

# Método de Seleção Automática de *Spikes* Baseado em Algoritmos de Agrupamento.

Luiz Paulo de A. Barbosa, Edmar C. Gurjão, Francisco M. de Assis

**Resumo**—Decompor sinais para obter uma representação com poucas componentes é um dos princípios da compactação. Neste artigo, é proposto um método para identificação e seleção automática de *spikes* relevantes para a representação do sinal. Utilizando o algoritmo *k-means*, os *spikes* são agrupados segundo a intensidade. A redução na representação permite redução de ruído e realce de características dos sinais. Em geral, o desempenho obtido foi satisfatório com redução de dimensão média de 32,18% associada a um ganho médio de 19,24dB na redução de ruído. Para o realce de características foi obtido um erro médio de 7,09% e redução de 98,6%.

**Palavras-Chave**—*Spikes*, Redução de Ruído, Seleção, *k-means*.

**Abstract**—Signal decomposition to obtain a representation with few components is one of the principles for compression. In this paper, a method for automatic identification of relevant spikes is proposed. Using the *k-means* algorithm, spikes are grouped accordingly its intensity. The reduction in dimension permits both noise reduction and emphasis of signal's characteristics. In general, an average dimensionality reduction of 32,18% associated to the average gain of 19,24dB was achieved in noise reduction. In the application of emphasis of characteristics, it was obtained an average error of 7,09% and reduction of 98,6%.

**Keywords**—*Spikes*, Noise reduction, Selection, *k-means*.

## I. INTRODUÇÃO

A decomposição de sinais em um conjunto de funções é um dos fundamentos para a representação compacta, remoção de ruído e obtenção de representação esparsa [1], [2]. Uma das questões inerentes a essa decomposição é a escolha do conjunto de funções a ser utilizado [3]. Na decomposição, dependendo das características do sinal a ser decomposto várias dessas funções podem surgir, porém com contribuições muito pequenas. Remover essas pequenas contribuições produz uma aumento da esparsidade e pode ser um caminho para redução de ruído.

Considerando a representação em *spikes* [4], a decomposição de um sinal no tempo discreto  $x[n]$  em componentes é dada em séries temporais [5]. Para cada componente devem ser determinados o instante de tempo em que ela ocorre, bem como a intensidade com a qual ela contribui para formação do sinal. As componentes, também denominadas funções núcleo ou átomos, são um conjunto de vetores que em tese capturam de forma adequada a estrutura da classe de sinais que se deseja representar ou decompor.

Luiz Paulo de A. Barbosa, Departamento de Computação e Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó-RN, Brazil e Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE/UFCG, Edmar C. Gurjão, Francisco M. de Assis, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande-PB, Brasil, E-mails: lpabarbosa@gmail.com, {fmarcos, ecandeia}@dee.ufcg.edu.br.

Como em outros métodos de decomposição [3], dependendo das características do sinal, várias funções, com intensidades distintas, podem aparecer na série obtida. Entretanto, funções com baixa intensidade não contribuem significativamente para a composição do sinal, e portanto, podem ser removidas sem alterar de forma substancial a representação do sinal.

Neste trabalho é proposto um método para a seleção de *spikes* relevantes para a decomposição de sinais. Utilizando o algoritmo *k-means* os *spikes* são agrupados de acordo com a intensidade e apenas os mais relevantes permanecem na representação. Foi observado que, utilizando o método proposto, é possível obter uma representação mais compacta do sinal e ainda remover ruído.

O artigo está dividido como segue, na Seção II, é apresentado o método de decomposição por *spikes*. Em seguida, na Seção III, são discutidos os princípios que permitiram a criação do método de seleção automática dos *spikes*. Logo após, na Seção IV, uma descrição detalhada do método proposto e dos critérios de eliminação de *spikes* é fornecida. Na Seção V, são descritos os procedimentos experimentais usados para avaliar o uso do método em aplicações de redução de ruído e de realce de características, respectivamente. Posteriormente, na Seção VI, os resultados dos experimentos são apresentados e discutidos. Por fim, na Seção VII, são apresentadas as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

## II. REPRESENTAÇÃO POR *Spikes*

No modelo de *spikes* a decomposição de um sinal  $x[n]$  com  $n = 0, 1, \dots, N$ , usando um conjunto de funções,  $\psi_1, \dots, \psi_M$  ocorre por meio do redimensionamento e posicionamento das funções núcleo no tempo, e é expressa por

$$x[n] = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{s_m} \rho_i^{(m)} \psi_m(n - \tau_i^{(m)}) + \varepsilon[n]. \quad (1)$$

As funções núcleo ou átomos,  $\psi_i$ ,  $i \in \{1, \dots, M\}$  formam um conjunto de vetores que, em tese, capturam de forma adequada a estrutura da classe de sinais que se deseja representar ou decompor. Os pares  $(\rho_i^{(m)}, \tau_i^{(m)})$  formam os *spikes* sendo  $\rho_i^{(m)}$  o fator de escala ou peso que deverá ser aplicado a função  $\psi_m$  no instante de tempo  $\tau_i^{(m)}$ .

Os *spikes* podem ser computados pelo algoritmo *Matching Pursuit* (MP) [6] e armazenados em uma matriz *SPK* conforme a Equação (2). A  $m$ -ésima linha de *SPK* está associada uma função-núcleo  $\psi_m$ . De forma análoga, a  $i$ -ésima coluna

de SPK corresponde a um instante específico de tempo  $\tau_i^{(m)}$ .

$$SPK = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \rho_i^{(m)} & \cdots & \rho_j^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \rho_i^{(k)} & \cdots & \cdots \\ \tau_i^{(m)} & & \tau_j^{(m)} & \end{bmatrix} \begin{matrix} \psi_m \\ \vdots \\ \psi_k \end{matrix} \quad (2)$$

O elemento  $\rho_i^{(m)}$  é computado como a correlação máxima entre o sinal de entrada  $x[n]$  e a função núcleo  $\psi_m$  no instante de tempo  $\tau_i^{(m)}$ . Consequentemente, dado um sinal  $x[n]$  e um conjunto de átomos  $\psi_1, \dots, \psi_k$ , o elemento  $\rho_j^{(m)}$  da matriz SPK indica a presença da versão redimensionada  $\rho_j^{(m)}\psi_m$  no instante de tempo  $\tau_j^{(m)}$  na decomposição do sinal  $x[n]$ , Equação (1).

Uma observação importante é que a eficiência ou qualidade da decomposição, pelo modelo de *spikes*, depende do quão bem as funções núcleo capturam a estrutura do sinal  $x[n]$  [5]. Entende-se como eficiente o processo de decomposição que comparativamente produz o menor número de *spikes*, enquanto satisfaz à restrição de manter ou diminuir o erro produzido na recuperação do sinal.

Consequentemente, uma forma de aumentar a eficiência da decomposição expressa pela Equação (1) é utilizar-se de técnicas de aprendizado para otimizar as funções núcleo [4]. No entanto, a otimização das funções núcleo não faz parte do escopo deste trabalho. Para evitar o processo de otimização, neste primeiro momento, os sinais utilizados nos experimentos serão compostos por misturas ou combinações das funções  $\psi_m$ .

### III. AGRUPAMENTO DE *Spikes*

Neste trabalho, investigou-se a aplicação de técnicas de agrupamento às linhas da matriz SPK, com o objetivo de selecionar automaticamente, para cada função  $\psi_m$ , os valores  $\rho_i^{(m)}$  mais relevantes para a representação do sinal  $x[n]$ . Desta maneira, se obtém uma nova matriz SPK' mais esparsa que a original.

Ao proceder a comparação entre o sinal recuperado usando SPK'  $\hat{x}[n]$  e o sinal original  $x[n]$ , é possível avaliar se o conjunto de *spikes* armazenado em SPK' é ou não uma decomposição mais eficiente de  $x[n]$ . Além do aumento da eficiência da representação, outras aplicações do método de seleção de *spikes* podem ser exploradas, como a redução de ruído e a seleção de características específicas do sinal, que são o foco deste trabalho.

Isso é possível, pois a decomposição é realizada em termos das funções  $\psi_m$  e qualquer característica presente no sinal  $x[n]$  que não esteja fortemente correlacionada com as funções  $\psi_m$  será convertida em um conjunto de pares  $(\rho_i^{(m)}, \tau_i^{(m)})$  para os quais  $-\eta_1 < \rho_i^{(m)} < \eta_2$ , com  $\eta_1$  e  $\eta_2$  representando os limites de relevância. Assim, o descarte dos *spikes* compreendidos neste intervalo pode atenuar características indesejadas presentes no sinal  $x[n]$ , como o efeito de ruído aditivo.

Seguindo o mesmo princípio, é possível realizar a seleção de características desses sinais. Neste caso, basta determinar qual

função  $\psi_m$  apresenta maior correlação com a característica que se deseja realçar e retirar os *spikes* produzidos pelas demais funções do processo de recuperação que produzirá  $\hat{x}[n]$ .

### IV. PROCEDIMENTO DE SELEÇÃO DE *Spikes*

Dado um sinal  $x[n]$  cujas características são bem representadas pelas funções  $\psi_m$ , é possível utilizar o procedimento ilustrado na Figura 1 para realizar a seleção automática dos *spikes* mais relevantes da decomposição de  $x[n]$ . O procedimento é descrito a seguir:

- 1) Utilizar um algoritmo *Matching Pursuit* para computar os pares  $(\rho_i^{(m)}, \tau_i^{(m)})$  com  $\tau_i^{(m)} \geq 0$ ;
- 2) Aplicar o método de agrupamento *k-means* [7] para separar os *spikes* produzidos para cada função  $\psi_m$  em um conjunto de  $k$  grupos  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  e seus centros  $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ ;
- 3) Identificar os conjuntos de índices  $I_1, I_2$  e  $I_3$  dos *spikes* que deverão ser descartados para formar SPK' seguindo um ou mais dos três critérios de eliminação indicados nas Equações (3), (4) e (5);
- 4) Computar  $\hat{x}[n]$  usando a nova matriz de *spikes* SPK'.

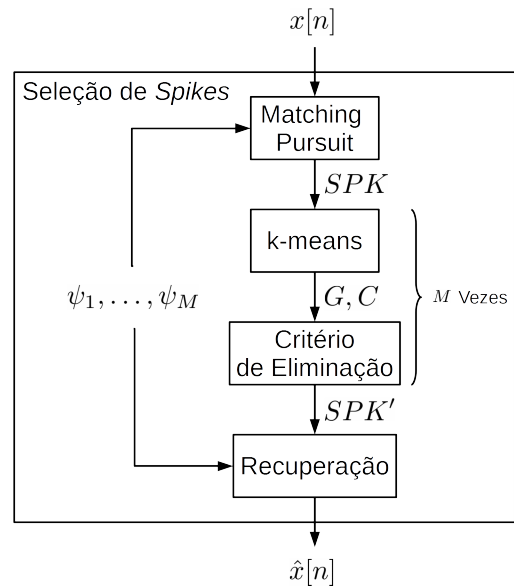


Fig. 1. Procedimento de seleção de *spikes*.

Dada a natureza dos dados, os grupos formados dividem os *spikes* de acordo com as magnitudes dos  $\rho_i^{(m)}$  e cada grupo  $g \in G$  possui um centro  $c \in C$ . A identificação e seleção dos *spikes* relevantes pode ser feita de três maneiras com a possibilidade de uso combinado entre elas. A primeira é a aplicação dos limiares  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Para esse caso, a determinação dos limiares  $\eta_1$  e  $\eta_2$  é realizada por meio da escolha dos centros de grupos com cujas magnitudes, em módulo  $|c|$ , são próximas de zero. Para tanto, se deve ordenar os centros dos grupos retornados pelo algoritmo *k-means*, separar os valores positivos em  $C_+$  e os negativos em  $C_-$  e fazer  $\eta_1 = \min(|C_-|)$  e  $\eta_2 = \min(|C_+|)$ , onde  $|\cdot|$  representa o cálculo do valor absoluto dos elementos do conjunto. A segunda maneira corresponde a forçar a condição  $\rho_i^{(m)} \geq 0$ ,

identificar o grupo  $g_k \in G : c_k = \max(C)$  e eliminar todos os *spikes* que não pertencem a esse grupo. Há ainda uma terceira alternativa, que corresponde a identificação de linhas da matriz *SPK* para serem descartadas.

$$I_1 = \{(i, m) : -\eta_1 < \rho_i^{(m)} < \eta_2\}. \quad (3)$$

$$I_2 = \{(i, m) : \rho_i^{(m)} > 0 \notin g_k \text{ com } c_k = \max(C)\}. \quad (4)$$

$$I_3 = \{m : \psi_m \implies \text{Característica a eliminar}\}. \quad (5)$$

Dentre os critérios apresentados nas Equações (3), (4) e (5), o primeiro consiste em eliminar os *spikes* que têm magnitude próxima de zero, com os limites determinados por  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . O segundo elimina qualquer *spike* a menos que ele faça parte do grupo que possui o centro de maior magnitude. E por fim, o terceiro consiste em determinar o índice da função  $\psi_m$  que melhor captura a característica do sinal que se deseja eliminar, para então excluir de *SPK* a linha correspondente a essa função para formar a nova matriz *SPK'*.

Dependendo da aplicação, a escolha de um ou outro critério, ou mesmo uma combinação deles é mais adequada. Como será detalhado mais a frente, para a aplicação de redução de ruído foi escolhido o critério dos limiares, já para o realce de características primeiro aplica-se a seleção das linhas da matriz, terceiro critério, para posteriormente selecionar os *spikes* usando o segundo critério.

## V. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

### A. Experimento para Avaliar a Redução de Ruído

Para testar a seleção automática de *spikes* em aplicações de redução de ruído, foi realizado o procedimento experimental ilustrado na Figura 2 e descrito a seguir:

- 1) Criar um sinal  $x[n]$  do tipo FSK ajustado para modular  $M$  símbolos usando frequência central  $f_c$  e separação de frequências  $\Delta_f$ ;
- 2) Criar um sinal de ruído  $z[n] \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ;
- 3) Somar  $x[n]$  com  $z[n]$  para obter  $y_1[n]$ , Equação (6);
- 4) Definir as funções  $\psi_m$  de acordo com as  $M$  frequências usadas para diferenciar os símbolos no sinal modulado  $x[n]$ ;
- 5) Proceder com a seleção de *spikes* permitindo  $\rho_i^{(m)} < 0$  e usando o primeiro critério de eliminação, Equação (3);
- 6) Computar as razões sinal-ruído definidas nas Equações (7) e (8);
- 7) Computar o ganho como  $G = SNR_2 - SNR_1$ .

$$y_1[n] = x[n] + z[n]. \quad (6)$$

$$SNR_1 = 10 \log_{10} \left( \frac{\|y_1[n]\|_2^2}{\|z[n]\|_2^2} \right). \quad (7)$$

$$SNR_2 = 10 \log_{10} \left( \frac{\|y_2[n]\|_2^2}{\|z[n]\|_2^2} \right). \quad (8)$$

A escolha de  $x[n]$  do tipo FSK possibilita a criação de sinais que possuem repetição de frequência em intervalos de tempo distintos e com duração variável, bastando para isso escolher uma mensagem diferente para ser modulada. Por exemplo,

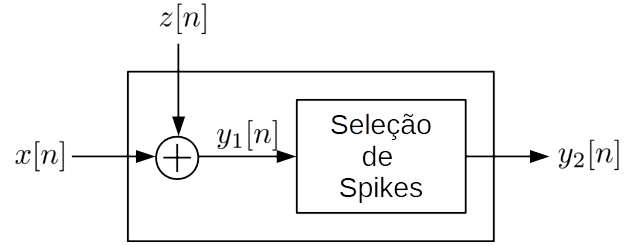


Fig. 2. Diagrama da aplicação do método de seleção de *spikes*.

para uma mensagem com  $M = 4$  com  $0 \mapsto f_1, \dots, 3 \mapsto f_4$ , se a mensagem  $msg = [3203110111]$  teríamos o sinal  $y_1[n]$  ilustrado na Figura 3.

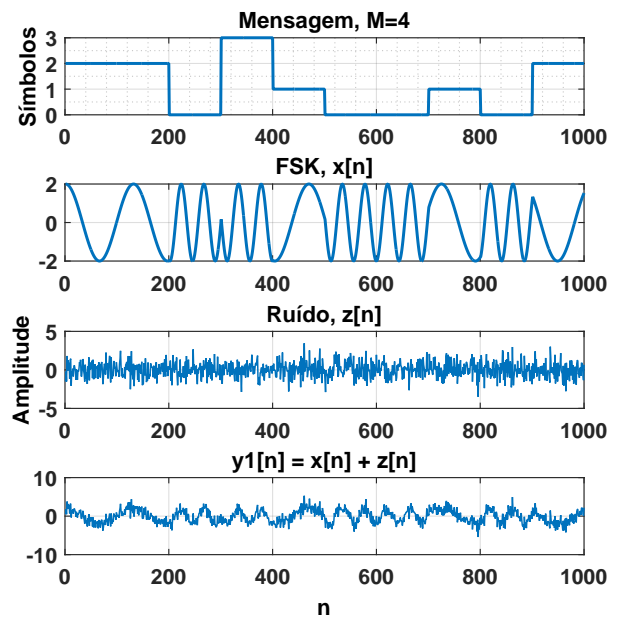


Fig. 3. Exemplo de sinal  $y_1[n]$ .

### B. Experimento para Avaliar a Eliminação de Características

Para testar a seleção automática de *spikes* em aplicações de seleção de características, foi realizado o procedimento experimental ilustrado na Figura 2 e descrito a seguir:

- 1) Criar um sinal  $x[n]$ , Equação (9), formado pela soma de  $M$  cossenos.
- 2) Criar um sinal de ruído  $z[n] \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ;
- 3) Somar  $x[n]$  com  $z[n]$  para obter  $y_1[n]$ , Equação (6);
- 4) Definir as funções  $\psi_m$  de acordo com as  $M$  frequências usadas na composição de  $x[n]$ , Equação (10).
- 5) Proceder com a seleção de *spikes* com a restrição de  $\rho_i^{(m)} \geq 0$  usando o terceiro e o segundo critérios de eliminação, Equações (5) e (4), na ordem mencionada;
- 6) Criar o sinal alvo contendo apenas as frequências desejadas;
- 7) Computar o erro médio quadrático entre  $y_2[n]$  e o sinal alvo.

$$x[n] = \sum_{m=1}^M \cos(2\pi mnf). \quad (9)$$

$$\psi_m = \cos(2\pi mnf). \quad (10)$$

Nas Equações (6), (7), (8), (9) e (10),  $n = 0, 1, \dots, N$ .

## VI. RESULTADOS

### A. Redução de ruído

Para obter os resultados referentes à redução de ruído foi utilizado o procedimento experimental mencionado na seção V-A. O método de seleção de *spikes* foi configurado com os valores  $k = 6$  e  $M = 4$ . Foram realizadas 51 repetições e os resultados foram analisados e divididos em três casos. O primeiro, denominado de caso típico, corresponde a mediana do conjunto de resultados. O segundo, representa o melhor desempenho obtido e é denominado melhor caso. Por fim, a média do conjunto de dados obtido é apresentada. Na Tabela I, os resultados referentes ao ganho para os casos mencionados estão disponíveis e em média a aplicação do método de seleção de *spikes* produziu um ganho de 19,24 dB.

TABELA I  
GANHO (DB)

	$SNR_1$	$SNR_2$	Ganho
Caso Típico	4,69	24,00	19,31
Melhor Caso	4,68	25,19	20,51
Caso Médio	4,71	23,95	19,24

Na Figura 4, estão ilustrados os sinais  $y_1[n]$  e  $y_2[n]$  para os quais o ganho máximo foi obtido.

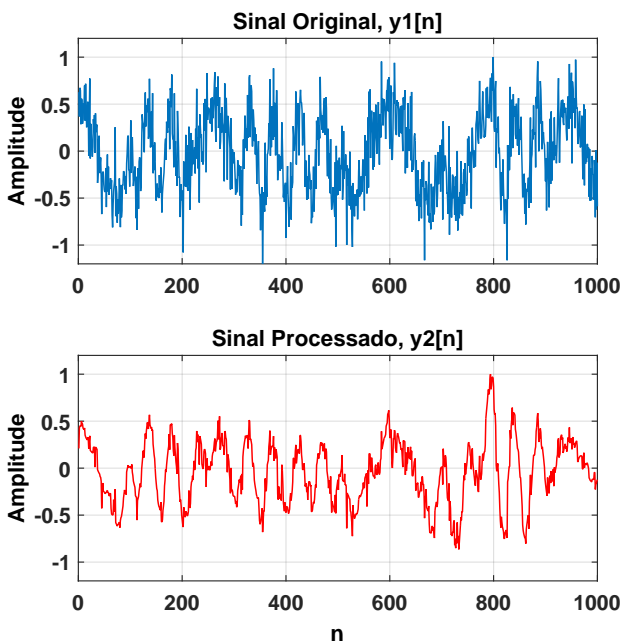


Fig. 4. Sinais  $y_1[n]$  e  $y_2[n]$  que produziram o ganho máximo.

Na Tabela II, são apresentados os resultados percentuais da redução do número de *spikes* com magnitude  $\rho_i^{(m)} \neq 0$  obtida

para cada função  $\psi_m$ , bem como a média desses resultados. Os três casos mencionados anteriormente são contemplados. Esses resultados indicam o aumento da esparsidade das linhas da matriz  $SPK'$  em relação à matriz original  $SPK$ . Pode-se notar, em média, uma redução de 32,18% no número de *spikes*.

TABELA II  
REDUÇÃO DE DIMENSÃO EFETIVA (%)

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	Média
Caso Típico	31,49	33,68	35,22	27,33	31,21
Melhor Caso	36,46	49,40	44,44	33,54	38,80
Caso Médio	28,57	39,99	39,57	29,30	32,18

Na Figura 5, valores absolutos da redução do número de *spikes* para cada função  $\psi_m$  pode ser apreciado. Os valores apresentados foram obtidos para a condição de ganho máximo. Para contextualizar o resultado a dimensão da matriz  $SPK$  é  $4 \times 1000$ .

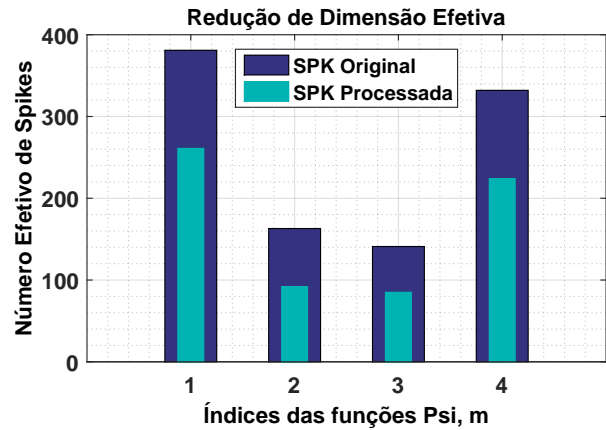


Fig. 5. Redução de dimensão por função  $\psi_m$ , obtidas para a condição de ganho máximo.

### B. Eliminação de Características

Para obter os resultados referentes à seleção de características, foi utilizado o procedimento experimental mencionado na seção V-B. O método de seleção de *spikes* foi configurado com os valores  $k = 3$  e  $M = 8$ . Foram realizadas dois tipos de experimentos. O primeiro, explora a eliminação em ordem crescente de frequência e de forma acumulativa eliminando  $\{f_1, (f_1, f_2), \dots, (f_1, \dots, f_{M-1})\}$ . O segundo, corresponde ao mesmo experimento usando a ordem de eliminação inversa  $\{f_M, (f_M, f_{M-1}), \dots, (f_M, \dots, f_2)\}$ . Para cada eliminação, denotada por  $E_i$  com  $i = 1, \dots, M-1$ , foi computado o erro médio quadrático entre o sinal alvo e o sinal  $y_2[n]$ , bem como a redução de dimensão obtida por vetor  $\psi_m$ . Foram realizadas 25 repetições para cada tipo de experimento.

Nas Tabelas III e IV, os resultados apresentados correspondem a média das 25 repetições efetuadas para cada experimento, colunas  $E_1$  a  $E_7$  e  $\psi_1$  a  $\psi_8$ , respectivamente, bem como a média local desses resultados.

Os resultados correspondentes aos valores médios dos erros para cada eliminação, bem como a média desses valores, para cada tipo de experimento podem ser apreciados na Tabela III.

TABELA III  
ERRO (RMSE)

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$	Média
$f_1 \rightarrow f_7$	0.0596	0.0623	0.0748	0.0891	0.0978	0.1142	0.1233	0.0887
$f_8 \rightarrow f_2$	0.0681	0.0672	0.0549	0.0547	0.0538	0.0415	0.0321	0.0532

Dos resultados, é possível perceber que o experimento realizado em ordem decrescente de frequência apresenta valores de erro menores que o experimento em ordem crescente, porém, ambos os casos apresentam um erro médio satisfatório. Outro ponto que merece menção é a eliminação do ruído presente no sinal de entrada  $y_1[n]$  no sinal de saída  $y_2[n]$ , Figura 6.

Na Tabela IV, são apresentados os resultados percentuais da redução média do número de *spikes* com magnitude  $\rho_i^{(m)} \neq 0$  obtida para cada função  $\psi_m$ , bem como a média desses resultados, que para ambos os experimentos é superior 98,6%.

TABELA IV  
REDUÇÃO DE DIMENSÃO EFETIVA (%)

	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$	Média
$f_1 \rightarrow f_7$	97.20	98.51	98.64	98.83	98.86	98.93	98.85	99.24	98.63
$f_8 \rightarrow f_2$	97.25	98.47	98.71	98.83	98.84	98.92	98.94	99.26	98.65

Na Figura 6, está ilustrado o resultado para o qual o subconjunto de frequências  $\Omega = \{f_1, f_5, f_6, f_7, f_8\}$  foi eliminado. Especificamente para este exemplo, escolhido ao acaso, o erro obtido foi 0,0422 com redução de dimensão de 98,83%.

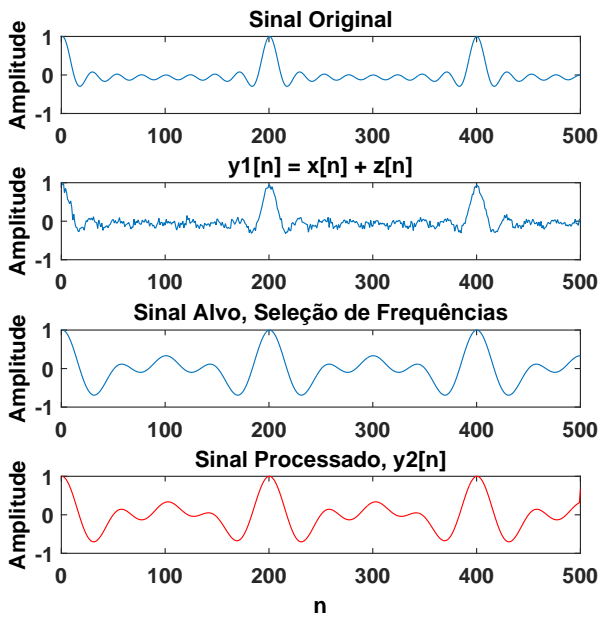


Fig. 6. Exemplo de seleção de características. Sinal alvo contendo apenas  $f_1$ ,  $f_3$  e  $f_4$ . Sinal  $y_2[n]$  computado usando  $SPK'$  formada pela seleção dos spikes das funções  $\psi_1$ ,  $\psi_3$  e  $\psi_4$ .

## VII. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposto um método para identificação e seleção automática dos *spikes* relevantes baseado no uso do algoritmo de agrupamento *k-means*. O objetivo do uso do método é o aumento da esparsidade da representação em *spikes* do sinal, ou seja, da matriz  $SPK$ , mantendo ou melhorando a qualidade do sinal recuperado após a aplicação do método.

Uma investigação inicial do desempenho do método proposto foi realizada no contexto de aplicações de redução de ruído e realce de características dos sinais. Como medidas de qualidade para cada uma das aplicações foram usadas respectivamente, o ganho em termos da diferença entre a razão sinal ruído do sinal de saída  $y_2[n]$  e do sinal de entrada  $y_1[n]$  e o erro médio quadrático entre o sinal de saída e o sinal alvo desejado. Também foi analisada a redução de dimensão efetiva obtida pelo uso do método.

Em geral, o desempenho obtido foi satisfatório com redução de dimensão média de 32,18% associada a um ganho médio de 19,24dB. Na aplicação de seleção de características foi obtido um erro médio para o pior caso de 12,33% e no melhor caso 3,21%. A média considerando ambos os experimentos e todas as eliminações é 7,09% associada a reduções de dimensão médias em torno de 98,6%.

Novas investigações com sinais de classes diferentes e em aplicações diversas devem ser realizadas como trabalhos futuros. Além disso, na prática nem sempre se tem acesso as funções  $\psi_m$  ótimas sendo necessário estimá-las mediante o uso de técnicas de aprendizado que não foram exploradas neste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Hélio Magalhães pelo incentivo para a realização do trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] Y.C. Eldar and G. Kutyniok. *Compressed Sensing: Theory and Applications*. Compressed Sensing: Theory and Applications. Cambridge University Press, 2012.
- [2] M. Elad. *Sparse and Redundant Representation*. Springer, 2010.
- [3] Scott Shaobing Chen, David L. Donoho, and Michael A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Review*, 43(1):129–159, 2001.
- [4] Evan C. Smith and Michael S. Lewicki. Efficient auditory coding. *Nature*, 439(7079):978–982, Feb 2006.
- [5] Evan Smith and Michael S. Lewicki. Efficient coding of time-relative structure using spikes. *Neural Computation*, 17(1):19–45, Jan 2005.
- [6] S.G. Mallat and Z. Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41(12):3397–3415, Dec 1993.
- [7] J. B. MacQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. *Proceedings of 5-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 281–297.