

Modelos Markovianos Nascimento e Morte para Canais com Desvanecimento

Felipe Barros, Cecilio Pimentel, Ernesto L. Pinto

Resumo— Canais de comunicações com desvanecimento plano Rayleigh são modelados neste trabalho usando uma classe de canais de estados finitos Markovianos denominada de canais nascimento e morte. Resultados do modelamento indicam uma boa concordância estatística entre os dois canais para uma ampla faixa de parâmetros do desvanecimento.

Palavras-Chave— Canais com desvanecimento Rayleigh, modelos Markovianos de estados finitos, canais com memória.

Abstract— Communication channels with Rayleigh flat fading are modeled in this work using a class of finite-state Markovian channels denoted by birth and death channels. Modeling results reveal a good agreement between the two channels for a wide range of fading conditions.

Keywords— Rayleigh fading channels, finite state Markovian channels, channels with memory.

I. INTRODUÇÃO

Canais de estados finitos Markovianos (FSMC, *Finite State Markov Channels*) binários são largamente utilizados para modelar canais discretos com desvanecimento (DFC, *Discrete Fading Channels*) correlacionado no tempo devido a sua tratabilidade matemática [1]- [3]. Este artigo propõe empregar uma topologia de canais FSMC conhecida como modelos nascimento e morte (NM) para capturar a memória do DFC. O objetivo é obter modelos NM precisos e com baixo número de parâmetros. Fixados os dois parâmetros do DFC (relação sinal ruído e máxima frequência Doppler normalizada) os parâmetros do modelo NM com K estados são estimados usando-se o algoritmo Baum-Welch (BW) [4]. Tabelas com os parâmetros do modelo NM são apresentadas para uma ampla faixa de parâmetros do DFC. A precisão do modelo para aproximar um DFC é discutida a partir da comparação de estatísticas geradas pelo DFC e pelo modelo NM.

II. CANAL DISCRETO COM DESVANECIMENTO

Considere um sistema de comunicações discreto consistindo de um modulador BPSK, canal com desvanecimento plano correlacionado no tempo e ruído aditivo Gaussiano branco, além de receptor coerente com quantizador abrupto. Sejam $\{X_k\}$ e $\{Y_k\}$ processos binários (sobre o alfabeto $\{0, 1\}$) de entrada e de saída deste canal discreto, respectivamente. A k -ésima amostra do sinal recebido é dada por:

$$R_k = \sqrt{E_s} A_k S_k + N_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

F. Barros e C. Pimentel, CODEC/DES, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife-PE, Brasil. felipe.pereirabarros@ufpe.br, cecilio@ufpe.br.

E. Pinto, Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro - RJ, Brasil. ernesto@ime.eb.br

Este artigo foi parcialmente financiado pelo CNPq e FACEPE.

$S_k = 2X_k - 1$, E_s é a energia do sinal transmitido, $\{N_k\}$ é uma variável Gaussiana com média zero e variância $N_0/2$, $\{A_k\}$ é um processo com desvanecimento Rayleigh com função autocorrelação descrita pelo modelo de Clarke [5], $R[k] = J_0(2\pi f_D T |k|)$, onde $J_0(x)$ é a função de Bessel de ordem zero e primeira espécie, $f_D T$ é a máxima frequência Doppler normalizada pela taxa de sinalização $1/T$. Define-se a relação sinal ruído média recebida por $\text{SNR} = E_s/N_0$. A saída do canal discreto Y_k é obtida por quantização abrupta de R_k .

Os processos de entrada e saída deste canal discreto podem ser expressos como uma função explícita de um processo de erro $\{Z_k\}$ da forma $Y_k = X_k \oplus Z_k$, em que \oplus denota soma módulo 2. Se $Z_k = 1$, houve um erro na k -ésima transmissão, ou se $Z_k = 0$, a k -ésima transmissão foi realizada corretamente. O processo de erro produzido por um DFC será modelado por um modelo NM nas próximas seções.

A. Canais de Estados Finitos Markovianos

Um FSMC é composto de uma cadeia de Markov homogênea, estacionária, de K estados. Sendo \mathbf{P} a matriz de probabilidades de transição, o seu elemento $p_{i,j}$, $i, j \in \{0, 1, \dots, K-1\}$, é a probabilidade condicional de que a cadeia transicione para o estado j dado que esteja no estado i . O vetor coluna $K \times 1$ $\boldsymbol{\Pi} = [\pi_0 \ \pi_1 \ \dots \ \pi_{K-1}]^T$ é a distribuição estacionária da cadeia de Markov. Para cada estado j , o processo de geração de erro está relacionado a um canal binário simétrico (BSC, *Binary Symmetric Channel*) com probabilidade de erro P_j . Em cada intervalo de sinalização, a cadeia transiciona do estado i para o estado j e gera um erro com probabilidade P_j . Definimos a matriz $K \times K$ $\mathbf{P}(0)$ como a matriz de probabilidades de transição sem ocorrência de erro, em que cada elemento é a probabilidade da cadeia transicionar do estado i para o estado j e gerar $Z_k = 0$. Da mesma maneira, a matriz $\mathbf{P}(1)$ é definida como a matriz de probabilidades de transição com ocorrência de erro.

O modelo Nascimento e Morte com K estados (K -NM) é um caso particular de um FSMC em que existem apenas transições entre os estados vizinhos. Dado que o modelo esteja no estado i , $i \in \{1, \dots, K-2\}$, a cadeia pode transicionar apenas para os estados $i-1$, $i+1$, ou permanecer no mesmo estado. Quando a cadeia se encontra no estado 0, pode ocorrer transição para o estado 0 ou para o estado 1. Analogamente, estando no estado $K-1$, a cadeia pode permanecer neste estado ou transicionar para o estado $K-2$. O modelo NM mais simples é o Canal Gilbert-Elliot (GEC) [3], também denotado por 2-NM.

TABELA I
 MODELOS 2-NM (GEC), 3-NM E 4-NM QUE APROXIMAM UM DFC COM $f_D T = 10^{-3}$.

K	SNR	$p_{0,1}$	$p_{1,0}$	$p_{1,2}$	$p_{2,1}$	$p_{2,3}$	$p_{3,2}$	P_0	P_1	P_2	P_3
2	5dB	0.0022	0.0054	-	-	-	-	0.0111	0.1991	-	-
	10dB	0.0013	0.0084	-	-	-	-	0.0019	0.1635	-	-
	15dB	0.0007	0.0134	-	-	-	-	0.0003	0.1490	-	-
3	5dB	0.0026	0.0051	0.0040	0.0080	-	-	0.0033	0.0760	0.2803	-
	10dB	0.0017	0.0094	0.0058	0.0146	-	-	0.0004	0.0522	0.2594	-
	15dB	0.0010	0.0170	0.0091	0.0256	-	-	0.00001	0.0518	0.2752	-
4	5dB	0.0032	0.0058	0.0054	0.0085	0.0053	0.0115	0.0012	0.0408	0.1495	0.3391
	10dB	0.0023	0.0111	0.0072	0.0156	0.0083	0.0230	$< 10^{-6}$	0.0266	0.1374	0.3420
	15dB	0.0080	0.0005	0.0011	0.0171	0.0091	0.0255	$< 10^{-6}$	0.000007	0.0518	0.2750

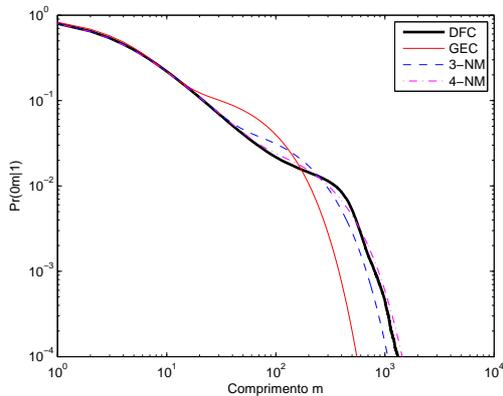


Fig. 1. $P(0^m|1)$ versus m para DFC com $f_D T = 10^{-3}$, SNR=5 dB.

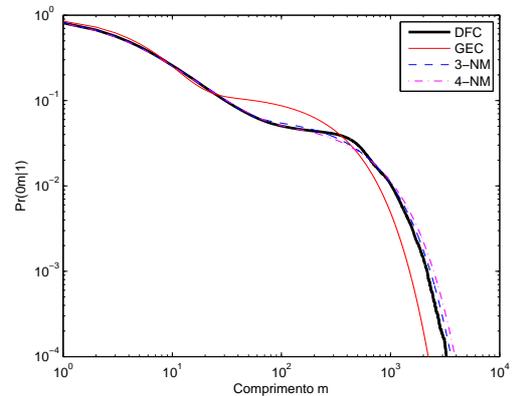


Fig. 2. $P(0^m|1)$ versus m para DFC com $f_D T = 10^{-3}$, SNR=10 dB.

III. RESULTADOS

O objetivo desta seção é avaliar a modelagem K -NM de canais DFC. Para cada DFC específico, uma sequência de erro de tamanho $N = 10^7$ é gerada por simulação e os parâmetros do modelo K -NM são estimados usando o algoritmo BW com no máximo 80 iterações. Inicialmente, fixamos $f_D T = 10^{-3}$, um valor típico para um canal com desvanecimento lento e determinamos modelos K -NM para três valores de SNR e para valores crescentes de K . Os modelos estimados estão mostrados na Tabela I. Para cada valor de SNR, o algoritmo BW foi implementado para pelo menos 6 condições iniciais aleatórias de forma que as probabilidades listadas nas tabelas foram inicializadas com valores menores ou iguais a 10^{-2} . Transições não permitidas pela topologia da cadeia de Markov do modelo K -NM foram inicializadas com probabilidades nulas. Em todos os casos o algoritmo BW convergiu para estimativas praticamente idênticas, o que mostra a sua robustez às condições iniciais escolhidas.

A validação dos modelos estimados na Tabela I bem como a escolha de um valor de K apropriado para cada SNR é realizada comparando-se estatísticas do canal DFC com as dos modelos K -NM. Neste trabalho usamos para esta validação a probabilidade condicional que pelo menos m transmissões corretas ocorram dado um erro, denotada por $P(0^m|1)$. Para o DFC, esta probabilidade é obtida por simulação, enquanto

para o modelo K -NM é usada a expressão matricial:

$$P(0^m|1) = \frac{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{P}^m(0) \mathbf{1}}{\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P}(1) \mathbf{1}} \quad (2)$$

em que $\mathbf{1}$ é um vetor coluna $K \times 1$ de 1's. As curvas de $P(0^m|1)$ versus m apresentadas nas Figs. 1-2, indicam que os modelos K -NM apresentam significativa melhoria em relação ao GEC, sendo $K = 4$ um valor adequado para SNR = 5 dB e $K = 3$ um valor adequado para SNR = 10 dB. A probabilidade de erro de bit média do DFC nos casos investigados é 0,064 (SNR = 5 dB) e 0,023 (SNR = 10 dB). Outras estatísticas bem como outros valores dos parâmetros do DFC foram testados obtendo-se também modelos K -NM vantajosos, os quais serão reportados em outros trabalhos.

REFERÊNCIAS

- [1] W. Kumwilaisak, C.-C. J. Kuo, and D. Wu, "Fading channel modeling via variable-length Markov chain technique," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 1338-1358, May 2008.
- [2] L. Zhong, F. Alajaji, and G. Takahara, "A model for correlated Rician fading channels based on a finite queue," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, pp. 79-89, Jan. 2008.
- [3] C. Pimentel, T. H. Falk, and L. Lisbôa, "Finite-state Markov modeling of correlated Rician-fading Channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 53, pp. 1491-1501, Sept. 2004.
- [4] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules and N. Weiss, "A Maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 41, pp. 164-171, 1970.
- [5] R. H. Clarke, "A statistical theory of mobile radio reception," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 47, pp. 957-1000, 1968.