

# Modelos Markovianos Nascimento e Morte para Canais com Desvanecimento

Felipe Barros, Cecilio Pimentel, Ernesto L. Pinto

**Resumo**— Canais de comunicações com desvanecimento plano Rayleigh são modelados neste trabalho usando uma classe de canais de estados finitos Markovianos denominada de canais nascimento e morte. Resultados do modelamento indicam uma boa concordância estatística entre os dois canais para uma ampla faixa de parâmetros do desvanecimento.

**Palavras-Chave**— Canais com desvanecimento Rayleigh, modelos Markovianos de estados finitos, canais com memória.

**Abstract**— Communication channels with Rayleigh flat fading are modeled in this work using a class of finite-state Markovian channels denoted by birth and death channels. Modeling results reveal a good agreement between the two channels for a wide range of fading conditions.

**Keywords**— Rayleigh fading channels, finite state Markovian channels, channels with memory.

## I. INTRODUÇÃO

Canais de estados finitos Markovianos (FSMC, *Finite State Markov Channels*) binários são largamente utilizados para modelar canais discretos com desvanecimento (DFC, *Discrete Fading Channels*) correlacionado no tempo devido a sua tratabilidade matemática [1]- [3]. Este artigo propõe empregar uma topologia de canais FSMC conhecida como modelos nascimento e morte (NM) para capturar a memória do DFC. O objetivo é obter modelos NM precisos e com baixo número de parâmetros. Fixados os dois parâmetros do DFC (relação sinal ruído e máxima frequência Doppler normalizada) os parâmetros do modelo NM com  $K$  estados são estimados usando-se o algoritmo Baum-Welch (BW) [4]. Tabelas com os parâmetros do modelo NM são apresentadas para uma ampla faixa de parâmetros do DFC. A precisão do modelo para aproximar um DFC é discutida a partir da comparação de estatísticas geradas pelo DFC e pelo modelo NM.

## II. CANAL DISCRETO COM DESVANECIMENTO

Considere um sistema de comunicações discreto consistindo de um modulador BPSK, canal com desvanecimento plano correlacionado no tempo e ruído aditivo Gaussiano branco, além de receptor coerente com quantizador abrupto. Sejam  $\{X_k\}$  e  $\{Y_k\}$  processos binários (sobre o alfabeto  $\{0, 1\}$ ) de entrada e de saída deste canal discreto, respectivamente. A  $k$ -ésima amostra do sinal recebido é dada por:

$$R_k = \sqrt{E_s} A_k S_k + N_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

F. Barros e C. Pimentel, CODEC/DES, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife-PE, Brasil. felipe.pereirabarros@ufpe.br, cecilio@ufpe.br.

E. Pinto, Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro - RJ, Brasil. ernesto@ime.eb.br

Este artigo foi parcialmente financiado pelo CNPq e FACEPE.

$S_k = 2X_k - 1$ ,  $E_s$  é a energia do sinal transmitido,  $\{N_k\}$  é uma variável Gaussiana com média zero e variância  $N_0/2$ ,  $\{A_k\}$  é um processo com desvanecimento Rayleigh com função autocorrelação descrita pelo modelo de Clarke [5],  $R[k] = J_0(2\pi f_D T |k|)$ , onde  $J_0(x)$  é a função de Bessel de ordem zero e primeira espécie,  $f_D T$  é a máxima frequência Doppler normalizada pela taxa de sinalização  $1/T$ . Define-se a relação sinal ruído média recebida por  $\text{SNR} = E_s/N_0$ . A saída do canal discreto  $Y_k$  é obtida por quantização abrupta de  $R_k$ .

Os processos de entrada e saída deste canal discreto podem ser expressos como uma função explícita de um processo de erro  $\{Z_k\}$  da forma  $Y_k = X_k \oplus Z_k$ , em que  $\oplus$  denota soma módulo 2. Se  $Z_k = 1$ , houve um erro na  $k$ -ésima transmissão, ou se  $Z_k = 0$ , a  $k$ -ésima transmissão foi realizada corretamente. O processo de erro produzido por um DFC será modelado por um modelo NM nas próximas seções.

### A. Canais de Estados Finitos Markovianos

Um FSMC é composto de uma cadeia de Markov homogênea, estacionária, de  $K$  estados. Sendo  $\mathbf{P}$  a matriz de probabilidades de transição, o seu elemento  $p_{i,j}$ ,  $i, j \in \{0, 1, \dots, K-1\}$ , é a probabilidade condicional de que a cadeia transicione para o estado  $j$  dado que esteja no estado  $i$ . O vetor coluna  $K \times 1$   $\boldsymbol{\Pi} = [\pi_0 \ \pi_1 \ \dots \ \pi_{K-1}]^T$  é a distribuição estacionária da cadeia de Markov. Para cada estado  $j$ , o processo de geração de erro está relacionado a um canal binário simétrico (BSC, *Binary Symmetric Channel*) com probabilidade de erro  $P_j$ . Em cada intervalo de sinalização, a cadeia transiciona do estado  $i$  para o estado  $j$  e gera um erro com probabilidade  $P_j$ . Definimos a matriz  $K \times K$   $\mathbf{P}(0)$  como a matriz de probabilidades de transição sem ocorrência de erro, em que cada elemento é a probabilidade da cadeia transicionar do estado  $i$  para o estado  $j$  e gerar  $Z_k = 0$ . Da mesma maneira, a matriz  $\mathbf{P}(1)$  é definida como a matriz de probabilidades de transição com ocorrência de erro.

O modelo Nascimento e Morte com  $K$  estados ( $K$ -NM) é um caso particular de um FSMC em que existem apenas transições entre os estados vizinhos. Dado que o modelo esteja no estado  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, K-2\}$ , a cadeia pode transicionar apenas para os estados  $i-1$ ,  $i+1$ , ou permanecer no mesmo estado. Quando a cadeia se encontra no estado 0, pode ocorrer transição para o estado 0 ou para o estado 1. Analogamente, estando no estado  $K-1$ , a cadeia pode permanecer neste estado ou transicionar para o estado  $K-2$ . O modelo NM mais simples é o Canal Gilbert-Elliot (GEC) [3], também denotado por 2-NM.

TABELA I  
 MODELOS 2-NM (GEC), 3-NM E 4-NM QUE APROXIMAM UM DFC COM  $f_D T = 10^{-3}$ .

$K$	SNR	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$p_{1,2}$	$p_{2,1}$	$p_{2,3}$	$p_{3,2}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
2	5dB	0.0022	0.0054	-	-	-	-	0.0111	0.1991	-	-
	10dB	0.0013	0.0084	-	-	-	-	0.0019	0.1635	-	-
	15dB	0.0007	0.0134	-	-	-	-	0.0003	0.1490	-	-
3	5dB	0.0026	0.0051	0.0040	0.0080	-	-	0.0033	0.0760	0.2803	-
	10dB	0.0017	0.0094	0.0058	0.0146	-	-	0.0004	0.0522	0.2594	-
	15dB	0.0010	0.0170	0.0091	0.0256	-	-	0.00001	0.0518	0.2752	-
4	5dB	0.0032	0.0058	0.0054	0.0085	0.0053	0.0115	0.0012	0.0408	0.1495	0.3391
	10dB	0.0023	0.0111	0.0072	0.0156	0.0083	0.0230	$< 10^{-6}$	0.0266	0.1374	0.3420
	15dB	0.0080	0.0005	0.0011	0.0171	0.0091	0.0255	$< 10^{-6}$	0.000007	0.0518	0.2750

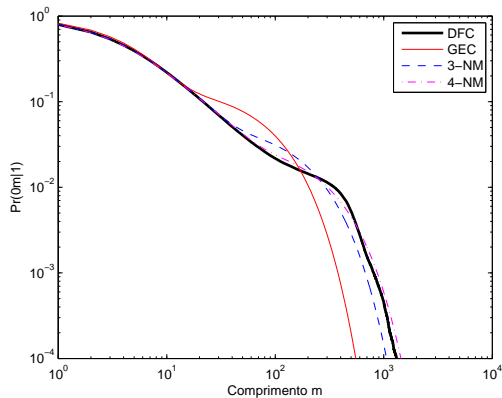


Fig. 1.  $P(0^m|1)$  versus  $m$  para DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ , SNR=5 dB.

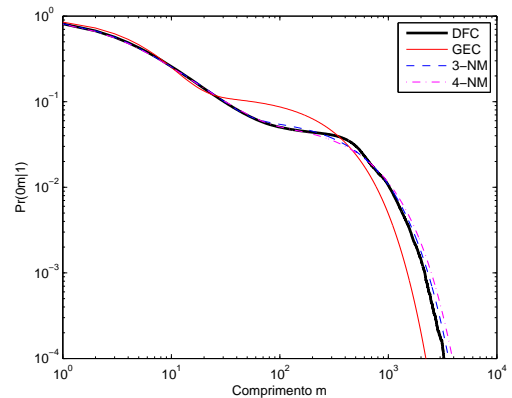


Fig. 2.  $P(0^m|1)$  versus  $m$  para DFC com  $f_D T = 10^{-3}$ , SNR=10 dB.

### III. RESULTADOS

O objetivo desta seção é avaliar a modelagem  $K$ -NM de canais DFC. Para cada DFC específico, uma sequência de erro de tamanho  $N = 10^7$  é gerada por simulação e os parâmetros do modelo  $K$ -NM são estimados usando o algoritmo BW com no máximo 80 iterações. Inicialmente, fixamos  $f_D T = 10^{-3}$ , um valor típico para um canal com desvanecimento lento e determinamos modelos  $K$ -NM para três valores de SNR e para valores crescentes de  $K$ . Os modelos estimados estão mostrados na Tabela I. Para cada valor de SNR, o algoritmo BW foi implementado para pelo menos 6 condições iniciais aleatórias de forma que as probabilidades listadas nas tabelas foram inicializadas com valores menores ou iguais a  $10^{-2}$ . Transições não permitidas pela topologia da cadeia de Markov do modelo  $K$ -NM foram inicializadas com probabilidades nulas. Em todos os casos o algoritmo BW convergiu para estimativas praticamente idênticas, o que mostra a sua robustez às condições iniciais escolhidas.

A validação dos modelos estimados na Tabela I bem como a escolha de um valor de  $K$  apropriado para cada SNR é realizada comparando-se estatísticas do canal DFC com as dos modelos  $K$ -NM. Neste trabalho usamos para esta validação a probabilidade condicional que pelo menos  $m$  transmissões corretas ocorram dado um erro, denotada por  $P(0^m|1)$ . Para o DFC, esta probabilidade é obtida por simulação, enquanto

para o modelo  $K$ -NM é usada a expressão matricial:

$$P(0^m|1) = \frac{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{P}^m(0) \mathbf{1}}{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{1}} \quad (2)$$

em que  $\mathbf{1}$  é um vetor coluna  $K \times 1$  de 1's. As curvas de  $P(0^m|1)$  versus  $m$  apresentadas nas Figs. 1-2, indicam que os modelos  $K$ -NM apresentam significativa melhoria em relação ao GEC, sendo  $K = 4$  um valor adequado para SNR = 5 dB e  $K = 3$  um valor adequado para SNR = 10 dB. A probabilidade de erro de bit média do DFC nos casos investigados é 0,064 (SNR = 5 dB) e 0,023 (SNR = 10 dB). Outras estatísticas bem como outros valores dos parâmetros do DFC foram testados obtendo-se também modelos  $K$ -NM vantajosos, os quais serão reportados em outros trabalhos.

### REFERÊNCIAS

- [1] W. Kumwilaisak, C.-C. J. Kuo, and D. Wu, "Fading channel modeling via variable-length Markov chain technique," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 1338-1358, May 2008.
- [2] L. Zhong, F. Alajaji, and G. Takahara, "A model for correlated Rician fading channels based on a finite queue," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 79-89, Jan. 2008.
- [3] C. Pimentel, T. H. Falk, and L. Lisbôa, "Finite-state Markov modeling of correlated Rician-fading Channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, pp. 1491-1501, Sept. 2004.
- [4] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules and N. Weiss, "A Maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 41, pp. 164-171, 1970.
- [5] R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile radio reception," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 47, pp. 957-1000, 1968.