Transformada Rápida de Hartley Otimizada

G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza

***Resumo*— Este artigo introduz um método para obter bases numéricas para o núcleo da transformada discreta de Hartley. Essa base é utilizada para construir algoritmos otimizados, em termos de complexidade multiplicativa, para essa transformada sem restrição de comprimento. Exemplos são apresentados e a complexidade aritmética desta proposta é comparada com a complexidade de outros algoritmos rápidos.**

***Palavras-Chave*— Transformada discreta de Hartley, complexidade multiplicativa, bases numéricas, bases ciclotômicas.**

***Abstract*— This paper introduces a method to obtain a numerical basis for the kernel of the discrete Hartley transform (DHT). This basis is used to construct an optimum fast Hartley transform (FHT), in terms of multiplicative complexity, for computing the DHT. Examples are presented and the arithmetic complexity of the proposed FHT is compared with the complexity of other fast algorithms.**

***Keywords*— Discrete Hartley transform, multiplicative complexity, numerical basis, cyclotomic basis.**

I. INTRODUÇÃO

A transformada de Hartley, proposta por R. V. L. Hartley em 1942 [1], é uma ferramenta para processamento de sinais que surgiu como uma alternativa, dentro do corpo dos números reais, à bem conhecida transformada de Fourier [2], a qual possui núcleo entre os números complexos. A versão discreta da transformada, a transformada discreta de Hartley (DHT), foi proposta por R. N. Bracewell em 1983 [3]. Em 1984, um algoritmo rápido para a DHT [4], baseado na transformada rápida de Fourier (FFT) de Cooley-Tukey [5], foi proposto pelo próprio Bracewell. Tal algoritmo ficou conhecido como transformada rápida de Hartley (FHT).

Inicialmente, a FHT era vista como uma alternativa promissora à FFT, por se tratar de uma transformada sobre o corpo dos reais e ser uma involução. Entretanto, em 1987, Sorensen et al. publicaram um artigo em que as complexidades aritméticas da FHT e FFT são comparadas e os resultados mostraram que a complexidade aritmética das transformadas são praticamente idênticas [6]. Um outro trabalho foi publicado por P. Duhamel e M. Vetterli, em 1987 [7], que compara o desempenho de uma convolução cíclica implementada usando uma FFT e uma FHT. Os resultados não mostram nenhuma vantagem na utilização da FHT e ainda sugerem a utilização da FFT pelo fato dessa apresentar uma estrutura mais organizada para a implementação.

Em 2012, G. Jerônimo da Silva Jr. introduziu, em sua tese de doutorado, uma maneira de se obter um algoritmo otimizado, com respeito à complexidade multiplicativa, para qualquer transformada discreta linear [8]. Para isso, é necessário obter uma base numérica para o núcleo da transformada. Neste artigo, mostra-se como se obter uma base numérica para o núcleo da matriz de transformação da DHT e assim, desenvolver algoritmos otimizados[1] para pequenos comprimentos[2] da DHT. Esses resultados são comparados com a transformada rápida de Fourier otimizada [9] e a FHT *split-radix* apresentadas em [6].

A próxima seção apresenta um resumo da teoria da complexidade aritmética [8], e mostra como é possível obter um algoritmo otimizado a partir de uma base numérica do núcleo da transformada. A seção III introduz uma maneira de se obter a base numérica da DHT. A seção IV apresenta algumas transformadas rápidas de Hartley otimizada e as compara com outras transformadas rápidas. Na seção V estão as conclusões do artigo.

II. COMPLEXIDADE ARITMÉTICA PARA TRANSFORMADAS LINEARES

A Teoria da Complexidade Aritmética para Transformadas Lineares foi introduzida em [8], a qual é uma generalização da transformada rápida de Fourier otimizada [9], aplicada para qualquer transformada discreta e linear. Essa teoria introduz um procedimento para se obter um algoritmo otimizado a partir da decomposição do núcleo da transformada em bases numéricas [8] e realizar uma decomposição de um conjunto de matrizes em matrizes de posto um (matrizes postunitárias).

Uma base numérica é um conjunto de números reais em que a combinação linear com coeficientes racionais produz um subespaço dos números reais. Se o subespaço gerado pela base contém o núcleo de uma transformada, então essa base numérica pode ser utilizada para construção de algoritmos otimizados para essa transformada. Um exemplo de base numérica são as bases ciclotômicas, que geram o núcleo da transformada discreta de Fourier (DFT) [10].

A transformada discreta de Hartley de uma sequência real $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, é a sequência real

$$X_H[k] \triangleq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\text{cas}(nk2\pi/N), \qquad (1)$$

para $k = 0, 1, \dots, N-1$, em que $\text{cas}(\theta) \triangleq \cos(\theta) + \text{sen}(\theta)$. Como qualquer transformada discreta linear, a DHT pode ser representada através de uma equação matricial, definindo os

[1] O termo "algoritmo otimizado" significa que o número de multiplicações desse algoritmo é o menor possível.

[2] O comprimento da transformada é a dimensão do vetor de entrada, comumente denotado por N. O termo "pequenos comprimentos" significa, geralmente, $N \leq 16$.

G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza, Grupo de Processamento de Sinais, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, E-mails: gilsonjr@gmail.com, ricardo@ufpe.br.

vetores

$$\vec{X}_H \triangleq \begin{bmatrix} X_H[0] \\ X_H[1] \\ \vdots \\ X_H[N-1] \end{bmatrix} \tag{2}$$

e

$$\vec{x} \triangleq \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}, \tag{3}$$

e a matriz da DHT ($N \times N$)

$$H \triangleq \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \text{cas}(\frac{2\pi}{N}) & \dots & \text{cas}[\frac{(N-1)2\pi}{N}] \\ 1 & \text{cas}(\frac{4\pi}{N}) & \dots & \text{cas}[\frac{(N-1)4\pi}{N}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \text{cas}[\frac{(N-1)2\pi}{N}] & \dots & \text{cas}(\frac{2\pi}{N}) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

e então

$$\vec{X}_H = H\vec{x}. \tag{5}$$

Supondo que existe uma decomposição do núcleo da DHT na base numérica formada pelos números reais $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$, então a matriz H pode ser escrita como

$$H = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k H_k, \tag{6}$$

em que as matrizes H_k têm coeficientes racionais. Neste caso, para se obter um algoritmo otimizado para a DHT, basta decompor as matrizes racionais H_k no menor conjunto de matrizes postunitárias. Supondo que tal decomposição foi obtida, as matrizes H_k são dadas por

$$H_k = \sum_{l=1}^{m} c_{kl} U_l, \tag{7}$$

em que U_l, $l = 1, \dots, m$, são matrizes racionais postunitárias e os coeficientes c_{kl}, $k = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, m$ são constantes racionais. Utilizando (6) e (7), mostra-se que

$$H = \sum_{l=1}^{m} \beta_l U_l, \tag{8}$$

em que β_l, $l = 1, \dots, m$, são as m componentes do vetor $\vec{\beta}$ obtido através de

$$\vec{\beta} = c^T \vec{\gamma}, \tag{9}$$

em que c é matriz $(r \times m)$ com coeficientes da k-ésima linha e l-ésima coluna dados por c_{kl} e $\vec{\gamma}$ é o vetor da base numérica composto pelos números reais γ_k, $k = 1, \dots, r$. A matriz U_l pode ser escrita por um produto matricial de uma matriz coluna por uma matriz linha[3], isto é, $U_l = \vec{C}_l \vec{A}_l^T$. A matriz da DHT é dada por

$$H = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \dots & \vec{C}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1^T \\ \vdots \\ \vec{A}_m^T \end{bmatrix}. \tag{10}$$

[3]Toda matriz de posto um pode ser decomposta em um produto de uma matriz coluna por uma matriz linha [11].

Essa implementação possui um número de multiplicações igual a quantidade de elementos β_l não racionais e garante a menor complexidade multiplicativa se $\vec{\gamma}$ possui uma base numérica e se a decomposição das matrizes H_i, referente aos γ_i não racionais, utilizar o menor número possível de matrizes postunitárias [8, 9]. A decomposição em matrizes postunitáras é feita utilizando as técnicas apresentas em [9]. A decomposição do núcleo da DHT em bases numéricas é introduzida na próxima seção.

III. AS BASES NUMÉRICAS DE HARTLEY

As bases numéricas para a transformada discreta de Fourier foram propostas em [12], com o objetivo de obter uma transformada rápida de Fourier otimizada [9]. Essas bases numéricas foram denominadas bases ciclotômicas, pelo fato de sua construção utilizar polinômios ciclotômicos [10]. De uma maneira geral, o núcleo de uma DFT de comprimento N pode ser representado por N potências de $\alpha = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, em que $j = \sqrt{-1}$. Esses N números complexos podem ser representados pela matriz coluna ou vetor

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{N-1} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Utilizando a decomposição em bases ciclotômicas [8, 9, 10, 12], pode-se escrever

$$\vec{\alpha} = R\vec{\gamma}, \tag{12}$$

em que R é a matriz de números racionais denominada de matriz de decomposição, $N \times \phi(N)$, e $\vec{\gamma}$ é a matriz coluna ou vetor contendo as $\phi(N)$ bases ciclotômicas[4], e $\phi(.)$ denota a função *totient* de Euler [13].

Pela Equação (1), verifica-se que o núcleo da DHT é composto da parte real subtraída da parte imaginária do núcleo da DFT. O núcleo da DHT pode ser representado pelo vetor

$$\vec{\text{cas}} = \text{Real}\{\vec{\alpha}\} - \text{Imag}\{\vec{\alpha}\}. \tag{13}$$

A computação das partes real e imaginária depende da computação do conjugado do vetor $\vec{\alpha}$, entretanto, observa-se que

$$(\vec{\alpha})^* = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha^{N-1} \\ \alpha^{N-2} \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{\alpha}. \tag{14}$$

Utilizando (14) na decomposição em bases cicltômicas (12) e definindo

$$D \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

[4]Existem duas bases ciclotômicas principais, a cos-CB (usada quando N é múltiplo de 4) e a sen/cos-CB [10].

e

$$\bar{R} \triangleq DR, \tag{16}$$

chega-se a decomposição do núcleo da DHT em bases numéricas

$$\vec{\text{cas}} = \frac{1}{2}\{\vec{\alpha} + (\vec{\alpha})^* + j[\vec{\alpha} - (\vec{\alpha})^*]\}, \tag{17}$$

$$\vec{\text{cas}} = \frac{1}{2}[(1+j)R + (1-j)\bar{R}]\vec{\gamma}. \tag{18}$$

O vetor $\vec{\gamma}$ contém componentes puramente reais ou puramente imaginárias que dependem da escolha da base ciclotômica utilizada. De uma maneira geral, os coeficientes se alternam entre puramente real e puramente imaginário, assim, o vetor $\vec{\gamma}$ pode ser escrito por

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -j \end{bmatrix} \vec{\gamma_r} = I_j \vec{\gamma_r}, \tag{19}$$

em que o vetor $\vec{\gamma_r}$ tem componentes reais. No caso em que sen/cos-CB é utilizada, o vetor $\vec{\gamma_r}$ é dado por

$$\vec{\gamma_r} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \text{sen}(2\pi/N) \\ \cos(2\pi/N) \\ \text{sen}(4\pi/N) \\ \vdots \\ \cos\left[\left(\frac{\phi(N)}{2} - 1\right)\frac{2\pi}{N}\right] \\ \text{sen}\left[\left(\frac{\phi(N)}{2}\right)\frac{2\pi}{N}\right] \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Assim, o núcleo da DHT pode ser decomposto em $\phi(N)$ componentes reais. A decomposição final é

$$\vec{\text{cas}} = \frac{1}{2}[(1+j)R + (1-j)\bar{R}]I_j\vec{\gamma_r}, \tag{21}$$

isto é, a matriz de decomposição da DHT, expressa em uma base numérica, é $\frac{1}{2}[(1-j)R + (1+j)\bar{R}]I_j$, que é uma matriz de números reais, pois $\vec{\gamma_r}$ é um vetor de número reais. Entretanto, as componentes de $\vec{\gamma_r}$ ainda podem ser linearmente dependentes, como no caso em que $\vec{\gamma}$ é a base ciclotômica cos-CB. Nesse caso particular[5], a matriz $\vec{\gamma}$ pode ser escrita, definindo-se as matrizes

$$I_c \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -j \end{bmatrix} \tag{22}$$

e

$$\vec{\gamma_{\cos}} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\pi/N) \\ \cos(4\pi/N) \\ \vdots \\ \cos\left[\left(\frac{\phi(N)}{2} - 1\right)\frac{2\pi}{N}\right] \end{bmatrix}, \tag{23}$$

por

$$\vec{\gamma} = I_c\vec{\gamma_{\cos}}. \tag{24}$$

A decomposição do núcleo da DHT na base numérica, nesse caso, é

$$\vec{\text{cas}} = \frac{1}{2}[(1-j)R + (1+j)\bar{R}]I_c\vec{\gamma_{\cos}}. \tag{25}$$

A matriz de decomposição real é $\frac{1}{2}[(1-j)R + (1+j)\bar{R}]I_c$ e o vetor da base numérica, $\vec{\gamma_{\cos}}$, tem $\phi(N)/2$ componentes.

A próxima seção apresenta a transformada rápida de Hartley otimizada para alguns comprimentos, obtida a partir da decomposição do núcleo da DHT em bases numéricas.

IV. A TRANSFORMADA RÁPIDA DE HARTLEY OTIMIZADA

Denotando por cas_i, $i = 0, 1, \dots, N-1$, a i-ésima componente do vetor $\vec{\text{cas}}$, e denotando por h_{mn}, $m = 0, 1, \dots, N-1$ e $n = 0, 1, \dots, N-1$, a componente da linha m e coluna n da matriz H, pode-se escrever

$$h_{mn} = \frac{1}{N}\text{cas}_i, \tag{26}$$

em que $i = mn (\text{mod } N)$. Através de (21) ou (25), cada componente h_{mn} pode ser escrita como uma combinação linear com coeficientes racionais das bases numéricas e a matriz H pode ser escrita como em (6).

O algoritmo otimizado é obtido decompondo as matrizes H_k nas matrizes postunitárias U_l, como em (7). A partir dos coeficientes c_{kl} obtidos, é possível computar os valores β_l, através de (9), e finalmente obter o algoritmo na forma (10). A seguir, são apresentados exemplos dos algoritmos obtidos.

Exemplo 1: Para obter a transformada rápida de Hartley otimizada para $N = 8$, calcula-se a decomposição em bases numéricas, através de (25), pois N é múltiplo de quatro, resultando em[6]

$$\begin{bmatrix} \text{cas}(0) \\ \text{cas}(2\pi/8) \\ \text{cas}(4\pi/8) \\ \text{cas}(6\pi/8) \\ \text{cas}(\pi) \\ \text{cas}(10\pi/8) \\ \text{cas}(12\pi/8) \\ \text{cas}(14\pi/8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a matriz H pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{8}(H_1 + H_2\sqrt{2}),$$

[5] Quando N é múltiplo de quatro é possível obter a base ciclotômica cos-CB [10].

[6] O resultado, obtido utilizando-se a Equação (25), tem a segunda coluna da matriz de composição multiplicada por dois e o segundo elemento da base numérica dividido por dois.

em que

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo necessário apenas decompor a matriz H_2 em matrizes postunitárias. A decomposição, neste caso, é simples e dada por

$$H_2 = U_1 + U_2,$$

em que

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então, a matriz H pode ser escrita através de

$$H = \frac{1}{8}(CBA),$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

O algoritmo é implementado através de

$$\vec{X}_H = \frac{1}{8}\{C[B(A\vec{x})]\},$$

que utiliza apenas duas multiplicações. Utilizando a decomposição em matrizes bielementares para as matrizes A e C [14], é possível contabilizar 22 adições.

Exemplo 2: Para obter a transformada rápida de Hartley otimizada para $N = 5$, calcula-se a decomposição em bases numéricas, através de (21), pois N não é múltiplo de quatro, resultando em

$$\vec{\text{cas}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \text{sen}(2\pi/5) \\ \cos(2\pi/5) \\ \text{sen}(4\pi/5) \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a matriz H pode ser escrita como

$$H = \frac{1}{5}\left[H_1 + \text{sen}(\frac{2\pi}{5})H_2 + \cos(\frac{2\pi}{5})H_3 + \text{sen}(\frac{4\pi}{5})H_4\right].$$

Repetindo os procedimentos do exemplo anterior e decompondo as matrizes H_2, H_3 e H_4 em matrizes postunitárias, chega-se a expressão para a matriz H, dada por

$$H = \frac{1}{5}(CBA),$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{bmatrix},$$

com

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(2\pi/5) \\ \cos(2\pi/5) \\ \mathrm{sen}(4\pi/5) \end{bmatrix},$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O algoritmo é implementado através de

$$\vec{X}_H = \frac{1}{5}\{C[B(A\vec{x})]\},$$

que utiliza 4 multiplicações e 20 adições.

A Tabela I mostra a complexidade aritmética da transformada rápida de Hartley otimizada (OFHT), da FHT *split-radix*[7] [6] e da transformada rápida de Fourier otimizada (OFFT) [9].

TABELA I

COMPLEXIDADE ARITMÉTICA DA TRANSFORMADA DE HARTLEY OTIMIZADA (OFHT), FHT SPLIT-RADIX (FHT) E TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER OTIMIZADA (OFFT).

N	Algoritmo	Multiplicações	Adições	Operações
3	OFHT	1	6	7
	FHT	-	-	-
	OFFT	1	4	5
5	OFHT	4	20	24
	FHT	-	-	-
	OFFT	4	14	18
8	OFHT	2	22	24
	FHT	2	22	24
	OFFT	2	20	22
16	OFHT	10	64	74
	FHT	10	64	74
	OFFT	10	60	70

Observa-se que a complexidade aritmética da transformada rápida de Hartley otimizada proposta é igual a da FHT *split-radix*, nos comprimentos em que essa se aplica, e é bem próxima da complexidade da OFFT.

V. CONCLUSÕES

Este artigo introduz um método de se obter bases numéricas para a transformada discreta de Hartley. As bases numéricas são utilizadas para construção de algoritmos otimizados, em termos da complexidade multiplicativa, para a computação da transformada discreta de Hartley, sem restrição de comprimento. Exemplos da aplicação desse método de construção de algoritmos FHT são apresentados e uma tabela com as complexidades aritméticas indica que esse é o melhor método para a implementação da transformada discreta de Hartley para pequenos comprimentos.

[7] A FHT proposta por Bracewell assume que N é uma potência de dois [4].

REFERÊNCIAS

[1] R. V. L. Hartley, "A more symmetrical Fourier analysis applied to transmission problems," in *Proceedings of the I.R.E.*, March 1942, pp. 144–150.

[2] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Sinais e Sistemas*, 2nd ed. Pearson Prentice Hall, 2010.

[3] R. N. Bracewell, "Discrete Hartley transform," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 73, no. 12, pp. 1832–1835, Dec 1983. [Online]. Available: http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josa-73-12-1832

[4] R. Bracewell, "The fast Hartley transform," *Proceedings of the IEEE*, vol. 72, no. 8, pp. 1010–1018, 1984.

[5] J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," *Mathematics of Computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965. [Online]. Available: http://www.jstor.org/stable/2003354

[6] H. Sorensen, D. Jones, C. Burrus, and M. Heideman, "On computing the discrete Hartley transform," *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 33, no. 5, pp. 1231–1238, 1985.

[7] P. Duhamel and M. Vetterli, "Improved Fourier and Hartley transform algorithms: Application to cyclic convolution of real data," *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 35, no. 6, pp. 818–824, 1987.

[8] G. J. da Silva Jr., "A teoria da complexidade aritmética aplicada à otimização de transformadas lineares," tese de doutorado, Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife - PE, 2012.

[9] G. J. da Silva Jr. and R. M. Campello de Souza, "Transformada rápida de Fourier otimizada," *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, vol. 24, p. 5, Outubro 2011.

[10] ——, "Minimum multiplicative complexity algorithm for computing a single component of the discrete Fourier transform," *Digital Signal Processing*, vol. 23, no. 3, pp. 1040 – 1043, 2013. [Online]. Available: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200413000110

[11] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*. Thomson Brooks/Cole, 2006.

[12] G. J. da Silva Jr. and R. M. Campello de Souza, "Cyclotomic basis for computing the discrete Fourier transform," *International Telecommunications Symposium*, vol. 7, pp. 1–5, September 2010.

[13] R. E. Blahut, *Fast Algorithms for Signal Processing*, 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

[14] G. J. da Silva Jr. and R. M. Campello de Souza, "Teoria da complexidade aditiva para transformadas," *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, vol. 24, p. 5, Outubro 2011.