

Modelagem Estocástica de um Algoritmo NLMS de Passo Variável Não Paramétrico

Eduardo Vinicius Kuhn, José Gil Fausto Zipf e Rui Seara

Resumo—Este artigo trata da modelagem estocástica de algoritmos adaptativos NLMS (*normalized least-mean-square*) de passo variável, considerando sinais de entrada gaussianos reais (correlacionados e não correlacionados). Especificamente, um modelo estocástico analítico é desenvolvido aqui para um algoritmo não paramétrico da literatura. Tal modelo pode ser estendido para ser usado em outros algoritmos de passo variável, levando em conta as particularidades da regra de ajuste do passo de adaptação considerada. Resultados de simulação para diferentes condições de operação são apresentados, confirmando a precisão do modelo proposto (especialmente, em regime permanente).

Palavras-chave—Algoritmo NLMS de passo variável, filtragem adaptativa, modelagem estocástica.

Abstract—This paper focuses on the stochastic modeling of variable step-size normalized least-mean-square (NLMS) algorithms, considering real-valued (correlated and uncorrelated) Gaussian input data. Specifically, an analytical stochastic model is developed here for a non-parametric algorithm from the literature. Such a model can be extended to be used in other variable step-size algorithms, taking into account the particulars of the step-size adjustment rule considered. Simulation results for different operating conditions are presented, confirming the accuracy of the proposed model (especially, in steady state).

Keywords—Variable step-size NLMS algorithm, adaptive filtering, stochastic modeling.

I. INTRODUÇÃO

Embora o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*) seja utilizado nas mais diversas aplicações práticas em função de sua elevada robustez numérica e baixa complexidade computacional [1], [2], o uso de um passo de adaptação fixo não permite que ele proporcione simultaneamente uma rápida convergência aliada a um reduzido erro quadrático médio em excesso (EQME) em regime permanente (como desejável). Assim, visando tratar essa relação de compromisso, os algoritmos adaptativos de passo variável têm emergido como uma importante solução do ponto de vista prático. Nesse tipo de algoritmo, o passo de adaptação é ajustado dinamicamente durante toda a sua operação. Basicamente, considera-se um valor de passo elevado (próximo ao limite superior de estabilidade) no início do processo de adaptação, propiciando uma rápida convergência inicial. Então, à medida que o algoritmo se aproxima do regime permanente, o valor do passo é gradualmente decrescido (de acordo com alguma regra pré-estabelecida), levando a um reduzido EQME em regime permanente [2].

Eduardo Vinicius Kuhn, José Gil Fausto Zipf e Rui Seara, LINSE-Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil (e-mails: kuhn@linse.ufsc.br, gil@linse.ufsc.br e seara@linse.ufsc.br).

Eduardo Vinicius Kuhn é também Professor do Curso de Engenharia Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Toledo, PR, Brasil (e-mail: kuhn@utfpr.edu.br).

José Gil Fausto Zipf é também Professor do Departamento de Engenharia Elétrica e Telecomunicações da Universidade Regional de Blumenau (FURB), Blumenau, SC, Brasil (e-mail: gilzipf@furb.br).

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Na literatura, diferentes estratégias vêm sendo utilizadas na obtenção de regras de ajuste para o passo de adaptação, dando assim origem a um grande número de algoritmos de passo variável. Dentre as principais estratégias consideradas, destacam-se a teoria do passo ótimo [3]-[8], a autocorrelação do erro [9], o gradiente do erro quadrático instantâneo [10]-[13], o erro quadrático instantâneo [14]-[16], a restrição da variância do ruído [17], o valor absoluto do erro instantâneo [18], e outras menos específicas [19]-[23]. Contudo, devido à grande quantidade de trabalhos científicos publicados, como também às limitações que cada algoritmo pode apresentar, a escolha do algoritmo a ser utilizado bem como o ajuste adequado de seus parâmetros tornam-se tarefas um tanto complexas. Por isso, objetivando facilitar a implementação com vistas à aplicação de interesse, é importante conhecer claramente quais as principais vantagens e limitações de cada algoritmo como também o impacto dos parâmetros do algoritmo sobre seu desempenho. Nesse sentido, um caminho conveniente para se entender melhor o funcionamento de um dado algoritmo se dá por meio de seu modelo estocástico.

Na modelagem estocástica de algoritmos adaptativos, busca-se determinar expressões analíticas que possibilitem prever (com certa precisão) o comportamento de um dado algoritmo frente a diferentes condições de operação, fornecendo assim uma base teórica para o estudo do algoritmo considerado. Tais modelos visam ainda auxiliar o projetista no ajuste de parâmetros do algoritmo bem como em análises de desempenho, evitando assim a necessidade de extensivas simulações de Monte Carlo (MC). Além disso, através de um modelo analítico, relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e as métricas de desempenho podem ser estabelecidas, resultando dessa forma em diretrizes de projeto consistentes [24]-[26]. Adicionalmente, modelos podem revelar ainda comportamentos indesejados do algoritmo, permitindo modificá-lo seja para corrigir tal comportamento ou customizá-lo para condições de operação específicas [27]. Todavia, a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos não pode ser vista como uma tarefa trivial, apresentando ainda diversos desafios teóricos a serem superados.

Com respeito à modelagem de algoritmos de passo variável, é importante destacar que a maioria dos trabalhos até então publicados na literatura não apresenta modelos estocásticos para os algoritmos correspondentes. Entretanto, especialmente no caso de algoritmos de passo variável, os modelos são de grande importância do ponto de vista teórico, já que podem servir como base para o estudo das diferentes estratégias de ajuste do passo de adaptação desenvolvidas, fornecendo assim subsídios ao projetista quanto à escolha de um dado algoritmo. Nesse contexto, focando sobre os algoritmos adaptativos NLMS de passo variável, tem-se aqui por objetivo:

- a) introduzir uma metodologia geral de modelagem considerando sinais de entrada gaussianos reais (correlacionados e não correlacionados); e
- b) aplicar a metodologia desenvolvida no algoritmo não paramétrico descrito em [6].

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

No desenvolvimento do modelo proposto, considera-se um problema de identificação de sistema (como ilustrado na Fig. 1). Dessa forma, o sinal de erro $e(n)$ pode ser expresso como

$$e(n) = [\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}(n)]^T \mathbf{x}(n) + z(n) \quad (1)$$

onde \mathbf{w}_0 representa um vetor de dimensão M contendo os coeficientes da planta (sistema a ser identificado), $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \ \dots \ w_M(n)]^T$, o vetor de coeficientes do filtro adaptativo, $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ \dots \ x(n-M+1)]^T$, um vetor com as amostras mais recentes do sinal de entrada e $z(n)$, um ruído aditivo de medição. Aqui, assume-se que os coeficientes do filtro adaptativo são atualizados por um algoritmo NLMS de passo variável, cuja equação de adaptação é dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu(n) \frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) + \varepsilon} \quad (2)$$

na qual $\mu(n)$ denota o passo de adaptação variável e $\varepsilon > 0$, um parâmetro de regularização [1], [2]. Particularmente em [6], o passo de adaptação variável $\mu(n)$ é ajustado através de¹

$$\mu(n) = \frac{p^2(n)}{q^2(n)} \quad (3)$$

com

$$p(n) = \beta p(n-1) + (1-\beta)e(n)e(n-1) \quad (4)$$

e

$$q(n) = \beta q(n-1) + (1-\beta)e^2(n) \quad (5)$$

sendo $0 \ll \beta < 1$ um parâmetro que praticamente não carece de ajuste; por isso, o algoritmo é dito não paramétrico.

III. MODELO PROPOSTO

O modelo estocástico proposto é composto por expressões descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem, uma recursão para computar os elementos da diagonal da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes, como também expressões caracterizando a evolução do passo de adaptação variável. Para derivar tais expressões, as seguintes hipóteses simplificativas (utilizadas na modelagem) são primeiramente estabelecidas:

- H1) O sinal de entrada é obtido a partir de um processo gaussiano estacionário de média zero, variância σ_x^2 e matriz de autocorrelação $\mathbf{R} = E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$ [1], [2].
- H2) O parâmetro $\varepsilon > 0$ é uma constante de valor muito pequeno quando comparada com $E[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$, não afetando o comportamento médio do algoritmo [24].
- H3) O ruído de medição $z(n)$ é não correlacionado e independente de qualquer outro sinal envolvido no processo, tendo média nula e variância σ_z^2 [1], [2].
- H4) Assume-se que o vetor de coeficientes do filtro adaptativo $\mathbf{w}(n)$ e vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$ sejam estatisticamente independentes [1], [2].
- H5) Considera-se também que o passo de adaptação $\mu(n)$ seja independente de qualquer outra variável do processo [9], [14], [15].
- H6) É ainda assumido que $e(k)$ e $e(l)$ sejam fracamente correlacionadas para $k \neq l$ [7], [9].

Note que as Hipóteses H4)-H6) passam a ser mais precisas à medida que o algoritmo tende para a condição de regime permanente.

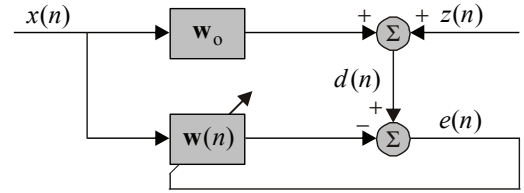


Fig. 1. Diagrama de blocos de um problema de identificação de sistema.

A. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Para o problema de identificação de sistema mencionado, uma expressão que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes pode ser determinada substituindo (1) em (2), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e levando em conta as Hipóteses H2)-H5). Assim,

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \{\mathbf{I} - E[\mu(n)]\mathbf{R}_1\}E[\mathbf{w}(n)] + E[\mu(n)]\mathbf{R}_1\mathbf{w}_0 \quad (6)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade, $E[\mu(n)]$, o valor esperado do passo de adaptação variável e

$$\mathbf{R}_1 = E \left[\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \right] \quad (7)$$

uma matriz do tipo autocorrelação normalizada.

É importante destacar que a determinação de \mathbf{R}_1 bem como de \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 [veja adiante (15) e (16)] não é uma tarefa trivial, requerendo o conhecimento da função densidade de probabilidade do sinal de entrada. Como consequência, soluções distintas são obtidas dependendo das características estatísticas do sinal de entrada. Particularmente, focando sobre sinais de entrada gaussianos reais [como estabelecido pela Hipótese H1)], soluções analíticas são apresentadas em [28] para dados não correlacionados e [29], para dados correlacionados (para detalhes, veja [30, Tabela I]). Tais soluções são utilizadas aqui para computar as matrizes do tipo autocorrelação normalizada oriundas da derivação do modelo proposto.

Portanto, para uma dada condição inicial [por exemplo, $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$], o comportamento médio do vetor de coeficientes do filtro adaptativo pode ser previsto [a partir da expressão de modelo (6)] se a matriz de autocorrelação normalizada \mathbf{R}_1 , o vetor de coeficientes ótimo \mathbf{w}_0 e $E[\mu(n)]$ forem conhecidos.

B. Curva de Aprendizagem

A fim de derivar uma expressão que descreva a curva de aprendizagem do algoritmo [erro quadrático médio (EQM)], define-se inicialmente o vetor de erro nos coeficientes como

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_0. \quad (8)$$

Logo, usando (8), o sinal de erro (1) pode ser reescrito como

$$e(n) = -\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n) + z(n). \quad (9)$$

Então, determinando $e^2(n)$ [a partir de (9)], tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante e considerando a Hipótese H4), obtém-se [1], [2]

$$J(n) = E[e^2(n)] = J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \quad (10)$$

sendo o EQM mínimo dado por

$$J_{\min} = E[z^2(n)] = \sigma_z^2 \quad (11)$$

e o EQME, por

¹ Cabe comentar que uma regra de ajuste do passo de adaptação bastante similar foi independentemente apresentada em [7].

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= E\{\mathbf{v}^T(n)\mathbf{x}(n)\}^2 \\ &= \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(n) \end{aligned} \quad (12)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ e $\mathbf{k}'(n)$ denotam vetores contendo, respectivamente, os autovalores de \mathbf{R} e os elementos da diagonal de

$$\mathbf{K}'(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{K}(n) \mathbf{Q}. \quad (13)$$

Note em (13) que $\mathbf{K}(n) = E[\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)]$ caracteriza a matriz de correlação do vetor de erros nos coeficientes e \mathbf{Q} , a matriz de autovetores proveniente da autodecomposição $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T$, em que $\boldsymbol{\Lambda}$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores λ_i correspondentes [1], [2].

Portanto, através das expressões de modelo (10)-(12), a curva de aprendizagem do algoritmo pode ser predita se a potência do ruído de medição, os autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada e os elementos da diagonal da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes forem conhecidos.

C. Matriz de Correlação do Vetor de Erro nos Coeficientes

Uma expressão recursiva para $\mathbf{k}'(n)$ pode ser obtida reescrevendo (2) em função do vetor de erro nos coeficientes $\mathbf{v}(n)$ [definido em (8)], substituindo (9) na expressão resultante, determinando o produto $\mathbf{v}(n+1)\mathbf{v}^T(n+1)$, tomando o valor esperado de ambos os lados e considerando (7), (11), bem como as Hipóteses H2)-H5). Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{K}(n) - E[\mu(n)]\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_1 - E[\mu(n)]\mathbf{R}_1\mathbf{K}(n) \\ &\quad + E[\mu^2(n)]\mathbf{R}_2 + E[\mu^2(n)]\mathbf{R}_3 J_{\min} \end{aligned} \quad (14)$$

com

$$\mathbf{R}_2 = E\left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (15)$$

e

$$\mathbf{R}_3 = E\left\{ \frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2} \right\} \quad (16)$$

denotando matrizes do tipo autocorrelação normalizada.

Agora, tendo em vista as soluções apresentadas na literatura para \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 [veja a Hipótese H1)], pré- e pós- multiplicando (14) por \mathbf{Q}^T e \mathbf{Q} , respectivamente, e tomando os elementos da diagonal principal da expressão resultante, obtém-se a seguinte recursão para $\mathbf{k}'(n)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'(n+1) &= \\ &\{\mathbf{I} - 2E[\mu(n)]\mathbf{H} + E[\mu^2(n)](2\mathbf{T} + \mathbf{P})\}\mathbf{k}'(n) + E[\mu^2(n)]J_{\min} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (17)$$

sendo as matrizes \mathbf{H} , \mathbf{T} e \mathbf{P} bem como o vetor \mathbf{s} provenientes do cálculo de \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 [28], [29]. Como condição inicial de (17), assumindo que o vetor de coeficientes do filtro adaptativo seja inicializado com zero [isto é, $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$], considera-se

$$\mathbf{k}'(0) = \text{diag}(\mathbf{Q}^T \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0^T \mathbf{Q}). \quad (18)$$

Portanto, levando em conta as soluções fornecidas em [28] e [29] para computar as matrizes do tipo autocorrelação normalizada oriundas da derivação do modelo e a condição inicial de $\mathbf{k}'(n)$ [dada em (18)], é possível prever o comportamento dos elementos da diagonal da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes [através de (17)] se os valores esperados $E[\mu(n)]$ e $E[\mu^2(n)]$ forem conhecidos; conseqüentemente, a curva de aprendizagem do algoritmo [dada por (10)] pode ser também descrita.

D. Evolução do Passo de Adaptação

Antes de prosseguir com a derivação, destaca-se que a metodologia desenvolvida até então é geral, podendo ser aplicada a outros algoritmos de passo variável apresentados na literatura. Para tal, faz-se necessário apenas determinar $E[\mu(n)]$ e $E[\mu^2(n)]$ levando em conta as especificidades do algoritmo de interesse. Particularmente, focando sobre a regra de ajuste do passo de adaptação introduzida em [6], dada em (3)-(5), expressões recursivas descrevendo a evolução do passo de adaptação do algoritmo em questão [requeridas em (6) e (17)] são agora derivadas.

1) *Determinação de $E[\mu(n)]$* : Tomando o valor esperado de ambos os lados de (3) e assumindo uma condição de variação lenta das variáveis envolvidas [31], tem-se

$$E[\mu(n)] \cong \frac{E[p^2(n)]}{E[q^2(n)]}. \quad (19)$$

Então, calculando $p^2(n)$ a partir de (4), tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, considerando as Hipóteses H3) e H6), juntamente com as definições estabelecidas em (10)-(12), obtém-se

$$\begin{aligned} E[p^2(n)] &\cong \beta^2 E[p^2(n-1)] \\ &\quad + 2\beta(1-\beta)E[p(n-1)]E[e(n)e(n-1)] \\ &\quad + (1-\beta)^2 E\{[e(n)e(n-1)]^2\} \end{aligned} \quad (20)$$

com

$$E[p(n)] \cong \beta E[p(n-1)] + (1-\beta)E[e(n)e(n-1)] \quad (21)$$

$$E[e(n)e(n-1)] \cong J_{\text{ex}}(n-1) \quad (22)$$

e

$$E\{[e(n)e(n-1)]^2\} \cong J(n)J(n-1). \quad (23)$$

Analogamente, a partir de (5), tem-se²

$$\begin{aligned} E[q^2(n)] &\cong \beta^2 E[q^2(n-1)] \\ &\quad + 2\beta(1-\beta)E[q(n-1)]J(n) \\ &\quad + (1-\beta)^2 E[e^4(n)] \end{aligned} \quad (24)$$

onde

$$E[q(n)] \cong \beta E[q(n-1)] + (1-\beta)J(n) \quad (25)$$

e

$$E[e^4(n)] \cong 3J^2(n). \quad (26)$$

2) *Determinação de $E[\mu^2(n)]$* : Como em (19), aproxima-se

$$E[\mu^2(n)] \cong \frac{E[p^4(n)]}{E[q^4(n)]}. \quad (27)$$

Então, a partir de (4), (22) e (23), obtém-se

$$\begin{aligned} E[p^4(n)] &\cong \beta^4 E[p^4(n-1)] \\ &\quad + 4\beta^3(1-\beta)E[p^3(n-1)]J_{\text{ex}}(n-1) \\ &\quad + 6\beta^2(1-\beta)^2 E[p^2(n-1)]J(n)J(n-1) \\ &\quad + 4\beta(1-\beta)^3 E[p(n-1)]E\{[e(n)e(n-1)]^3\} \\ &\quad + (1-\beta)^4 E\{[e(n)e(n-1)]^4\} \end{aligned} \quad (28)$$

com

² Levando em conta o Teorema do Limite Central, (26), (31), (34) e (35) podem ser obtidos como $E[e^k(n)] = 1 \times 3 \times \dots \times (k-1) J^{k/2}(n)$ para k par, visto que $E[e(n)] = 0$ [32, p. 148]. Alternativamente, resultados equivalentes podem ser determinados a partir de (9) e das Hipóteses H1), H3), H4) e H6).

$$E[p^3(n)] \cong \beta^3 E[p^3(n-1)] + 3\beta^2(1-\beta)E[p^2(n-1)]J_{\text{ex}}(n-1) + 3\beta(1-\beta)^2 E[p(n-1)]J(n)J(n-1) + (1-\beta)^3 E\{[e(n)e(n-1)]^3\} \quad (29)$$

$$E\{[e(n)e(n-1)]^3\} \cong 9J_{\text{min}}^2 J_{\text{ex}}(n-1) + 9J_{\text{min}} J_{\text{ex}}^2(n-1) + 9J_{\text{min}} J_{\text{ex}}^2(n) + 3J_{\text{ex}}^2(n)J_{\text{ex}}(n-1) \quad (30)$$

$$E\{[e(n)e(n-1)]^4\} \cong 9J^2(n)J^2(n-1). \quad (31)$$

Por sua vez, a partir de (5), (10) e (26), tem-se

$$E[q^4(n)] \cong \beta^4 E[q^4(n-1)] + 4\beta^3(1-\beta)E[q^3(n-1)]J(n) + 18\beta^2(1-\beta)^2 E[q^2(n-1)]J^2(n) + 4\beta(1-\beta)^3 E[q(n-1)]E[e^6(n)] + (1-\beta)^4 E[e^8(n)] \quad (32)$$

onde

$$E[q^3(n)] \cong \beta^3 E[q^3(n-1)] + 3\beta^2(1-\beta)E[q^2(n-1)]J(n) + 9\beta(1-\beta)^2 E[q(n-1)]J^2(n) + (1-\beta)^3 E[e^6(n)] \quad (33)$$

$$E[e^6(n)] \cong 15J^3(n) \quad (34)$$

e

$$E[e^8(n)] \cong 105J^4(n). \quad (35)$$

Como condição inicial para as expressões obtidas, considera-se $E[\mu^k(0)] = E[p^k(0)] = E[q^k(0)] = 0$ para $k=1,2,3$ e 4 .

Finalmente, visto que $E[\mu(n)]$ e $E[\mu^2(n)]$ podem agora ser computados recursivamente através das expressões de modelo derivadas aqui [veja (19)-(35)], conclui-se que o comportamento do algoritmo está completamente caracterizado. Consequentemente, torna-se possível prever o comportamento médio do vetor de coeficientes [veja (6)], a evolução dos elementos da diagonal da matriz de correlação do vetor de erro nos coeficientes [veja (17)], como também a curva de aprendizagem do algoritmo [veja (10)].

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Agora, visando verificar a precisão do modelo proposto, dois exemplos são apresentados considerando um problema de identificação de sistema. Em tais exemplos, o comportamento médio previsto através do modelo proposto é comparado com os resultados obtidos via simulações de MC (200 realizações independentes). A planta utilizada é obtida de uma função *sinc*, sendo normalizada de tal forma que $\|\mathbf{w}_0\|_2^2 = 1$ [29]. O sinal de entrada [veja a Hipótese H1] é obtido através de um processo autorregressivo de segunda ordem AR(2), dado por

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) + v(n) \quad (36)$$

onde a_1 e a_2 são os coeficientes do processo e $v(n)$, um ruído branco cuja variância é ajustada de tal modo que $\sigma_x^2 = 1$. A razão sinal-ruído é definida como

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2} \right) \quad (37)$$

com σ_x^2 e σ_z^2 denotando a variância do sinal de entrada e do ruído de medição, respectivamente. Nas simulações apresentadas, o parâmetro β [requerido em (4) e (5)] é feito igual a 0,95.

A. Exemplo 1

Aqui, busca-se avaliar a precisão do modelo proposto frente a um sinal de entrada fracamente correlacionado e uma SNR pequena. Para tal, uma planta com $M = 32$ coeficientes

é utilizada. Os coeficientes do processo AR(2) são $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,7$, resultando em uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de $\chi = 57,58$. O ruído de medição inerente ao ambiente de operação do sistema tem variância $\sigma_z^2 = 10^{-2}$, implicando uma SNR = 20 dB.

B. Exemplo 2

Aqui, avalia-se a precisão do modelo proposto frente a um sinal de entrada fortemente correlacionado e uma SNR maior do que aquela do Exemplo 1. Para tal, uma planta com $M = 128$ coeficientes é considerada. Os coeficientes do processo AR(2) são $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,93$, produzindo então uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de $\chi = 1173,38$. O ruído de medição tem agora uma variância de $\sigma_z^2 = 10^{-4}$, resultando em uma SNR = 40 dB.

As Figs. 2 e 3 apresentam os resultados obtidos para os cenários descritos nos Exemplos 1 e 2, respectivamente. Observa-se, através de tais figuras, que o modelo proposto prediz satisfatoriamente o comportamento do algoritmo considerado (sobretudo, em regime permanente). Tal precisão (a favor do modelo) pode ser verificada para diferentes dispersões de autovalores, valores de SNR e ordens do filtro adaptativo.

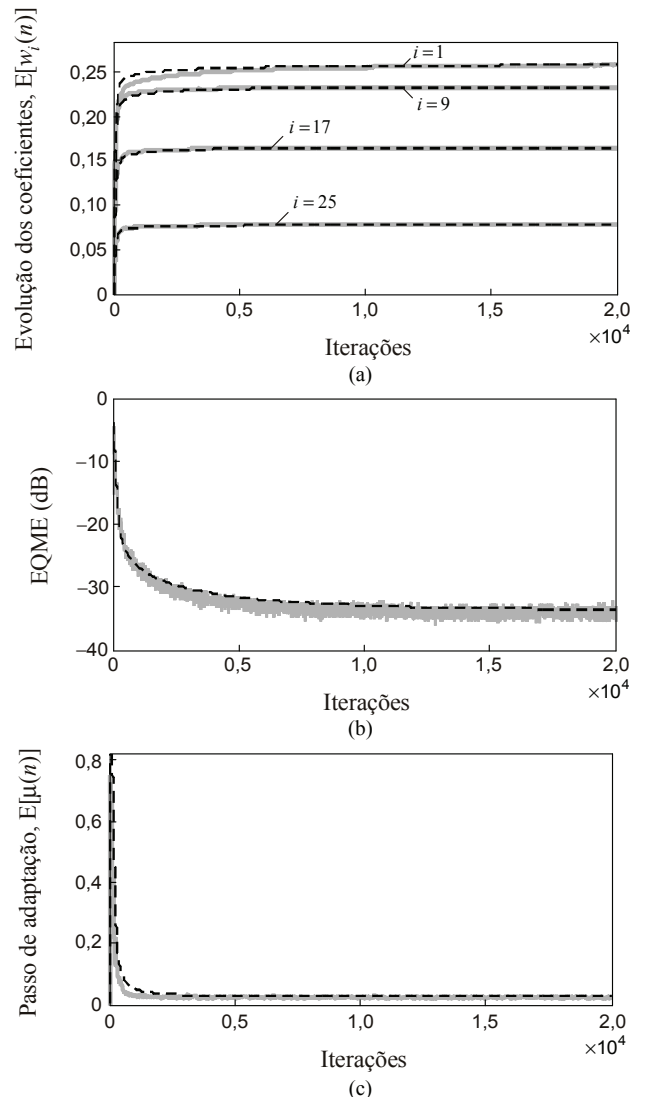


Fig. 2. Exemplo 1. (a) Comportamento médio de quatro ($i=1,9,17$ e 25) coeficientes do filtro adaptativo. (b) Curva de aprendizagem (EQME). (c) Evolução do passo de adaptação. (Linhas cinza) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto.

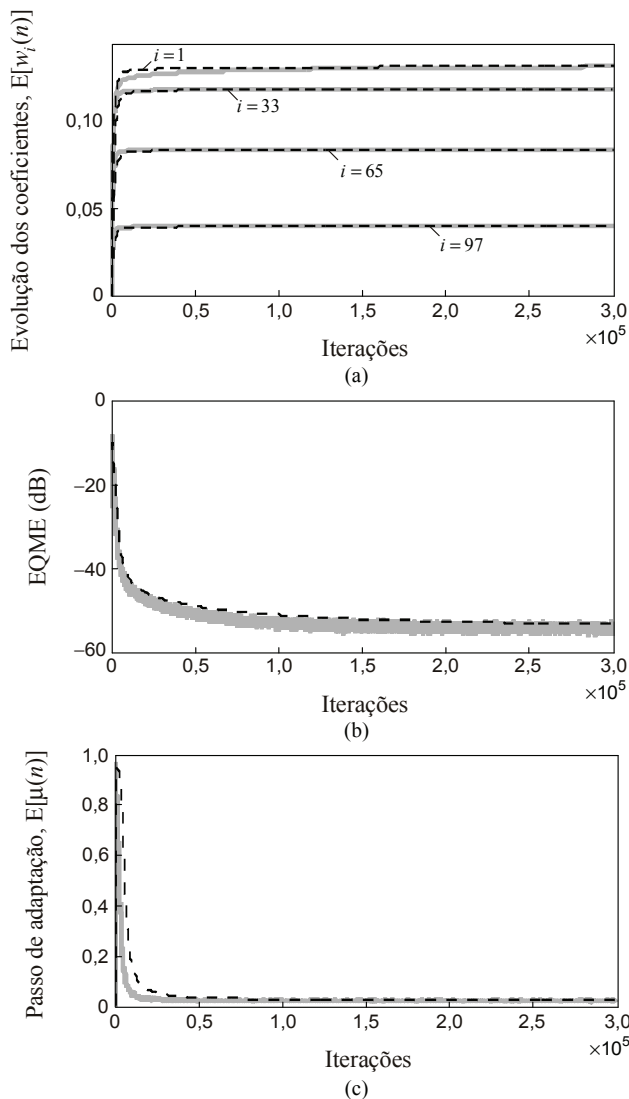


Fig. 3. Exemplo 2. (a) Comportamento médio de quatro ($i=1, 33, 64$ e 97) coeficientes do filtro adaptativo. (b) Curva de aprendizagem (EQME). (c) Evolução do passo de adaptação. (Linhas cinza) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, considerando sinais de entrada gaussianos reais (correlacionados e não correlacionados), foi derivado um modelo analítico para um algoritmo NLMS de passo variável não paramétrico da literatura [6]. Particularmente, foram obtidas expressões de modelo que permitem prever o comportamento médio do vetor de coeficientes, a curva de aprendizagem, a matriz de correlação do vetor de erros nos coeficientes, como também a evolução do passo de adaptação. Os resultados de simulação apresentados ratificam a precisão das expressões de modelo obtidas frente a diferentes condições de operação (sobretudo, em regime permanente). Por fim, destaca-se que a metodologia desenvolvida aqui pode ser ainda aplicada a outros algoritmos NLMS de passo variável, levando-se em conta as especificidades da regra de ajuste do passo de adaptação utilizada no algoritmo considerado.

REFERÊNCIAS

- [1] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.
- [2] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, 2nd ed. West Sussex, U.K.: John Wiley & Sons, 2013.
- [3] A. Mader, H. Puder, and G. U. Schmidt, "Step-size control for acoustic echo cancellation filters – an overview," *Signal Process.*, vol. 80, no. 9, pp. 1697–1719, Sep. 2000.
- [4] H.-C. Shin, A. H. Sayed, and W.-J. Song, "Variable step-size NLMS and affine projection algorithms," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 11, no. 2, pp. 132–135, Feb. 2004.
- [5] J. Benesty, H. Rey, L. R. Vega, and S. Tressens, "A nonparametric VSS NLMS algorithm," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 13, no. 10, pp. 581–584, Oct. 2006.
- [6] J. G. F. Zipf, O. J. Tobias, and R. Seara, "Non-parametric VSS-NLMS algorithm with control parameter based on the error correlation," in *Proc. Int. Telecommun. Symp. (ITS)*, Manaus, AM, Brazil, Sep. 2010, pp. 1–5.
- [7] K. Mayyas and F. Momani, "An LMS adaptive algorithm with a new step-size control equation," *J. Franklin Inst.*, vol. 348, no. 4, pp. 589–605, May 2011.
- [8] S. Ciochină, C. Paleologu, and J. Benesty, "An optimized NLMS algorithm for system identification," *Signal Process.*, vol. 118, pp. 115–121, Jan. 2016.
- [9] T. Aboulnasr and K. Mayyas, "A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, no. 3, pp. 631–639, Mar. 1997.
- [10] T. J. Shan and T. Kailath, "Adaptive algorithms with an automatic gain control feature," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 35, no. 1, pp. 122–127, Jan. 1988.
- [11] W.-P. Ang and B. Farhang-Boroujeny, "A new class of gradient adaptive step-size LMS algorithms," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 4, pp. 805–810, Apr. 2001.
- [12] Y. Zhang, N. Li, J. A. Chambers, and Y. Hao, "New gradient-based variable step size LMS algorithms," *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, vol. 2008, no. 529480, pp. 1–9, Jan. 2008.
- [13] Y.-P. Li, T.-S. Lee, and B.-F. Wu, "A variable step-size sign algorithm for channel estimation," *Signal Process.*, vol. 102, pp. 304–312, Sep. 2014.
- [14] R. H. Kwong and E. W. Johnston, "A variable step size LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, no. 7, pp. 1633–1642, Jul. 1992.
- [15] M. H. Costa and J. C. M. Bermudez, "A noise resilient variable step-size LMS algorithm," *Signal Process.*, vol. 88, no. 3, pp. 733–748, Mar. 2008.
- [16] S. Zhao, Z. Man, S. Khoo, and H.-R. Wu, "Variable step-size LMS algorithm with a quotient form," *Signal Process.*, vol. 89, no. 1, pp. 67–76, Jan. 2009.
- [17] Y. Wei, S. B. Gelfand, and J. V. Krogmeier, "Noise-constrained least mean squares algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, no. 9, pp. 1961–1970, Sep. 2001.
- [18] D. W. Kim, J. H. Choi, Y. S. Choi, C. H. Jeon, and H. Y. Ko, "A VS-LMS algorithm using normalized absolute estimation error," in *Proc. Digital Signal Process. Applicat. (TENCON)*, Perth, WA, Australia, Nov. 1996, vol. 2, pp. 692–697.
- [19] S. Gollamudi, S. Nagaraj, S. Kapoor, and Y.-F. Huang, "Set-membership filtering and a set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step size," *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 5, no. 5, pp. 111–114, May 1998.
- [20] D. I. Pazaitis and A. G. Constantinides, "A novel kurtosis driven variable step-size adaptive algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, no. 3, pp. 864–872, Mar. 1999.
- [21] L. R. Vega, H. Rey, J. Benesty, and S. Tressens, "A new robust variable step-size NLMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1878–1893, May 2008.
- [22] H. Cho and S. W. Kim, "Variable step-size normalized LMS algorithm by approximating correlation matrix of estimation error," *Signal Process.*, vol. 90, no. 9, pp. 2792–2799, Sep. 2010.
- [23] H.-C. Huang and J. Lee, "A new variable step-size NLMS algorithm and its performance analysis," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 4, pp. 2055–2060, Apr. 2012.
- [24] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic modeling of the transform-domain ϵ LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1840–1852, May 2008.
- [25] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic analysis of the transform domain LMS algorithm for a non-stationary environment," in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Aug. 2009, Glasgow, Scotland, pp. 1730–1734.
- [26] E. L. O. Batista and R. Seara, "On the performance of adaptive pruned Volterra filters," *Signal Process.*, vol. 93, no. 7, pp. 1909–1920, Jul. 2013.
- [27] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the constrained stochastic gradient algorithm: model, performance, and improved version," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 4, pp. 1304–1315, Apr. 2009.
- [28] N. J. Bershad, "Analysis of the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 4, pp. 793–806, Aug. 1986.
- [29] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, "An improved stochastic model of the NLMS algorithm for correlated input data," in *Proc. European Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Set. 2007, Poznan, Poland, pp. 360–364.
- [30] E. V. Kuhn e R. Seara, "Análise de desempenho do algoritmo NLMS em regime permanente," in *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT)*, Fortaleza, CE, Brasil, Set. 2013, pp. 1–5.
- [31] C. Samson and V. Reddy, "Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 31, no. 5, pp. 1177–1191, Oct. 1983.
- [32] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2002.