

# Comunicação Multiusuário Baseada na Transformada Discreta Fracional de Fourier

Juliano B. Lima e Ricardo M. Campello de Souza

**Resumo**—Neste trabalho, discute-se uma técnica de comunicação multiusuário baseada na transformada discreta fracional de Fourier (DFrFT). Os autovetores da matriz de transformação da DFrFT são usados como sequências dos usuários, as quais são transmitidas sobre um canal somador real. Em comparação com outras transformadas já empregadas no mesmo contexto, a vantagem de utilizar a DFrFT é que as sequências são construídas a partir de um procedimento sistemático e o número de subespaços gerados, que determina o número máximo de usuários simultâneos de um esquema, é arbitrário.

**Palavras-Chave**—Comunicação multiusuário, transformada discreta fracional de Fourier, autovalores, autovetores.

**Abstract**—In this paper, a multiuser communication technique based on the discrete fractional Fourier transform (DFrFT) is discussed. Eigenvectors of the DFrFT transform matrix are used as user sequences, which are transmitted over a real adder channel. Compared to other transforms used in the same context, the advantage of using the DFrFT is that the sequences can be generated from a systematic procedure and the number of generated subspaces, which determines the maximum number of simultaneous users of a scheme, is arbitrary.

**Keywords**—Multiuser communication, discrete fractional Fourier transform, eigenvalues, eigenvectors.

## I. INTRODUÇÃO

A transformada fracional de Fourier é uma generalização da transformada de Fourier ordinária. Se interpretarmos o cálculo de uma transformada de Fourier como a aplicação do operador  $\mathcal{F}$  a um sinal, em sua versão fracionária, a transformada estará associada ao operador  $\mathcal{F}^a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Sempre que  $a$  é não-inteiro, a transformada fracional de um sinal originalmente no domínio do tempo corresponde a algo que se encontra num domínio intermediário, entre tempo e frequência [1]. Partindo deste princípio, aplicações da transformada fracional em áreas como Óptica, Comunicações e Processamento de Sinais têm sido desenvolvidas [2], [3].

Neste artigo, a transformada discreta fracional de Fourier (DFrFT), que generaliza a transformada discreta de Fourier (DFT), é usada como base para um esquema de comunicação multiusuário. A ideia original de esquemas desse tipo, baseados em transformadas discretas, foi inicialmente proposta por Campello e de Oliveira [4] e consiste em utilizar como sequências dos usuários autovetores da matriz de transformação considerada. Assumindo que essas sequências

são transmitidas por um canal aditivo sobre os reais, elas podem ser posteriormente separadas, desde que não pertençam a um mesmo subespaço vetorial. Isso significa que o número de usuários simultâneos num esquema de comunicação como esse é limitado pelo número de autovalores distintos que a matriz de transformação possui.

Sob o aspecto mencionado, a DFrFT é vantajosa em relação a outras transformadas cujo número de autovalores distintos é fixo e independente do tamanho da matriz de transformação. A matriz da DFT, por exemplo, possui apenas quatro autovalores distintos, nomeadamente, 1,  $-1$ ,  $j$  e  $-j$  [5]; as matrizes das transformadas discretas do cosseno (DCT) dos tipos I e IV possuem apenas dois autovalores distintos [6]. O número de autovalores distintos da matriz da DFrFT depende do parâmetro  $a$ . Ver-se-á que, quando  $a = 0,5$ , por exemplo, esse número é igual a oito. Além disso, os autovetores (sequências dos usuários) da DFrFT são obtidos por meio de um procedimento sistemático e possuem todas as componentes reais. A DCT do tipo II e a do tipo III, por exemplo, apesar de possuírem números arbitrários de autovalores, possuem autovetores com componentes complexas e cuja obtenção envolve um maior número de cálculos [6].

Após esta introdução, na Seção II, é revisada a definição da transformada discreta fracional de Fourier. Na Seção III, é apresentada a ideia da comunicação multiusuário baseada na DFrFT; exemplos são desenvolvidos e algumas considerações acerca da implementação prática da técnica são discutidas. Finalmente, na Seção V, são apresentadas as considerações conclusivas deste trabalho.

## II. A TRANSFORMADA DISCRETA FRACIONAL DE FOURIER

Nesta seção, são revisados os principais aspectos teóricos relacionados à transformada discreta fracional de Fourier [7]. A definição da DFrFT requer, em particular, o conhecimento de alguns fatos sobre a autoestrutura da DFT, os quais são apresentados a seguir.

### A. Autoestrutura da transformada discreta de Fourier

A transformada discreta de Fourier de uma sequência  $\mathbf{x} = (x_i)$ ,  $x_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , corresponde à sequência  $\mathbf{X} = (X_k)$ ,  $X_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , cujas componentes são calculadas por

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-\frac{2\pi k i}{N} j}. \quad (1)$$

Juliano B. Lima, Grupo de Pesquisa em Redes e Comunicações, Escola Politécnica de Pernambuco, Universidade de Pernambuco, Recife, Brasil, E-mail: juliano.bandeira@poli.br.

Ricardo M. Campello de Souza, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, E-mail: ricardo@ufpe.br.

A obtenção de  $\mathbf{X}$  pode ser expressa pela equação matricial

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad (2)$$

em que  $\mathbf{F}$  representa a matriz de transformação cujo elemento da  $k$ -ésima linha e da  $i$ -ésima coluna é dado por  $F_{k,i} = e^{-\frac{2\pi ki}{N}j}$ . Mostra-se que os únicos autovalores da matriz  $\mathbf{F}$  são 1,  $-1$ ,  $j$  e  $-j$ , cujas multiplicidades, as quais dependem de  $N$ , são apresentadas na Tabela I [5]. Os autovetores de  $\mathbf{F}$  relacionados aos autovalores  $\pm 1$  (resp.  $\pm j$ ) possuem simetria par (resp. ímpar). Além disso, há procedimentos sistemáticos para a construção de cada um desses autovetores [4].

TABELA I: Multiplicidades dos autovalores de  $\mathbf{F}$ , a matriz da transformada discreta de Fourier com dimensões  $N \times N$ .

| $N$    | Mult. 1 | Mult. $-1$ | Mult. $j$ | Mult. $-j$ |
|--------|---------|------------|-----------|------------|
| $4n$   | $n+1$   | $n$        | $n-1$     | $n$        |
| $4n+1$ | $n+1$   | $n$        | $n$       | $n$        |
| $4n+2$ | $n+1$   | $n+1$      | $n$       | $n$        |
| $4n+3$ | $n+1$   | $n+1$      | $n$       | $n+1$      |

O resultado do cálculo de potências inteiras de  $\mathbf{F}$  é bem conhecido. Essa operação corresponde ao cálculo de sucessivas transformadas de  $\mathbf{x}$ , a partir de onde se verifica que  $\mathbf{F}$  possui ciclo igual a quatro, isto é,  $\mathbf{F}^4 = \mathbf{I}$ , em que  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade. A obtenção da transformada fracional discreta de Fourier requer algum método para calcular  $\mathbf{F}^a$ , em que  $a \in \mathbb{R}$ . A abordagem proposta em [7] é apresentada resumidamente a seguir.

### B. A transformada discreta fracional de Fourier

A matriz  $\mathbf{F}^a$ , correspondente à transformada discreta fracional de Fourier, é obtida a partir da expansão espectral de  $\mathbf{F}$ . De modo mais específico, o elemento da  $m$ -ésima linha e da  $n$ -ésima coluna de  $\mathbf{F}^a$  é dado por

$$F_{m,n}^a = \sum_{\substack{k=0 \\ (v_k \neq 0)}}^{2\lfloor N/2 \rfloor} v_{k,m}(-j)^{ka} v_{k,n}, \quad (3)$$

$m, n = 1, 2, \dots, N$ . Na Equação (3),  $v_{k,i}$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $\mathbf{v}_k$ , o  $k$ -ésimo vetor de um conjunto ortonormal de autovetores de  $\mathbf{F}$ , associado ao autovalor  $\lambda_k \in \{1, -1, j, -j\}$ . Os limites não usuais do somatório se devem às multiplicidades dos autovalores, para casos em que  $N$  é par. Também devido às multiplicidades dos  $\lambda_k$ , o referido conjunto de autovetores não é único. Assim, é necessário um procedimento sistemático que direcione a escolha de tal conjunto e que permita, segundo um critério objetivo, uma ordenação não ambígua dos vetores encontrados.

A questão descrita é solucionada pelo uso da matriz

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} C_0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & C_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & C_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

em que  $C_n = 2[\cos(\frac{2\pi}{N}n) - 2]$ . As matrizes  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{F}$  comutam, o que garante que ambas possuem um conjunto de autovetores

em comum [8]. Além disso, todos os autovalores de  $\mathbf{S}$  são distintos. Isso significa que, obtidos os  $N$  autovetores de  $\mathbf{S}$ , ter-se-á encontrado o conjunto de autovetores de  $\mathbf{F}$  a ser empregado na Equação (3).

Para a obtenção dos autovetores de  $\mathbf{S}$ , considera-se a matriz

$$\mathbf{P} = \sqrt{2}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & 1 & 1 & & \\ 0 & & & 1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & 1 & & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

a qual possui dimensões  $N \times N$ . A matriz  $\mathbf{P}$  satisfaz  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$  e a transformação de similaridade

$$\mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\mathbf{v} & 0 \\ 0 & \mathbf{O}\mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (6)$$

produz as matrizes simétricas tridiagonais  $\mathbf{E}\mathbf{v}$  e  $\mathbf{O}\mathbf{d}$ , com dimensões  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$  e  $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ , respectivamente. A unicidade do conjunto de autovetores procurado é confirmada pelo fato de que todos os autovalores de matrizes tridiagonais são distintos [8]. Finalmente, os autovetores pares de  $\mathbf{S}$  são obtidos por

$$\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{P} [\mathbf{e}_k^T | 0 \dots 0]^T, k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \quad (7)$$

em que  $\mathbf{e}_k$  é um autovetor de  $\mathbf{E}\mathbf{v}$ ; os autovetores ímpares de  $\mathbf{S}$  são obtidos por

$$\mathbf{v}_{2k+1} = \mathbf{P} [0 \dots 0 | \mathbf{o}_k^T]^T, k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{N-3}{2} \right\rfloor, \quad (8)$$

em que  $\mathbf{o}_k$  é um autovetor de  $\mathbf{O}\mathbf{d}$ . Quando  $N$  é par, o vetor  $\mathbf{v}_{N-1}$  é nulo. Os autovetores  $\mathbf{v}_k$  são ordenados segundo o número de inversões de sinal verificado ao longo de suas componentes.

Um aspecto importante a ser percebido é que os autovetores  $\mathbf{v}_k$  não dependem do parâmetro  $a$ , mas apenas do valor de  $N$ , a dimensão da transformada a ser definida. Entretanto, o número de autovalores distintos de  $\mathbf{F}^a$ , importante para os esquemas de comunicação multiusuário discutidos na próxima seção, é determinado por  $a$  e por  $N$ . Da Equação (3), tem-se que os autovalores de  $\mathbf{F}^a$ , considerando um valor particular de  $a$ , correspondem aos números  $(-j)^{ka}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2\lfloor N/2 \rfloor$  (se  $N$  for par,  $(-j)^{(N-1)a}$  pode não ser um autovalor). Assim, o número máximo de autovalores distintos da matriz fracional coincide com a ordem multiplicativa de  $(-j)^a$ , ou seja, com o menor valor positivo de  $k$  para o qual se tem  $(-j)^{ka} = 1$ . Na introdução deste artigo, comentou-se que, se  $a = 0.5$ , o número máximo de autovalores distintos de  $\mathbf{F}^a$  é oito. Agora, essa informação é justificada pelo fato de se ter  $(-j)^{0.5} = \sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2$  e  $(\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2)^8 = 1$ .

<sup>1</sup>Na Equação (5),  $N$  é ímpar; para valores pares de  $N$ , a matriz  $\mathbf{P}$  é semelhante à matriz apresentada [7].

### III. COMUNICAÇÃO MULTIUSUÁRIO BASEADA NA DFRFT

Nesta seção, são apresentados esquemas de comunicação multiusuário baseados na autoestrutura da DFRFT. Conforme adiantado na parte introdutória deste artigo, em tais esquemas, cada usuário transmite seus dados sobre autovetores associados a um autovalor específico de uma matriz de transformação. No presente contexto, a matriz de transformação considerada é a matriz  $\mathbf{F}^a$ . No conteúdo discutido a seguir, o foco não é a forma como os dados de um usuário são relacionados aos autovetores disponíveis, mas sim a maneira como autovetores de usuários distintos podem ser separados, na recepção, após a transmissão por um canal real aditivo.

#### A. Esquema com 2 usuários

Para a concepção de um esquema com 2 usuários, é necessária uma transformada cuja matriz possua pelo menos 2 autovalores distintos. Neste caso, pode-se empregar a transformada discreta de Fourier clássica, a qual possui  $\mathbf{F}^a$ ,  $a = 1$ , como matriz de transformação [4]. As sequências dos usuários 1 e 2 são, respectivamente, os autovetores denotados por  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$ , e associados aos autovalores  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ . Ao interferirem de maneira aditiva no canal,  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  produzem a sequência

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad (9)$$

a qual será efetivamente recebida. Aplicando a transformada a  $\mathbf{y}$ , tem-se

$$\mathbf{F}\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}\mathbf{x}_2 = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \quad (10)$$

Resolvendo o sistema com as Equações (9) e (10), recupera-se  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  por

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{y} + \mathbf{F}\mathbf{y}}{2} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{F}\mathbf{y}}{2}. \quad (11)$$

#### B. Esquema com 4 usuários

A implementação de um esquema com 4 usuários é possível, ainda, pelo uso da matriz  $\mathbf{F}$  [4]. Neste caso, as sequências dos usuários são  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$  e  $\mathbf{x}_4$ , e estão associadas, respectivamente, aos autovalores  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = j$  e  $\lambda_4 = -j$ . Pela aplicação sucessiva de  $\mathbf{F}$  à sequência  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4$ , a qual é produzida pelo canal aditivo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + j\mathbf{x}_3 - j\mathbf{x}_4 = \mathbf{F}\mathbf{y} \\ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4 = \mathbf{F}^2\mathbf{y} \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 - j\mathbf{x}_3 + j\mathbf{x}_4 = \mathbf{F}^3\mathbf{y} \end{cases}, \quad (12)$$

cujas soluções é dada por

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathcal{E}\{\mathbf{y}\} + \mathcal{E}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\}}{2}, \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\mathcal{E}\{\mathbf{y}\} - \mathcal{E}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\}}{2}, \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{\mathcal{O}\{\mathbf{y}\} - j\mathcal{O}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\}}{2}, \quad (15)$$

e

$$\mathbf{x}_4 = \frac{\mathcal{O}\{\mathbf{y}\} + j\mathcal{O}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\}}{2}. \quad (16)$$

Na solução apresentada,  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  e  $\mathcal{O}\{\cdot\}$  denotam, respectivamente, a parte par e a parte ímpar do argumento.

#### C. Esquema com 8 usuários

Para a implementação de um esquema com 8 usuários, a matriz  $\mathbf{F}^a$  com pelo menos 8 autovalores distintos é utilizada. Fazendo  $a = 0,5$ , as sequências dos usuários são os autovetores  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ , associados aos autovalores  $\lambda_k = (-j)^{(k-1)0,5} = (\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2)^{(k-1)}$ . Pela aplicação sucessiva de  $\mathbf{F}^{0,5}$  à sequência  $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^8 \mathbf{x}_k$ , a qual é produzida pelo canal aditivo, obtemos o sistema de equações (17). A solução deste sistema é dada pelas equações (18).

Alguns aspectos relacionados à recuperação das sequências dos usuários a partir da sequência recebida  $\mathbf{y}$  merecem destaque. Em primeiro lugar, todas as soluções apresentadas envolvem equações vetoriais. Assim, ao calcularmos  $\mathbf{x}_1$ , por exemplo, estamos, na verdade, calculando todas as componentes deste vetor; as operações de adição e de produto entre vetores bem como entre um escalar e um vetor, necessárias à obtenção das sequências, devem, naturalmente, respeitar a álgebra própria desse contexto.

Outra observação importante é que as soluções literais dos sistemas de equações para recuperação das sequências, tanto para o esquema com 8 usuários como para os esquemas anteriormente apresentados, só precisam ser encontradas uma vez. A cada novo vetor  $\mathbf{y}$  recebido, a solução literal é aplicada e os valores particulares das sequências correspondentes são obtidos. É relevante mencionar, ainda, que, ao se projetar um esquema com um número de usuários igual a uma potência de 2, as relações de simetria entre os autovalores utilizados levam a soluções para as quais podem ser concebidas arquiteturas eficientes, no que diz respeito ao número de operações aritméticas envolvidas. Este fato é ilustrado na Figura 1, em que um possível diagrama de blocos para a obtenção das sequências dos usuários a partir de  $\mathbf{y}$  é apresentado.

Seguindo o princípio descrito ao longo desta seção, esquemas com mais usuários podem ser implementados. Um esquema com 16 usuários, por exemplo, seria obtido pelo uso da matriz  $\mathbf{F}^{0,25}$ ; um esquema com 32 usuários seria obtido pelo uso da matriz  $\mathbf{F}^{0,125}$  e assim por diante. De maneira geral, um esquema com  $m$  usuários seria obtido pelo uso da matriz  $\mathbf{F}^{\frac{4}{m}}$ . Naturalmente, quanto maior for o número de usuários de um esquema, mais complexas serão a solução do sistema de equações resultante e a respectiva implementação.

## IV. DISCUSSÃO E EXEMPLO

A concepção prática de esquemas como os que foram descritos requer a consideração de alguns aspectos que, nesta seção, são discutidos de forma preliminar. Uma primeira questão está relacionada à escolha das sequências a serem utilizadas por cada usuário. Para o  $i$ -ésimo usuário, o autovetor  $\mathbf{v}_i$ , um dos componentes do conjunto resultante do processo de fracionalização da DFT, pode ser selecionado. Outros vetores

$$\begin{cases}
 \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_6 + \mathbf{x}_7 + \mathbf{x}_8 = \mathbf{y} \\
 \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_2 - j\mathbf{x}_3 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_5 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_6 + j\mathbf{x}_7 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_8 = \mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y} \\
 \mathbf{x}_1 - j\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 + j\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 - j\mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_7 + j\mathbf{x}_8 = \mathbf{F}\mathbf{y} \\
 \mathbf{x}_1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_2 + j\mathbf{x}_3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_5 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_6 - j\mathbf{x}_7 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_8 = (\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y} \\
 \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 - \mathbf{x}_6 + \mathbf{x}_7 - \mathbf{x}_8 = \mathbf{F}^2\mathbf{y} \\
 \mathbf{x}_1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_2 - j\mathbf{x}_3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_5 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_6 + j\mathbf{x}_7 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_8 = (\mathbf{F}^{0,5})^5\mathbf{y} \\
 \mathbf{x}_1 + j\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 - j\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 + j\mathbf{x}_6 - \mathbf{x}_7 - j\mathbf{x}_8 = \mathbf{F}^3\mathbf{y} \\
 \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_2 + j\mathbf{x}_3 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_5 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_6 - j\mathbf{x}_7 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{x}_8 = (\mathbf{F}^{0,5})^7\mathbf{y}
 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases}
 \mathbf{x}_1 = \frac{1}{4} [\mathcal{E}\{\mathbf{y}\} + \mathcal{E}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} + \mathcal{E}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} + \mathcal{E}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}] \\
 \mathbf{x}_2 = \frac{1}{4} [\mathcal{O}\{\mathbf{y}\} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} + j\mathcal{O}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}] \\
 \mathbf{x}_3 = \frac{1}{4} [\mathcal{E}\{\mathbf{y}\} + j\mathcal{E}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} - \mathcal{E}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} - j\mathcal{E}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}] \\
 \mathbf{x}_4 = \frac{1}{4} [\mathcal{O}\{\mathbf{y}\} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} - j\mathcal{O}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}] \\
 \mathbf{x}_5 = \frac{1}{4} [\mathcal{E}\{\mathbf{y}\} - \mathcal{E}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} + \mathcal{E}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} - \mathcal{E}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}] \\
 \mathbf{x}_6 = \frac{1}{4} [\mathcal{O}\{\mathbf{y}\} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} + j\mathcal{O}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}] \\
 \mathbf{x}_7 = \frac{1}{4} [\mathcal{E}\{\mathbf{y}\} - j\mathcal{E}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} - \mathcal{E}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} + j\mathcal{E}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}] \\
 \mathbf{x}_8 = \frac{1}{4} [\mathcal{O}\{\mathbf{y}\} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{\mathbf{F}^{0,5}\mathbf{y}\} - j\mathcal{O}\{\mathbf{F}\mathbf{y}\} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\mathcal{O}\{(\mathbf{F}^{0,5})^3\mathbf{y}\}]
 \end{cases} \quad (18)$$

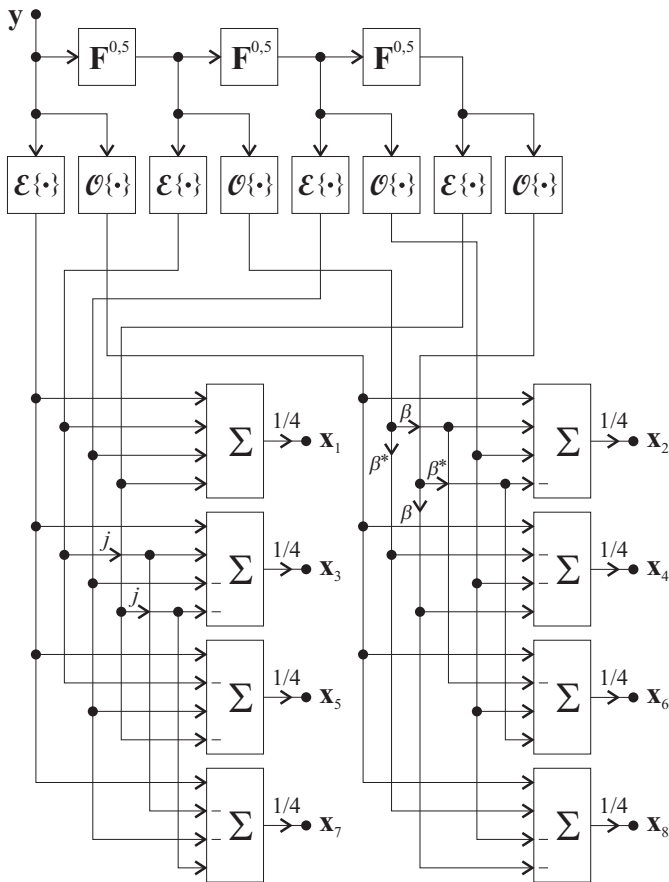


Fig. 1: Diagrama em blocos para recuperação das seqüências dos usuários num esquema de comunicação com 8-usuários. Na figura,  $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

devem, então, ser gerados pela multiplicação de  $\mathbf{v}_i$  por fatores de escala. Com isso, obtém-se um conjunto de seqüências  $\mathbf{x}_i^{(\alpha)} = \alpha \mathbf{v}_i$ , em que  $\alpha$  é escolhido de um conjunto pré-determinado de fatores de escala, todas associadas a um mesmo autovalor, sobre as quais o usuário enviará seus dados.

Outro aspecto que se deve considerar é a presença de ruído no canal pelo qual as seqüências são transmitidas. Levando em conta este fator, em vez de se ter, no receptor, o vetor  $\mathbf{y} = \sum_{k=1}^t \mathbf{x}_k$ , em que os vetores  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, t$ , são as seqüências de cada um dos  $t$  usuários, tem-se o vetor  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{n}$ , em que  $\mathbf{n}$  denota o ruído aditivo presente no canal. Aplicando o processo de recuperação das seqüências dos usuários baseado na solução de sistemas de equações lineares, obtém-se os vetores  $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k$ . Para o  $i$ -ésimo usuário, o vetor recebido  $\hat{\mathbf{x}}_i$  é, então, interpretado como sendo o vetor  $\mathbf{x}_i^{(\alpha)}$ , pertencente ao conjunto de seqüências associadas ao usuário em questão, para o qual a distância Euclidiana  $\|\mathbf{x}_i^{(\alpha)} - \hat{\mathbf{x}}_i\|$  é mínima.

Com base no que foi explanado, é possível afirmar que o funcionamento do esquema de comunicação multiusuário proposto não é comprometido pela presença de ruído no canal. Naturalmente, o desempenho de tal esquema, que pode ser medido pela taxa de seqüências interpretadas com erro, depende da relação sinal-ruído (SNR) ao qual o mesmo está submetido. Considerando que as seqüências estão associadas a padrões de bits que os usuários desejam transmitir, pode-se, ainda, combinar o esquema proposto com mecanismos de proteção contra erros usualmente empregados nos sistemas de comunicação digital. Isso contribuiria para a elevação do desempenho em cenários com baixa SNR.

*Exemplo 1:* Como forma de ilustrar o conteúdo que tem sido apresentado neste trabalho, considera-se, neste exemplo,

um esquema com 8 usuários baseado na DFrFT de comprimento  $N = 9$  (este é o menor valor de  $N$  para o qual a matriz da DFrFT possui 8 autovalores distintos). Com o auxílio do Matlab, os autovetores  $\mathbf{v}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 8$ , associados aos autovalores  $\lambda_k = (-j)^{(k-1)0,5} = (\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2)^{(k-1)}$ , são obtidos. As seqüências de cada usuário são obtidas multiplicando um dos autovetores calculados pelos fatores de escala  $\pm 1, \pm 3, \pm 5$  e  $\pm 7$ . Neste caso, são geradas oito seqüências para cada usuário. Para o usuário 1, por exemplo, pode-se partir do autovetor

$$\mathbf{v}_1 = [-0.698 \quad -0.475 \quad -0.171 \quad -0.042 \quad -0.010 \quad -0.010 \quad -0.042 \quad -0.171 \quad -0.475],$$

associado ao autovalor  $\lambda_1 = 1$ , e obter as seqüências

$$\mathbf{x}_1^{(-7)} = [4.883 \quad 3.324 \quad 1.199 \quad 0.291 \quad 0.069 \quad 0.069 \quad 0.291 \quad 1.199 \quad 3.324],$$

$$\mathbf{x}_1^{(-5)} = [3.488 \quad 2.375 \quad 0.857 \quad 0.208 \quad 0.049 \quad 0.049 \quad 0.208 \quad 0.857 \quad 2.375],$$

$$\mathbf{x}_1^{(-3)} = [2.093 \quad 1.425 \quad 0.514 \quad 0.125 \quad 0.029 \quad 0.029 \quad 0.125 \quad 0.514 \quad 1.425],$$

$$\mathbf{x}_1^{(-1)} = [0.698 \quad 0.475 \quad 0.171 \quad 0.042 \quad 0.010 \quad 0.010 \quad 0.042 \quad 0.171 \quad 0.475],$$

$$\mathbf{x}_1^{(+1)} = [-0.698 \quad -0.475 \quad -0.171 \quad -0.042 \quad -0.010 \quad -0.010 \quad -0.042 \quad -0.171 \quad -0.475],$$

$$\mathbf{x}_1^{(+3)} = [-2.093 \quad -1.425 \quad -0.514 \quad -0.125 \quad -0.029 \quad -0.029 \quad -0.125 \quad -0.514 \quad -1.425],$$

$$\mathbf{x}_1^{(+5)} = [-3.488 \quad -2.375 \quad -0.857 \quad -0.208 \quad -0.049 \quad -0.049 \quad -0.208 \quad -0.857 \quad -2.375],$$

$$\mathbf{x}_1^{(+7)} = [-4.883 \quad -3.324 \quad -1.199 \quad -0.291 \quad -0.069 \quad -0.069 \quad -0.291 \quad -1.199 \quad -3.324],$$

em que  $\mathbf{x}_1^{(\alpha)} = \alpha \mathbf{v}_1$ ,  $\alpha \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$ . As seqüências associadas aos outros usuários são geradas de forma análoga.

Também utilizando o Matlab, foi realizada uma simulação a fim de avaliar de forma preliminar o desempenho do esquema proposto considerando um canal com ruído. Na simulação, das 8 seqüências associadas a cada usuário, uma é escolhida aleatoriamente. Somando as seqüências escolhidas, obtém-se o vetor  $\mathbf{y}$ , ao qual é adicionado um ruído Gaussiano branco. Na simulação, utilizou-se uma função que permite especificar a SNR ao qual a transmissão está submetida. O procedimento foi repetido para valores de SNR na faixa de 2 dB a 16 dB.

Do vetor  $\hat{\mathbf{y}}$ , corrompido por ruído, foi recuperada apenas a seqüência  $\mathbf{x}_1^\alpha$ , associada ao usuário 1, aplicando a primeira equação de (18) e utilizando a anteriormente mencionada regra de minimização da distância Euclideana. Para cada valor de SNR considerado, foi obtida a razão entre o número de seqüências recuperadas com erro e o número total de seqüências geradas na simulação. Os resultados conseguidos, que confirmam o comportamento previsto na discussão realizada, são apresentados na Figura 2.

## V. CONCLUSÕES

Neste artigo, foram apresentados esquemas de comunicação multiusuário baseados na transformada fracional discreta de Fourier. Viu-se que, segundo o valor atribuído ao parâmetro  $a$ , matrizes da DFrFT com números arbitrários de autovalores distintos são obtidas. Com isso, o número máximo de usuários simultâneos em tais esquemas não se restringe a 4, como acontece quando se emprega a DFT usual [4]. Adicionalmente, os autovetores da matriz da DFrFT, que originam as seqüências sobre as quais os usuários realizam suas transmissões, possuem apenas componentes reais e podem ser obtidos por meio de um procedimento sistemático. Esse aspecto torna o uso da DFrFT

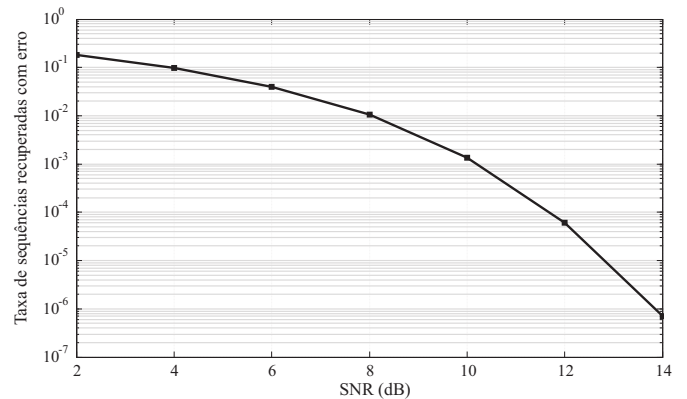


Fig. 2: Taxa de seqüências do usuário 1 recuperadas com erro, num esquema com 8-usuários baseado na DFrFT ( $N = 9$ ).

na implementação dos esquemas de comunicação em questão mais vantajoso, também, que o uso das DCT dos tipos II e III [6]. Apesar de as matrizes dessas transformadas possuírem todos os autovalores distintos, seus autovetores são complexos e sua obtenção é mais laboriosa que no caso da DFrFT; os autovalores dessas DCT também não guardam entre si relações de simetria que simplifiquem a solução do sistema de equações lineares por meio do qual as seqüências dos usuários são recuperadas. Com a DFrFT, conforme demonstrado, tais relações são verificadas e permitem a concepção de implementações mais eficientes para recuperação das seqüências.

Encontram-se em andamento trabalhos que privilegiam a investigação de aspectos práticos dos esquemas propostos. Tem-se buscado, em particular, estender a análise do desempenho da técnica proposta em canais ruidosos, cujos resultados preliminares foram apresentados neste trabalho. Mais detalhes sobre a forma como um usuário pode associar os bits a transmitir às seqüências que estão à sua disposição também têm sido investigados. Com isso, o desempenho do sistema poderá ser avaliado numa base binária, o que permitirá comparações com sistemas clássicos para comunicação digital.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. B. Almeida, "The fractional Fourier transform and time-frequency representations," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 11, pp. 3084–3091, November 1994.
- [2] N. Singh and A. Sinha, "Optical image encryption using fractional Fourier transform and chaos," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 46, pp. 117–123, 2008.
- [3] R. Tao, B. Deng, W.-Q. Zhang, and Y. Wang, "Sampling and sampling rate conversion of band limited signals in the fractional Fourier transform domain," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 1, pp. 158–171, January 2008.
- [4] R. M. Campello de Souza and H. M. de Oliveira, "Eigensequences for multiuser communication over the real adder channel," in *Proc. Int. Telecommun. Symp. (ITS'2006)*, Fortaleza, Brazil, 2006.
- [5] J. H. McClellan and T. W. Parks, "Eigenvalue and eigenvector decomposition of the discrete Fourier transform," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. AU-20, no. 1, pp. 66–74, January 1972.
- [6] J. B. Lima and R. M. Campello de Souza, "Uma técnica de múltiplo acesso baseado na auto-estrutura das transformadas trigonométricas," in *Anais do XXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Recife, Brasil, 2007.
- [7] C. Candan, M. Alper Kutay, and H. M. Ozaktas, "The discrete fractional Fourier transform," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, no. 5, pp. 1329–1337, May 2000.
- [8] J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, 1st edition, 1988.