

Sensoriamento Espectral Baseado em Testes de Normalidade

Jerônimo Silva Rocha, Marcelo Sampaio de Alencar e José Ewerton P. de Farias

Resumo— Neste trabalho, é estudado o sensoriamento espectral para determinar se um sinal, medido por um usuário cognitivo em um canal AWGN, é resultante sinal do usuário primário ou se é apenas ruído. É proposto um método de sensoriamento espectral com base em testes de normalidade. Os resultados de simulações de Monte-Carlo indicam que é possível identificar oportunidades de transmissão por meio do sensoriamento espectral baseado nos testes de normalidade, com probabilidade de detecção de 0,9 para uma relação sinal-ruído de aproximadamente -17 dB e probabilidade de falsos alarmes de 0,01.

Palavras-Chave— Sensoriamento Espectral, Testes de Normalidade, Rádios Cognitivos.

Abstract— Spectrum Sensing is studied to determine if a signal, measured by a cognitive user in an AWGN channel, results from the primary user or if is composed by noise one. The proposed method for spectrum sensing is based on normality tests. The results of Monte-Carlo simulations indicate that it is possible to identify transmission opportunities through spectrum sensing tests, with probability of detection of 0.9 for a signal to noise ratio around -17 dB and a probability of false alarm of 0.01.

Keywords— Spectrum Sensing, Normality Tests, Cognitive Radios.

I. INTRODUÇÃO

A utilização do espectro eletromagnético, atualmente, é baseada na política de alocação fixa de faixas espectrais, conhecida como FSA (*Fixed Spectrum Allocation*). Nesse tipo de alocação, o espectro eletromagnético é subdividido em bandas destinadas a diversos tipos de serviço e a autorização de uso do espectro, que tem prazo determinado, geralmente é expedida de acordo com a região onde o sistema transmissor é instalado. Dentro dessa região, e durante o período de vigência dessa autorização, somente a concessionária para a qual a autorização foi expedida deve ter acesso aos recursos do espectro, mesmo que esses recursos sejam subutilizados.

Essa política restringe a oferta do espectro eletromagnético e, embora, outrora adequada ao perfil de utilização espectral, não mais se mostra eficiente. Organizações responsáveis pela regulamentação desse recurso relatam variações temporais e geográficas no uso do espectro, entre 15% e 85%, nas faixas abaixo de 3 GHz [1], [2]. Em outras palavras, uma grande

parte do espectro atribuído é usada esporadicamente, levando a uma subutilização de uma quantidade significativa de espectro. Embora a política de atribuição fixa de espectro, em geral, tenha funcionado bem no passado, houve um acentuado aumento no acesso ao espectro devido a serviços e aplicações móveis em anos recentes. Esse aumento põe à prova a eficácia das políticas de alocação de espectro tradicionais.

Por isso, nos Estados Unidos, a FCC considera uma proposta diferente de alocação do espectro, a alocação dinâmica que é conhecida como DSA (*Dynamic Spectrum Allocation*). No Brasil, a Anatel também estuda novas políticas de uso do espectro como a alocação dinâmica do espectro [3]. Essa nova política sugere que o recurso seja utilizado de forma oportunista, ou seja, o acesso ao espectro se dá em função da demanda e as faixas do espectro podem ser usadas pelos usuários secundários [4]. Nesse sentido, as bandas licenciadas para os usuários primários (UPs) podem, sob condições negociáveis, ser compartilhadas com os usuários secundários (USs), sem que o usuário licenciado primário libere sua própria licença.

Os rádios cognitivos são sistemas de comunicação sem fio inteligentes que monitoram o ambiente que os envolve, aprendem com o ambiente e adaptam, em tempo real, suas características de transmissão, por exemplo, potência de transmissão, frequência da portadora, e estratégia de modulação, com dois objetivos principais: comunicação confiável e utilização eficiente do espectro radioelétrico [5]. Isso permite que os sistemas equipados com rádios cognitivos percebam as condições do canal e tomem decisões inteligentes baseadas no sensoriamento do espectro, representando uma solução para o acesso dinâmico ao espectro.

II. SENSORIAMENTO ESPECTRAL

Em um sistema de sensoriamento espectral, a detecção tem o objetivo de distinguir entre duas possibilidades: a presença do usuário primário (UP) ou a sua ausência, no local de interesse de transmissão do usuário secundário (US). Na ausência do UP, o US tem uma oportunidade de transmissão na faixa espectral sob teste. A decisão tomada pelo mecanismo ou método de sensoriamento é uma estimativa dessas possibilidades, resultando em quatro situações possíveis: duas decisões corretas (estimar a presença ou a ausência de UPs), estimar que o espectro está livre quando de fato há UPs, o que é chamado de falso negativo, ou falha na detecção, e estimar a presença de UPs quando na verdade o espectro está disponível, que é conhecido como falso positivo, ou falso alarme.

É necessário um compromisso na detecção de Usuários Primários, pois mecanismos agressivos resultam em mais

Jerônimo Silva Rocha, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande-PB, Brasil. Marcelo Sampaio de Alencar e José Ewerton P. de Farias, Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande-PB, Brasil, E-mails: jeronimo.rocha@ifpb.edu.br, malencar@dee.ufcg.edu.br e ewerton@dee.ufcg.edu.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Capes.

falsos negativos, enquanto mecanismos conservadores apresentam mais falsos positivos. A elevada ocorrência de falsos positivos significa que mais oportunidades de acesso ao espectro são perdidas, enquanto o aumento de falsos negativos significa que os Usuários Secundários causam mais interferência nos UPs.

A. Proposta de Sensoriamento Espectral

Supõe-se que o Usuário Primário, quando ocupa o espectro, transmite um sinal $x(t)$ por um canal com ruído branco aditivo gaussiano (AWGN) $z(t)$. Em um dado momento, o Usuário Secundário, que realiza o sensoriamento, detecta um sinal $y(t)$, que pode ou não conter o sinal $x(t)$ transmitido pelo Usuário Primário. O Usuário Secundário deve sensoriar o canal, coletando amostras do sinal $y(t)$ por uma duração equivalente a N_S amostras, obtendo um sinal $\mathbf{y} = \{y[1], y[2], \dots, y[N_S]\}$. A partir do sinal \mathbf{y} o US deve decidir entre duas hipóteses:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : y[n] &= z[n], \quad n = 1, 2, \dots, N_S, \\ \mathcal{H}_1 : y[n] &= x[n] + z[n], \quad n = 1, 2, \dots, N_S. \end{aligned} \quad (1)$$

Sob a hipótese \mathcal{H}_0 , representada no teste de hipóteses 1, as amostras $y[n] = z[n]$ apresentam distribuição de probabilidades gaussiana com variância σ_z^2 , também chamada de distribuição normal, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência [6]. Calculando a Transformada Discreta de Fourier (DCT), com o método da Transformada Rápida de Fourier (FFT), do sinal \mathbf{y} , são obtidas as amostras do sinal no domínio da frequência $Y[n], n = 1, 2, \dots, N_S$. Estas amostras são complexas, com parte real e parte imaginária sendo variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*) com distribuição gaussiana. Essa característica pode ser observada por meio dos histogramas mostrados na Figura 1.

Sob a hipótese \mathcal{H}_1 , no domínio do tempo, as amostras do sinal, $y[n] = x[n] + z[n]$, apresentam distribuição de probabilidades próxima de uma distribuição gaussiana, porém, no domínio da frequência, as partes real e imaginária de $Y[n]$ apresentam distribuição de probabilidades distinta da gaussiana, como mostrado na Figura 2.

Essa diferença de distribuições de probabilidades entre as duas hipóteses pode ser utilizada para detectar a transmissão de um usuário primário na faixa do espectro de interesse do usuário cognitivo. Nesse caso, se as amostras do sinal recebido pelo usuário secundário $y[n]$, no domínio da frequência, apresentarem distribuição gaussiana, então o usuário secundário deve interpretar que há uma oportunidade de transmissão.

Assim, o sistema proposto mede N_S amostras de sinal $y[n]$ na faixa do espectro em que se pretende transmitir de forma oportunística, calcula a FFT do sinal com N_{FFT} pontos, obtendo $Y[n]$, e aplica um teste estatístico que identifica se a distribuição da parte real ou imaginária de $Y[n]$ é gaussiana. Para que o número de amostras do sinal \mathbf{y} seja maior que N_{FFT} , toma-se $N_S = N_q \cdot N_{FFT}$ amostras e divide-se o vetor obtido em N_q vetores de N_{FFT} pontos cada, aplica-se a FFT e concatena-se os N_q vetores obtidos com a transformação, resultando no vetor \mathbf{Y} , como mostrado na Figura 3.

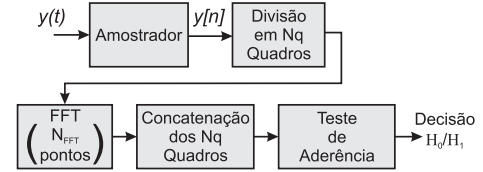


Fig. 3: Método de detecção proposto.

III. TESTES DE NORMALIDADE

A suposição de normalidade de uma variável aleatória é exigida para a realização de muitos métodos de inferência estatística, como o teste de hipóteses que deve ser realizado no sensoriamento espectral. Há vários métodos para verificar se a distribuição dos dados estudados é uma distribuição normal. Há metodologias descritivas, como a análise visual (subjetiva) de alguns gráficos, e também testes objetivos da hipótese de normalidade [7], que podem ser divididos em testes paramétricos e não paramétricos de aderência. Os paramétricos utilizam os parâmetros da distribuição, ou uma estimativa deles, para o cálculo da estatística. Normalmente, esses testes são mais rigorosos e apresentam mais pressuposições para sua validação. Já os não paramétricos são livres da suposição inicial da distribuição de probabilidades dos dados estudados [8].

Nos testes de normalidade são testadas as seguintes hipóteses

\mathcal{H}_0 : Os dados apresentam distribuição normal

\mathcal{H}_1 : Os dados não apresentam distribuição normal.

Os teste de normalidade podem ser analisados a partir de dois parâmetros: a probabilidade de rejeitar a hipótese \mathcal{H}_0 quando ela é verdadeira, ou Probabilidade de Falso Alarme (P_{fa}), e a probabilidade de rejeitar a hipótese \mathcal{H}_0 quando ela é falsa, neste trabalho chamada de Probabilidade de Detecção (P_d). As probabilidades P_{fa} e P_d , são também chamadas, respectivamente, de nível de significância do teste e poder explicativo do teste [9].

Alguns dos testes não paramétricos são: o teste de Kolmogorov-Smirnov (KS), o teste de Lilliefors (LF) – uma correção para o teste KS [10], Anderson-Darling (AD) [11] e Jarque-Bera (JB) [12].

Nas subseções seguintes, são descritos brevemente esses testes de normalidade.

A. Lilliefors

O teste de Lilliefors é uma modificação do teste de Kolmogorov-Smirnov e utiliza a mesma estatística T_{KS} [13].

No teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) verifica-se o grau de concordância entre a distribuição de um conjunto de valores (amostras observadas) e alguma distribuição assumida, que pode ser, por exemplo, a distribuição gaussiana. No teste KS admite-se que a distribuição da variável que está sendo testada seja contínua. São comparadas a função de distribuição cumulativa (FCP) assumida, e a FCP dos dados observados. A distribuição assumida representa o que é esperado sob a hipótese \mathcal{H}_0 . Então, verifica-se se as distribuições teórica e observada mostram divergência [14]. Porém, esse teste é usado

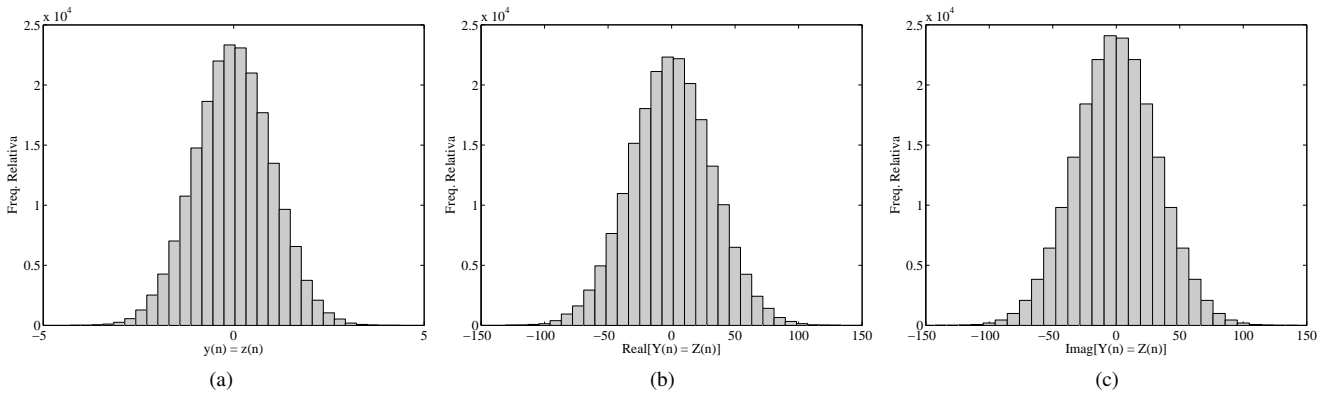


Fig. 1: Histograma das amostras do ruído no domínio do tempo (1a), da parte real do ruído no domínio da frequência (1b) e da parte imaginária do ruído no domínio da frequência (1c).

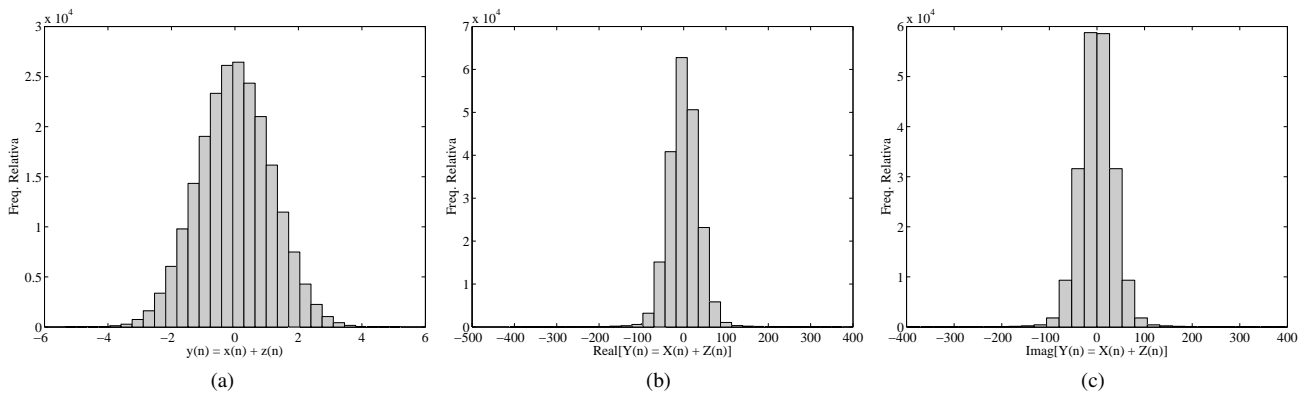


Fig. 2: Histograma das amostras do sinal no domínio do tempo (2a), da parte real do sinal no domínio da frequência (2b) e da parte imaginária do sinal no domínio da frequência (2c).

quando a média e o desvio-padrão da distribuição teórica são conhecidos.

Considere uma amostra aleatória simples $y[1], y[2], \dots, y[N_S]$ de dados com distribuição desconhecida. E sejam $F^*(y)$ a FCP teórica assumida para os dados, e $F(y)$ a FCP empírica dos dados, definida como [13]

$$F(y) = \frac{1}{N_S} \sum_{n=1}^{N_S} I_{\{(-\infty, y]\}}(y[n]), \quad (2)$$

em que, $I_{\{A\}}(y)$ é a função indicadora definida da seguinte forma

$$I_{\{A\}}(y) = \begin{cases} 1; & \text{se } y \in \{A\} \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

A estatística utilizada para o teste de Kolmogorov-Smirnov é [14]

$$T_{KS} = \max_{1 \leq n \leq N_S} [\Delta_{F_1}, \Delta_{F_2}], \quad (4)$$

em que $\Delta_{F_1} = F^*(y[n]) - F(y[n-1])$ e $\Delta_{F_2} = F^*(y[n]) - F(y[n])$.

Esta função corresponde à máxima distância vertical entre os gráficos de $F^*(y)$ e $F(y)$ sobre a amplitude dos possíveis valores de $y[n]$.

A hipótese \mathcal{H}_0 é rejeitada se T_{KS} , no teste apresentado na Expressão 4, for maior que o valor crítico apresentado na tabela de valores críticos do teste para a distribuição assumida, para diferentes probabilidades de falso alarme P_{fa} . Caso T_{KS} seja menor que o valor crítico considerado, conclui-se que os dados analisados seguem a distribuição assumida com $(1 - P_{fa}) \times 100\%$ de confiança.

Mas, se a distribuição assumida for gaussiana, e caso não se conheça os verdadeiros valores da média e o desvio-padrão dos dados, sendo estimados a partir desses dados, deve-se usar o teste de Lilliefors [15], cujos valores críticos da estatística de teste devem obedecer aos valores mostrados na Tabela I.

B. Anderson-Darling

O teste de Anderson-Darling verifica a aderência a uma distribuição de probabilidades específica, neste trabalho a distribuição Normal [15]. A estatística para este teste é dada por [16]

$$T_{AD}^* = T^2 \cdot \left(1 + \frac{0,75}{N_S} + \frac{2,25}{N_S^2} \right), \quad (5)$$

TABELA I: Valores Críticos para a Estatística do Teste de Lilliefors.

N_S	Probabilidade de Falso Alarme P_{fa}			
	0,2	0,1	0,05	0,01
5	0,285	0,315	0,337	0,405
10	0,215	0,239	0,258	0,294
20	0,160	0,174	0,190	0,231
30	0,131	0,144	0,161	0,187
> 30	$\frac{0,736}{\sqrt{N_S}}$	$\frac{0,768}{\sqrt{N_S}}$	$\frac{0,886}{\sqrt{N_S}}$	$\frac{1,031}{\sqrt{N_S}}$

em que [11]

$$T^2 = -N_S - \frac{1}{N_S} \sum_{n=1}^{N_S} [(2n-1) \ln(F(y[n])) + \ln(1 - F(y[N_S + 1 - n]))], \quad (6)$$

e $y[n]$ são as amostras ordenadas $y[1] \leq y[2] \leq \dots \leq y[N_S]$, e $F(\cdot)$ é a função cumulativa de probabilidades da distribuição sob teste.

Os valores críticos para o teste AD dependem da distribuição sob teste e a hipótese nula \mathcal{H}_0 é rejeitada se a estatística de teste for superior ao valor crítico. Para a distribuição normal os valores críticos são mostrados na Tabela II [17].

TABELA II: Valores Críticos para a Estatística do Teste de Anderson-Darling.

T_{AD}^{2*}	Probabilidade de Falso Alarme P_{fa}			
	0,2	0,1	0,05	0,01
	0,509	0,631	0,752	1,035

C. Jarque-Bera

O teste de Jarque-Bera é baseado na diferença entre os coeficientes de assimetria e curtose das amostras $(y[1], y[2], \dots, y[N_S])$ e da distribuição assumida normal[12].

A estatística de teste é dada por

$$T_{JB} = N_S \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(\mathcal{K} - 3)^2}{24} \right), \quad (7)$$

em que, S e \mathcal{K} são, respectivamente, os coeficientes de assimetria e curtose das amostras, calculados da seguinte forma

$$S = \frac{1}{N_S} \frac{\sum_{n=1}^{N_S} (y[n] - \bar{y})^3}{(\sigma_Y^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{N_S} \frac{\sum_{n=1}^{N_S} (y[n] - \bar{y})^4}{(\sigma_Y^2)^2}, \quad (9)$$

em que, \bar{y} é a média amostral e σ_Y^2 a variância da amostra.

Na Seção IV são apresentados os resultados obtidos com aplicação do sensoriamento espectral usando os testes de normalidade descritos nesta seção.

IV. RESULTADOS

Os resultados apresentadas nos gráficos desta seção são médias de 10^4 repetições de simulações de Monte-Carlo. Em cada simulação foi gerado um sinal discreto no tempo x , do usuário primário, com modulação BPSK (Binary Phase Shift Keying) e submetido a um canal com ruído z do tipo Branco Aditivo Gaussiano (AWGN), originando o sinal y , cujas amostras foram medidas pelo sistema de sensoriamento do usuário secundário (cognitivo) descrito na Subseção II-A.

A probabilidade de detecção P_d foi medida pela aplicação dos testes de normalidade descritos na Seção III para detecção do sinal y , variando o número de amostras N_S e a probabilidade de falso alarme P_{fa} .

Na Figura 4 é apresentada a probabilidade de detecção P_d em função da Relação Sinal-Ruído, γ em dB, com probabilidade de falso alarme $P_{fa} = 0,01$. Nesta simulação foram usados $N_{FFT} = 1024$ e $N_q = 100$, totalizando $N_S = 102400$ amostras do sinal medido pelo detector $y[n]$. É possível notar nessa figura que o teste de Jarque-Bera (JB) apresenta maior probabilidade de detecção que os demais e que $P_d = 0,9$ para $\gamma \approx -15,5$ dB. O teste JB é seguido pelos testes de Anderson-Darling (AD) e Lilliefors (LF), respectivamente.

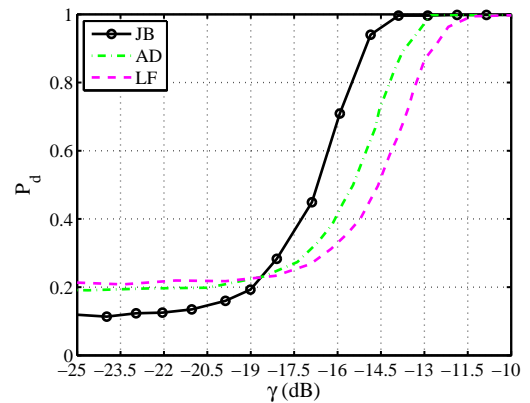


Fig. 4: Probabilidade de detecção em função da Relação Sinal-Ruído, com $P_{fa} = 0,01$, $N_{FFT} = 1024$ e $N_q = 100$.

A fim de verificar a influência do número de amostras, com $N_{FFT} = 1024$ e $N_q = 200$ e $P_{fa} = 0,01$, na Figura 5 é possível notar que para o teste JB $\gamma \approx -16,5$ dB quando $P_d = 0,9$. O que representa um ganho de 1 dB em γ em relação aos resultados da figura anterior.

Para verificar a tendência encontrada nos resultados obtidos com o teste de Jarque-Bera, foram realizadas outras simulações variando o número de amostras do sinal $y[n]$. Como pode ser visto na Figura 6, é possível obter $P_d = 0,9$ para γ aproximadamente -17 dB, com $P_{fa} = 0,01$, $N_{FFT} = 1024$ e $N_q = 300$.

Na Figura 7 são apresentados os resultados obtidos com, com $P_{fa} = 0,01$, $N_{FFT} = 2048$ e $N_q = 100$. Nesse caso, é possível notar que para obter $P_d = 0,9$ é necessário que $\gamma \approx -16,5$ dB. Apresentando, portanto, resultado idêntico ao obtido para $N_{FFT} = 1024$ e $N_q = 200$, que correspondem ao mesmo número de amostras, mudando o número de pontos da FFT mostrado na Figura 4.

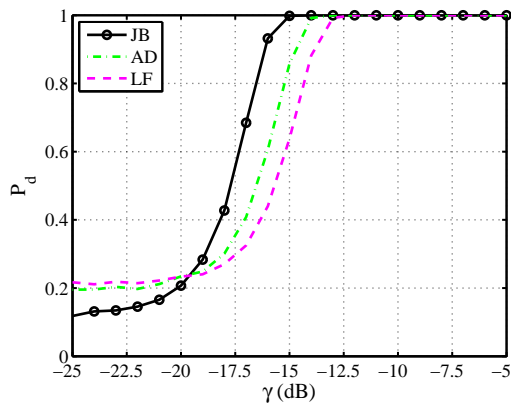


Fig. 5: Probabilidade de detecção em função da Relação Sinal-Ruído, com $P_{fa} = 0,01$, $N_{FFT} = 1024$ e $N_q = 200$.

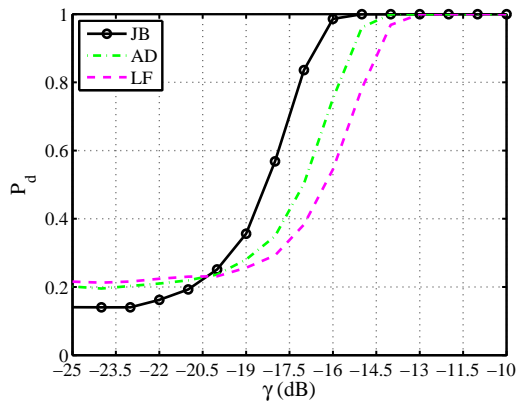


Fig. 6: Probabilidade de detecção em função da Relação Sinal-Ruído, com $P_{fa} = 0,01$, $N_{FFT} = 1024$ e $N_q = 300$.

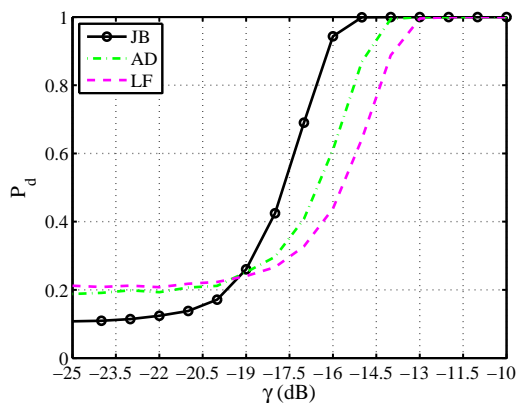


Fig. 7: Probabilidade de detecção em função da Relação Sinal-Ruído, com $P_{fa} = 0,01$, $N_{FFT} = 2048$ e $N_q = 100$.

V. CONCLUSÕES

O sensoriamento espectral deve determinar se um sinal medido por um usuário cognitivo resulta do usuário primário ou se é apenas ruído. Neste trabalho foi proposto um método de sensoriamento espectral com base nos testes de normalidade de Lilliefors, Anderson-Darling e Jarque-Bera. Os resultados de simulações de Monte-Carlo com 10^4 pontos mostram que é

possível identificar oportunidades de transmissão por meio do sensoriamento espectral baseado nos testes de normalidade, com probabilidade de detecção de 0,9 e relação sinal-ruído de aproximadamente -17 dB, além de probabilidade de falsos alarmes de 0,01. O teste de normalidade que se mostrou mais eficiente foi o de Jarque-Bera, seguido pelos de Anderson-Darling e Lilliefors. Os resultados indicam que a probabilidade de detecção aumenta com o aumento do número de amostras $N_S = N_{FFT} \cdot N_q$, mas não muda para diferentes configurações de N_{FFT} e N_q que mantenham o mesmo valor de N_S .

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio prestado pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), ao Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (Iecom), à Universidade Federal de Campina Grande (UFCG) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

REFERÊNCIAS

- [1] FCC, "First report and order, fcc 02-48," Federal Communication Commission Std., Tech. Rep., 2002.
- [2] SSC, "General survey of radio frequency bands - 30 mhz to 3 ghz," Shared Spectrum Company, Relatório Técnico, 2010. [Online]. Available: http://www.sharedspectrum.com/wp-content/uploads/2010_0923-General-Band-Survey-30MHz-to-3GHz.pdf
- [3] R. R. Heinrich, M. G. C. Branco, J. J. Bazzo, and F. L. Figueiredo, "Uma visão do cenário regulatório brasileiro para os rádios cognitivos," in *SBRT 2011*. Curitiba, Brasil: SBRT, Outubro 2011.
- [4] N. Devroye, M. Vu, and V. Tarokh, "Cognitive radio networks - highlights of information theoretic limits, models, and design." *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 6, Novembro 2008.
- [5] S. Haykin, "Cognitive radio: Brain-empowered wireless communications." *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 23, no. 2, Fevereiro 2005.
- [6] L. Lu, H.-C. Wu, and S. S. Iyengar, "A novel robust detection algorithm for spectrum sensing," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 29, no. 2, pp. 305-315, 2 2011.
- [7] N. M. Razali and Y. B. Wah, "Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests," *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, vol. 2, no. 1, pp. 21-33, 2011.
- [8] G. M. Reis and J. I. R. Júnior, "Comparação de testes paramétricos e não paramétricos aplicados em delineamentos experimentais," in *Anais do III SAEPRO*, 2007.
- [9] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory*. Prentice-Hall, 1998.
- [10] H. W. Lilliefors, "On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown," *Journal of American Statistical Association*, vol. 62, no. 318, pp. 399-402, 1967.
- [11] T. W. Anderson and D. A. Darling, "A test of goodness of fit," *Journal of American Statistical Association*, vol. 49, no. 268, pp. 765-769, 1954.
- [12] C. M. Jarque and A. K. Bera, "A test for normality of observations and regression residuals," *International Statistical Review*, vol. 55, pp. 163-172, 1987.
- [13] J. P. M. de Sá, *Applied Statistics Using SPSS, STATISTICA, MATLAB and R*. Berlin: Springer, 2007.
- [14] M. J. Panik, *Advanced Statistics from an Elementary Point of View*. Academic Press, 2005. [Online]. Available: <http://books.google.com.br/books?id=JlStYbznwQAC>
- [15] H. C. Thode, *Testing For Normality*. New York: CRC Press, Jan 2002.
- [16] NIST/SEMATECH, *e-Handbook of Statistical Methods*. NIST - National Institute of Standards and Technology, 2012, sec. 1.3.5.14. [Online]. Available: <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>
- [17] Y. Dodge, *The Concise Encyclopedia of Statistics*. Springer, 2008.