathbf{g} representa o interpolador e \mathbf{w}_s , o filtro esparsos. O tamanho de memória do filtro esparsos é N e o seu vetor de coeficientes é obtido zerando $L-1$ a cada L coeficientes do vetor de coeficientes de um filtro FIR convencional $\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{N-1}]^T$, com L denotando o fator de esparsidade [7]. Assim, o vetor de coeficientes de dimensão $N \times 1$ do filtro esparsos é dado por

Eduardo L. O. Batista, Depto. de Informática e Estatística, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mail: ebatista@ieee.org.

Rui Seara, LINSE – Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Depto. de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, E-mail: seara@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

$$\mathbf{w}_s = [w_0 \ 0 \ \dots \ w_L \ 0 \ \dots \ w_{2L} \ 0 \ \dots \ w_{(N_s-1)L} \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (1)$$

onde $N_s = \lfloor (N-1)/L \rfloor + 1$ é o número de coeficientes diferentes de zero em (1) com $\lfloor \cdot \rfloor$ representando a operação de truncamento. Com respeito ao interpolador \mathbf{g} , seu tamanho de memória é $M = 2L - 1$ e seu vetor de coeficientes é dado por

$$\mathbf{g} = [g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{M-1}]^T. \quad (2)$$

Ainda na Fig. 1, $x(n)$ representa o sinal de entrada, $\hat{x}(n)$, o sinal de entrada filtrado pelo filtro esparsos, e

$$y(n) = \mathbf{g}^T \hat{\mathbf{x}}(n), \quad (3)$$

o sinal de saída com

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}(n) \ \hat{x}(n-1) \ \hat{x}(n-2) \ \dots \ \hat{x}(n-M-1)]^T \quad (4)$$

representando o vetor de entrada do interpolador.

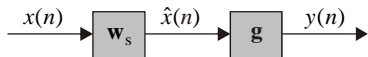


Fig. 1. Diagrama de blocos de um filtro IFIR.

O vetor de coeficientes equivalente do filtro IFIR (resposta ao impulso) é dado por

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{G}\mathbf{w}_s = \mathbf{W}_s\mathbf{g} \quad (5)$$

onde \mathbf{G} e \mathbf{W}_s são matrizes de convolução, com dimensões $N+M-1 \times M$ e $N+M-1 \times N$, obtidas, respectivamente, a partir de \mathbf{g} e \mathbf{w}_s . Para ilustrar a estrutura de tais matrizes, é mostrada aqui a matriz \mathbf{G} (\mathbf{W}_s tem estrutura idêntica à \mathbf{G}). Assim,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{g} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \mathbf{g} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \mathbf{g} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Com o objetivo de melhor avaliar as características de um filtro IFIR, vamos considerar um exemplo com $N=7$ e $L=2$, o que implica $M=3$, $\mathbf{g} = [g_0 \ g_1 \ g_2]^T$, $\mathbf{w}_s = [w_0 \ 0 \ w_2 \ 0 \ w_4 \ 0 \ w_6]^T$ e um vetor de coeficientes equivalente dado por

$$\mathbf{w}_i = \{g_0w_0 \ g_1w_0 \ [g_2w_0 + g_0w_2] \ g_1w_2 \ [g_2w_2 + g_0w_4] \ g_1w_4 \ [g_2w_4 + g_0w_6] \ g_1w_6 \ g_2w_6\}^T. \quad (7)$$

Considerando ainda o vetor de coeficientes do interpolador dado por $\mathbf{g} = [0,5 \ 1 \ 0,5]^T$, (7) pode ser reescrita como

$$\mathbf{w}_i = [0,5w_0 \ w_0 \ \underline{0,5w_0 + 0,5w_2} \ w_2 \ \underline{0,5w_2 + 0,5w_4} \ w_4 \ \underline{0,5w_4 + 0,5w_6} \ w_6 \ \underline{0,5w_6}]^T. \quad (8)$$

Comparando (1), (7) e (8), é possível observar que: i) os coeficientes do filtro esparsos \mathbf{w}_s são replicados em \mathbf{w}_i ; ii) os coeficientes zerados de \mathbf{w}_s são recriados em \mathbf{w}_i [indicados pelas caixas em (8)]; e iii) novos coeficientes (sublinhados) surgem como resultado do efeito de borda. Conforme descrito em [7], o

efeito de borda é indesejável e a sua remoção pode melhorar o desempenho do filtro IFIR. Tal remoção é feita multiplicando o vetor de coeficientes equivalente \mathbf{w}_i por uma matriz de transformação com a seguinte estrutura:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}_N \ \mathbf{0}] \quad (9)$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz de zeros com dimensão $N \times L-1$ e \mathbf{I}_N é uma matriz identidade com dimensão $N \times N$. Considerando o caso de (7), i.e., $N=7$ e $L=2$, tem-se um vetor equivalente com efeito de borda removido dado por

$$\mathbf{w}'_i = \mathbf{T}\mathbf{w}_i = \mathbf{T}\mathbf{G}\mathbf{w}_s = \{g_1w_0 \ [g_2w_0 + g_0w_2] \ g_1w_2 \ [g_2w_2 + g_0w_4] \ g_1w_4 \ [g_2w_4 + g_0w_6] \ g_1w_6\}^T \quad (10)$$

enquanto, para o caso de (8), obtém-se

$$\mathbf{w}'_i = [w_0 \ \underline{0,5w_0 + 0,5w_2} \ w_2 \ \underline{0,5w_2 + 0,5w_4} \ w_4 \ \underline{0,5w_4 + 0,5w_6} \ w_6]^T. \quad (11)$$

Do ponto de vista prático, a implementação da remoção do efeito de borda é feita substituindo o vetor de entrada do interpolador $\hat{\mathbf{x}}(n)$ por uma versão modificada, i.e.,

$$\hat{\mathbf{x}}'(n) = \mathbf{W}_s^T \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n) \quad (12)$$

com $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$, o que implica um aumento de complexidade de apenas $2L-2$ operações por amostra [7]. Como L é geralmente pequeno, tal incremento de complexidade é em geral desprezável. Em [7], o filtro IFIR com remoção do efeito de borda (BIFIR) é considerado no contexto adaptativo, resultando em uma implementação completamente adaptativa aqui denominada filtro FABIFIR. Em tal implementação, as expressões utilizadas para adaptação dos coeficientes, usando o algoritmo LMS, são

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + 2\mu_1 e(n) \hat{\mathbf{x}}'(n) \quad (13)$$

e

$$\mathbf{w}_s(n+1) = \mathbf{w}_s(n) + 2\mu_2 e(n) \tilde{\mathbf{x}}'(n) \quad (14)$$

onde μ_1 e μ_2 representam os passos de adaptação e

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (15)$$

é o sinal de erro com $d(n)$ representando o sinal desejado. Ainda em (13) e (14), $\hat{\mathbf{x}}'(n) \cong \mathbf{W}_s^T(n) \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n)$ e $\tilde{\mathbf{x}}'(n) \cong \mathbf{G}^T(n) \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n)$ correspondem, respectivamente, ao vetor de entrada do interpolador e ao vetor de entrada do filtro esparsos filtrado pelo interpolador, obtidos de forma recursiva como descrito em [7].

III. FILTROS FABIFIR MODIFICADOS

Conforme descrito em [7], o filtro FABIFIR é a implementação adaptativa do filtro IFIR que apresenta melhor desempenho em relação ao valor mínimo do erro quadrático médio em regime permanente. No entanto, o uso de tal implementação é muitas vezes preterido com vistas ao uso das implementações IFIR adaptativas com interpolador fixo (AIFIR e ABIFIR), uma vez que estas últimas em geral apresentam melhores características de convergência e estabilidade. Os problemas de convergência dos filtros FABIFIR são resultantes do processo adaptativo dos dois filtros em cascata que compõem a estrutura IFIR. O primeiro problema está relacionado à inicialização dos vetores de coeficientes \mathbf{g} e \mathbf{w}_s . No caso da

inicialização de ambos com zero, a adaptação fica “congelada”, já que \mathbf{G} e \mathbf{W}_s são matrizes de zeros e, com isso, $\hat{\mathbf{x}}'(n)$ e $\tilde{\mathbf{x}}'(n)$ tornam-se sempre iguais a zero em (13) e (14). Um segundo problema de convergência do filtro FABIFIR está relacionado ao valor atingido pelos elementos dos vetores \mathbf{g} e \mathbf{w}_s ao final do processo adaptativo. Observe que o vetor de coeficientes equivalente \mathbf{w}'_i depende de \mathbf{g} e \mathbf{w}_s , conforme descrito em (10). A partir dessa expressão, verifica-se que um dado \mathbf{w}'_i pode ser obtido para diferentes vetores \mathbf{g} e \mathbf{w}_s . Como exemplo, o uso de vetores de coeficientes $\bar{\mathbf{g}} = c\mathbf{g}$ e $\bar{\mathbf{w}}_s = (1/c)\mathbf{w}_s$, com c denotando um escalar arbitrário, leva a um mesmo vetor \mathbf{w}'_i do que \mathbf{g} e \mathbf{w}_s , i.e.,

$$\mathbf{w}'_i = \mathbf{T}\mathbf{G}\mathbf{w}_s = \mathbf{T}\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{w}}_s = \mathbf{T}(c\mathbf{G})(\mathbf{w}_s/c). \quad (16)$$

Considerando (16), é possível concluir que existem infinitas combinações de \mathbf{g} e \mathbf{w}_s que produzem um mesmo vetor \mathbf{w}'_i . Por exemplo, em situações nas quais c apresenta valores relativamente grandes quando comparados a $1/c$, \mathbf{w}'_i será obtido a partir de um vetor $\bar{\mathbf{g}} = c\mathbf{g}$ cujos elementos apresentam valores grandes e um vetor $\bar{\mathbf{w}}_s = (1/c)\mathbf{w}_s$ cujos elementos exibem valores pequenos. Tal característica é indesejável em implementações que utilizam processadores com aritmética de ponto fixo em função da adoção de um número limitado de bits para a representação de cada coeficiente. Nesses casos, valores muito pequenos implicam perda de precisão e valores muito grandes podem exceder o valor máximo admitido pela representação adotada (*overflow*). Como consequência, tem-se uma ameaça tanto à estabilidade numérica quanto à convergência do algoritmo.

Com o objetivo de melhorar o processo de convergência dos filtros FABIFIR, uma nova estratégia para adaptação de coeficientes é proposta neste trabalho. A idéia dessa estratégia é explorar o papel do coeficiente central do interpolador na estrutura FABIFIR. Tal coeficiente tem a função específica de reproduzir os coeficientes do filtro esparsos na estrutura equivalente, o que pode ser observado avaliando o papel multiplicativo de g_1 em (10) e (11) em relação aos coeficientes do filtro esparsos. Assim, em um processo adaptativo, é possível fixar o valor do coeficiente central do interpolador em um valor arbitrário denotado por k sem implicar qualquer perda de generalidade da estrutura equivalente. Essa estratégia resolve o problema de inicialização dos vetores de coeficientes descrito anteriormente, mantendo o vetor de coeficientes do interpolador \mathbf{g} sempre diferente de zero. Além disso, o problema da estabilidade numérica do algoritmo também é resolvido, uma vez que um determinado vetor de coeficientes \mathbf{w}'_i só pode ser obtido a partir de um único vetor de coeficientes do filtro esparsos \mathbf{w}_s e um único vetor de coeficientes do interpolador com coeficiente central fixado em k , denotado aqui por $\mathbf{g}_{[k]}$. Essa propriedade é demonstrada na próxima seção.

A. Unicidade de Solução

Se a estratégia proposta (fixação do coeficiente central do interpolador em k) levar a uma solução única de \mathbf{w}_s e $\mathbf{g}_{[k]}$ para um dado \mathbf{w}'_i , a igualdade

$$\mathbf{w}'_i = \mathbf{T}\mathbf{G}_{[k]a}\mathbf{w}_{sa} = \mathbf{T}\mathbf{G}_{[k]b}\mathbf{w}_{sb} \quad (17)$$

deverá ser satisfeita apenas para $\mathbf{w}_{sa} = \mathbf{w}_{sb}$ e $\mathbf{g}_{[k]a} = \mathbf{g}_{[k]b}$. Em (17), \mathbf{w}_{sa} e \mathbf{w}_{sb} são vetores esparsos genéricos, enquanto $\mathbf{G}_{[k]a}$ e $\mathbf{G}_{[k]b}$ são matrizes de convolução obtidas a partir de vetores genéricos $\mathbf{g}_{[k]a}$ e $\mathbf{g}_{[k]b}$ com coeficientes centrais fixados em k . Analisando a estrutura da matriz resultante do produto $\mathbf{T}\mathbf{G}_{[k]}$, observa-se que tal matriz possui dimensão $N \times N$ e que os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a k . Com isso, podemos escrever

$$\mathbf{T}\mathbf{G}_{[k]} = k\mathbf{I}_N + \underline{\mathbf{G}}_{[k]} \quad (18)$$

onde \mathbf{I}_N é uma matriz identidade de dimensão $N \times N$ e $\underline{\mathbf{G}}_{[k]}$ é uma matriz obtida zerando os elementos da diagonal principal de $\mathbf{T}\mathbf{G}_{[k]}$. Considerando (18), (17) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_i &= (k\mathbf{I}_N + \underline{\mathbf{G}}_{[k]a})\mathbf{w}_{sa} = (k\mathbf{I}_N + \underline{\mathbf{G}}_{[k]b})\mathbf{w}_{sb} \\ &= k\mathbf{w}_{sa} + \underline{\mathbf{G}}_{[k]a}\mathbf{w}_{sa} = k\mathbf{w}_{sb} + \underline{\mathbf{G}}_{[k]b}\mathbf{w}_{sb}. \end{aligned} \quad (19)$$

Analisando os elementos de (19), é possível concluir que: i) os vetores resultantes dos produtos $k\mathbf{w}_{sa}$ e $k\mathbf{w}_{sb}$ possuem elementos diferentes de zero apenas nas posições cujos índices são múltiplos de L [veja (1)]; e ii) os vetores resultantes dos produtos $\underline{\mathbf{G}}_{[k]a}\mathbf{w}_{sa}$ e $\underline{\mathbf{G}}_{[k]b}\mathbf{w}_{sb}$ também são esparsos e possuem elementos diferentes de zero apenas nas posições cujos índices não são múltiplos de L . Assim, (19) pode ser separada em duas expressões dadas por

$$k\mathbf{w}_{sa} = k\mathbf{w}_{sb} \quad (20)$$

e $\underline{\mathbf{G}}_{[k]a}\mathbf{w}_{sa} = \underline{\mathbf{G}}_{[k]b}\mathbf{w}_{sb}$. Sendo k um escalar, conclui-se que (20) e, conseqüentemente, (17) só podem ser satisfeitas se $\mathbf{w}_{sa} = \mathbf{w}_{sb}$. Portanto, é possível afirmar que existe apenas um único vetor \mathbf{w}_s correspondente a um específico \mathbf{w}'_i . Considerando (5), (10) e ainda que $\mathbf{w}_{sa} = \mathbf{w}_{sb}$, é possível reescrever (17) como

$$\mathbf{w}'_i = \mathbf{T}\mathbf{W}_{sa}\mathbf{g}_{[k]a} = \mathbf{T}\mathbf{W}_{sb}\mathbf{g}_{[k]b} = \mathbf{T}\mathbf{W}_{sa}\mathbf{g}_{[k]b}. \quad (21)$$

Em situações práticas, a matriz resultante do produto $\mathbf{T}\mathbf{W}_{sa}$ possui dimensão $N \times M$ e posto completo igual a M . Com isso, $\mathbf{T}\mathbf{W}_{sa}$ em geral possui uma inversa à esquerda [8], aqui denotada por $(\mathbf{T}\mathbf{W}_{sa})^+$, de tal forma que $(\mathbf{T}\mathbf{W}_{sa})^+\mathbf{T}\mathbf{W}_{sa} = \mathbf{I}_M$, com \mathbf{I}_M representando uma matriz identidade de dimensão $M \times M$. Assim, pré-multiplicando os elementos de (21) por $(\mathbf{T}\mathbf{W}_{sa})^+$, obtém-se

$$\mathbf{g}_{[k]a} = \mathbf{g}_{[k]b}. \quad (22)$$

A partir de (22), conclui-se que, assim como para \mathbf{w}_s , um \mathbf{w}'_i específico pode ser obtido a partir de um único vetor $\mathbf{g}_{[k]}$. Como resultado, verifica-se a unicidade tanto de \mathbf{w}_s quanto de $\mathbf{g}_{[k]}$ para um dado \mathbf{w}'_i , garantindo a estabilidade numérica do algoritmo proposto em contraste às implementações FABIFIR convencionais.

B. Atualização dos Coeficientes do Interpolador

Com o objetivo de obter a equação para atualização dos coeficientes do interpolador e do filtro esparsos usando os algoritmos LMS e NLMS, uma abordagem com restrições é aqui

utilizada [2], [9]. No caso do interpolador, a restrição correspondente à fixação do seu coeficiente central em k pode ser descrita como

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{g}_{[k]}(n) = k \quad (23)$$

onde

$$\mathbf{c}_i = \left[\underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{L-1 \text{ elementos}} \ 1 \ \underbrace{0 \ \cdots \ 0}_{L-1 \text{ elementos}} \right]^T \quad (24)$$

é um vetor de restrição. Considerando agora o algoritmo LMS, tem-se, como objetivo, minimizar o erro quadrático médio $E[e^2(n)]$ a partir da sua estimativa instantânea $e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2$. Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange [9] para incluir a correspondente restrição na função custo, obtém-se

$$J(n) = e^2(n) + \theta(n) [\mathbf{c}_i^T \mathbf{g}_{[k]}(n) - k]. \quad (25)$$

Denotando $\nabla_{\mathbf{g}_{[k]}} J(n)$ como o gradiente da função custo com respeito ao vetor de coeficientes do interpolador, a equação de atualização de seus coeficientes considerando o algoritmo LMS é

$$\mathbf{g}_{[k]}(n+1) = \mathbf{g}_{[k]}(n) - \mu_g \nabla_{\mathbf{g}_{[k]}} J(n) \quad (26)$$

com μ_g representando o passo de adaptação. Calculando $\nabla_{\mathbf{g}_{[k]}} J(n)$, substituindo a expressão obtida em (26) e resolvendo a equação resultante de forma análoga a [9], tem-se a seguinte expressão de adaptação dos coeficientes do interpolador com coeficiente central fixado em k :

$$\mathbf{g}_{[k]}(n+1) = \mathbf{P}_i \mathbf{g}_{[k]}(n) + 2\mu_g e(n) \mathbf{P}_i \mathbf{W}_s^T(n) \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n) + k \mathbf{c}_i \quad (27)$$

com $\mathbf{P}_i = \mathbf{I}_M - \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^T$. Conforme descrito na Seção II, o cálculo de $\mathbf{W}_s^T(n) \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n)$ pode ser realizado de forma recursiva e aproximada visando reduzir a carga computacional [7], [10], o que resulta em

$$\mathbf{g}_{[k]}(n+1) = \mathbf{P}_i \mathbf{g}_{[k]}(n) + 2\mu_g e(n) \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{x}}'(n) + k \mathbf{c}_i. \quad (28)$$

O custo computacional para implementação da atualização dos coeficientes descrita em (28) é ligeiramente menor do que o custo para implementação da adaptação dos coeficientes da implementação padrão do filtro FABIFIR. Isso é consequência da presença da matriz \mathbf{P}_i em (28), o que implica a atualização dos coeficientes do interpolador, mantendo o coeficiente central fixo. Além disso, o elemento $k \mathbf{c}_i$ em (28) não resulta em qualquer custo de implementação adicional, uma vez que tal elemento apenas indica que o coeficiente central deve ser mantido fixo no valor k após cada iteração.

No caso do algoritmo NLMS, a equação para atualização dos coeficientes do filtro interpolador com coeficiente central fixado em k é obtida minimizando a norma euclidiana de

$$\delta \mathbf{g}_{[k]}(n+1) = \mathbf{g}_{[k]}(n+1) - \mathbf{g}_{[k]}(n) \quad (29)$$

sujeita às restrições

$$\mathbf{g}_{[k]}(n+1) \mathbf{W}_s^T \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n) = d(n) \quad (30)$$

e

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{g}_{[k]}(n+1) = k. \quad (31)$$

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, a seguinte função custo com restrições é então obtida:

$$J(n) = \left\| \mathbf{g}_{[k]}(n+1) \right\|^2 + \theta_1(n) [d(n) - \mathbf{g}_{[k]}(n+1) \mathbf{W}_s^T \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n)] + \theta_2(n) [\mathbf{c}_i^T \mathbf{g}_{[k]}(n+1) - k]. \quad (32)$$

Fazendo o gradiente de (32) com respeito a $\mathbf{g}_{[k]}(n+1)$ igual a zero, resolvendo a equação resultante para os multiplicadores de Lagrange de forma análoga a [9] e considerando a implementação do cálculo de $\mathbf{W}_s^T \mathbf{T}^T \mathbf{x}(n)$ com aproximações conforme descrito na Seção II, a seguinte expressão para adaptação dos coeficientes do interpolador usando o algoritmo NLMS é obtida

$$\mathbf{g}_{[k]}(n+1) = \mathbf{P}_i \mathbf{g}_{[k]}(n) + \frac{\alpha_g}{\left\| \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{x}}'(n) \right\|^2 + \psi_g} e(n) \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{x}}'(n) + k \mathbf{c}_i \quad (33)$$

com α_g representando o parâmetro de controle e ψ_g uma constante usada para evitar eventuais divisões por valores muito próximos de zero. Assim, como no caso do algoritmo LMS, o custo computacional para implementação de (33) é ligeiramente inferior ao verificado na implementação convencional do filtro FABIFIR.

C. Atualização dos Coeficientes do Filtro Esperso

O desenvolvimento de expressões para atualização dos coeficientes do filtro esperso é realizado levando em conta as restrições decorrentes da esparsidade de tal filtro. Assim, conforme descrito em [2] e [9], tais restrições são expressas como

$$\mathbf{C}^T \mathbf{w}_s(n) = \mathbf{f} \quad (34)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de restrições e \mathbf{f} , o vetor de resposta [9]. Dessa forma, similarmente ao procedimento usado em [9] e considerando ainda que o vetor de coeficientes do interpolador é variante no tempo, obtém-se, para o algoritmo LMS, a seguinte equação de atualização:

$$\mathbf{w}_s(n+1) = \mathbf{P} \mathbf{w}_s(n) + 2\mu_w e(n) \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}'(n) \quad (35)$$

onde $\mathbf{P} = \mathbf{I}_N - \mathbf{C} \mathbf{C}^T$ e μ_w é o passo de adaptação. O custo computacional para implementação de (35) é o mesmo que o custo para implementação de (14). De forma análoga, para o algoritmo NLMS, obtém-se

$$\mathbf{w}_s(n+1) = \mathbf{P} \mathbf{w}_s(n) + \frac{\alpha_w}{\left\| \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}'(n) \right\|^2 + \psi_w} e(n) \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}'(n) \quad (36)$$

com α_w e ψ_w representando parâmetros de controle similares a α_g e ψ_g , respectivamente.

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, resultados de simulação são apresentados com o objetivo de avaliar o desempenho da estratégia proposta (FABIFIR modificada – MFABIFIR) quando comparada com a implementação FABIFIR convencional. As estruturas FABIFIR e MFABIFIR são aplicadas a problemas de modelagem de sistemas e avaliadas inicialmente em termos do erro quadrático médio (EQM). As curvas de EQM são obtidas a partir de simulações de Monte Carlo (média de 100 realizações). As estruturas FABIFIR e MFABIFIR também são confrontadas em termos das normas quadráticas dos vetores de coeficientes \mathbf{w}_s e \mathbf{g} ao final de cada uma das realizações. O objetivo aqui é verificar a variabilidade de tais vetores ao final do processo adaptativo. As implementações dos filtros FABIFIR e MFABIFIR utilizadas possuem tamanho de memória igual ao das plantas consideradas em cada exemplo, fator de esparsidade $L=2$ e vetor de coeficientes do interpolador

inicializado com $\mathbf{g}(0)=[0 \ 1 \ 0]^T$. O coeficiente central do interpolador na estrutura MFABIFIR é fixado em $k=1$. O algoritmo adaptativo utilizado é o NLMS, os sinais de entrada são brancos e gaussianos com variância unitária e o ruído, adicionado ao sinal de saída da planta, é também branco e gaussiano com variância $\sigma_z^2=10^{-8}$.

A. Exemplo 1

A planta para este primeiro exemplo tem resposta ao impulso ilustrada na Fig. 2 (linha sólida) com tamanho de memória 71. Os parâmetros do algoritmo NLMS são: $\alpha_g = \alpha_w = 0,5$ e $\psi_g = \psi_w = 1$. As curvas de EQM obtidas são apresentadas na Fig. 3. A partir dessa figura, observa-se um desempenho similar em regime permanente das estruturas FABIFIR e MFABIFIR, atestando que os coeficientes dos vetores equivalentes de ambas estruturas atingem praticamente um mesmo valor final. Por outro lado, a partir dos valores finais das normas quadráticas dos vetores \mathbf{w}_s e \mathbf{g} ilustrados na Fig. 4, observa-se uma grande flutuação de valores para o filtro FABIFIR (linhas sólidas cinza e preta), enquanto a variação é praticamente imperceptível para o filtro MFABIFIR proposto (linhas pontilhada e tracejada).

B. Exemplo 2

A resposta ao impulso da planta deste exemplo é ilustrada na Fig. 2 (linha pontilhada) com tamanho de memória 101. Os parâmetros do algoritmo NLMS são: $\alpha_w = 0,5$, $\alpha_g = 0,1$ e $\psi_g = \psi_w = 10$. As curvas de EQM obtidas são mostradas na Fig. 5. Dessa figura, constata-se que as estruturas FABIFIR e MFABIFIR apresentam desempenho muito próximo em termos do EQM. No entanto, a variabilidade dos vetores de coeficientes da estrutura FABIFIR é muito maior do que a dos vetores da estrutura MFABIFIR, o que pode ser inferido a partir da Fig. 6, atestando melhores propriedades numéricas para a estrutura proposta.

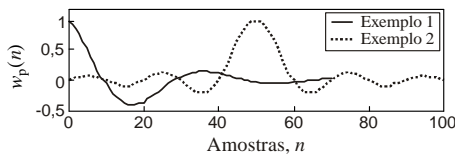


Fig. 2. Respostas ao impulso das plantas utilizadas nos Exemplos 1 e 2.

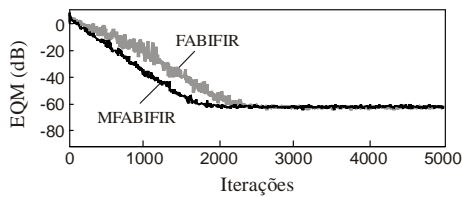


Fig. 3. Curvas de EQM para o Exemplo 1.

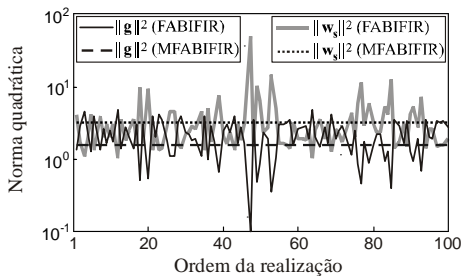


Fig. 4. Normas quadráticas dos vetores \mathbf{w}_s e \mathbf{g} ao final de cada realização da simulação de Monte Carlo para o Exemplo 1.

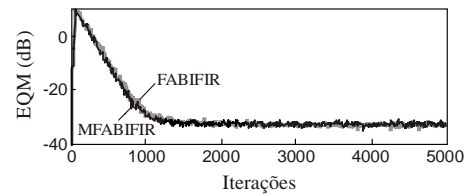


Fig. 5. Curvas de EQM para o Exemplo 2.

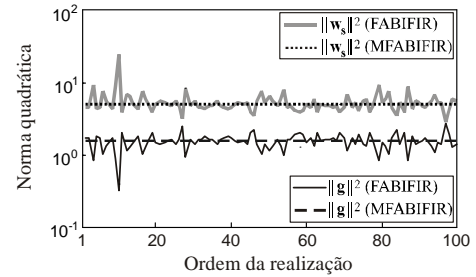


Fig. 6. Normas quadráticas dos vetores \mathbf{w}_s e \mathbf{g} ao final de cada realização da simulação de Monte Carlo para o Exemplo 2.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, uma estratégia eficiente para implementação de filtros IFIR completamente adaptativos foi apresentada. Essa estratégia baseia-se na modificação da estrutura do interpolador visando superar problemas de convergência e estabilidade numérica. O algoritmo obtido apresenta tanto desempenho quanto propriedades numéricas superiores aos das demais implementações IFIR completamente adaptativas, com um custo computacional ligeiramente inferior. Resultados de simulação numérica foram apresentados corroborando a eficiência da estratégia proposta.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4 ed., Prentice-Hall, 2002.
- [2] O. J. Tobias and R. Seara, "Analytical model for the first and second moments of an adaptive interpolated FIR filter using the constrained filtered-X LMS algorithm," *IEE Proc.- Vis., Image, Signal Process.*, vol. 148, no. 5, pp. 337-347, Oct. 2001.
- [3] K. Rajgopal and S. Venkataraman, "A delayless adaptive IFIR filterbank structure for wideband and narrowband active noise control," *Signal Processing*, vol. 86, no. 11, pp. 3421-3431, Nov. 2006.
- [4] S. Nielsen and J. Sparso, "Designing asynchronous circuits for low power: An IFIR filter bank for a digital hearing aid," *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 2, pp. 268-281, Feb. 1999.
- [5] R. de Lamare and R. Sampaio-Neto, "Reduced-rank interference suppression for DS-CDMA using adaptive interpolated FIR filters with adaptive interpolators," in *Proc. 15th IEEE Int. Symp. Personal, Indoor and Mobile Radio Comm.*, Barcelona, Spain, Sept. 2004, pp. 150-154.
- [6] S.-S. Lin and W.-R. Wu, "A low-complexity adaptive echo canceller for xDSL Applications," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, no. 5, pp. 1461-1465, May. 2004.
- [7] E. L. O. Batista, O. J. Tobias, and R. Seara, "A fully adaptive IFIR filter with removed border effect," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Las Vegas, USA, Apr. 2008, pp. 3821-3824.
- [8] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.
- [9] E. L. O. Batista, O. J. Tobias, and R. Seara, "A sparse-interpolated scheme for implementing adaptive Volterra filters," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp. 2022-2035, Apr. 2010.
- [10] E. L. O. Batista, O. J. Tobias, and R. Seara, "New insights in adaptive cascaded FIR structure: application to fully adaptive interpolated FIR structures," in *Proc. 15th European Signal Processing Conf. (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, vol. 1, Sep. 2007, pp. 370-374.