

Um novo modelo para o algoritmo de Pseudo Projeções Afins com ordem deficiente e incluindo efeitos de inicialização

Juan L. Marin, José C. M. Bermudez e Márcio H. Costa

Resumo— Este trabalho apresenta um novo modelo para o comportamento do algoritmo de Pseudo Projeções Afins (PAP). O novo modelo considera situações de interesse prático ainda não estudadas na literatura, como a implementação com ordem deficiente, passo não unitário e efeitos de inicialização. O sinal de entrada é modelado como um processo autoregressivo (AR) com ordem que pode ser superior à ordem de projeção do algoritmo. Hipóteses simplificadoras usadas nas análises existentes são reavaliadas, e uma generalização do estimador de mínimos quadrados do processo AR é usada para simplificar a análise no cenário de ordem deficiente. Novos modelos são obtidos para o comportamento médio dos coeficientes e para a evolução do erro quadrático médio de estimação. Resultados de simulações de Monte Carlo ilustram a acurácia dos novos modelos.

Palavras-Chave— Filtragem Adaptativa. Algoritmo de Pseudo Projeções Afins. Análise Estocástica. Identificação de Sistemas.

Abstract— This work presents a new model for the behavior of the Pseudo Affine Projection (PAP) Algorithm. The new model addresses situations of practical interest that have not yet been studied in the literature. We consider implementations with a deficient order, non-unity step size and under arbitrary initialization. The input signal is modeled as an autoregressive (AR) process whose order can be bigger than the algorithm projection order. Typical simplifying hypotheses are re-analyzed, and a generalization of the mean-square estimator of the AR process is employed to simplify the analysis in a scenario of deficient order. New models are obtained for the mean weight behavior and for the mean squared estimation error. Monte Carlo simulation results illustrate the accuracy of the new models.

Keywords— Adaptive Filtering. Pseudo Affine Projection Algorithm. Stochastic Analysis. System Identification.

I. INTRODUÇÃO

Apesar de muito populares devido à facilidade de implementação, os algoritmos *Least Mean Squares* (LMS) e *Normalized Least Mean Squares* (NLMS) apresentam baixas velocidades de convergência para sinais de entrada fortemente correlacionados no tempo. O algoritmo de Projeções Afins (AP) foi proposto em [1] como uma alternativa capaz de acelerar a convergência desses algoritmos. O algoritmo AP atualiza o vetor de coeficientes em uma direção ortogonal ao subespaço formado pelos últimos P vetores de entrada. Isso tende a descorrelacionar o sinal de entrada e acelerar sua convergência [2] ao custo de uma maior complexidade computacional. Com

a evolução da tecnologia, a maior complexidade do algoritmo AP deixou de ser impeditiva para valores pequenos de P , tornando esse algoritmo útil para várias aplicações de engenharia. Posteriormente, foi proposta uma versão simplificada do algoritmo AP que evita a necessidade de filtragem de vetores passados do sinal de entrada utilizando os novos coeficientes do filtro adaptativo. Trata-se do algoritmo Pseudo-AP (PAP), proposto em [3]. A proposta de algoritmo PAP é substituir o sinal de entrada no algoritmo AP com passo de adaptação unitário por seu modelo de predição autoregressivo (AR) de ordem P (a ordem de projeção do algoritmo), independentemente do processo real de entrada. A utilização do passo unitário leva a um algoritmo AP com sinal de erro escalar e, portanto de mais fácil implementação. Em seguida, um passo de adaptação, que pode não ser unitário, é diretamente inserido na equação de atualização dos coeficientes. Assim, todas as análises do algoritmo AP existente na literatura que consideram o sinal de entrada autoregressivo de ordem P são, de fato, análises do algoritmo PAP. Um modelo analítico foi proposto em [4] para o algoritmo PAP com uma entrada AR de ordem conhecida e filtro adaptativo com comprimento suficiente. Em [5] esse modelo foi estendido para o caso de ordem deficiente (valor de P menor do que a ordem do processo AR de entrada). Esse cenário é de grande interesse porque permite que o algoritmo PAP seja implementado com complexidade computacional menor do que quando implementado com ordem suficiente. Mais recentemente foi detectado um problema de modelagem do comportamento do algoritmo PAP nas primeiras iterações após sua inicialização. Em [6] e [7] foi estudado o comportamento do algoritmo considerando os efeitos da inicialização dos coeficientes. Mostrou-se que o algoritmo PAP não segue o comportamento previsto pelos modelos originais para uma inicialização arbitrária e um sinal de entrada com alto grau de correlação. Foi então proposto um novo modelo estocástico que considera esse efeito. O caso estudado em [6], [7] foi o de passo unitário, ordem suficiente e comprimento suficiente do filtro adaptativo. Este trabalho estende os estudos feitos em [6], [7] e apresenta um novo modelo analítico para o algoritmo PAP considerando ordem deficiente, passo não unitário e incluindo os efeitos da inicialização dos coeficientes do filtro adaptativo.

O trabalho é organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 é introduzido o modelo de sinal de entrada e a notação utilizada. A Seção 3 mostra a formulação da equação de atualização do algoritmo PAP com ordem deficiente. Na Seção 4 é derivado o modelo analítico para o comportamento estocástico do

Juan L. Marin, Coordenação de Eletrônica, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia. Vitória da Conquista - BA. Brasil. Email: juan.lieber.marin@gmail.com. José C. M. Bermudez e Márcio H. Costa, Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brasil. E-mail: j.bermudez@ieec.com, costa@eel.ufsc.br.

algoritmo. A Seção 5 apresenta simulações de Monte Carlo para validade o modelo teórico. Por fim, a Seção 6 conclui o trabalho.

II. MODELO DE SINAL DE ENTRADA

O sistema adaptativo visa estimar um sinal desejado $d(n)$ modelado por:

$$d(n) = \mathbf{w}^{oT} \mathbf{u}(n) + r(n) \quad (1)$$

em que o vetor N -dimensional $\mathbf{w}^o = [w_0^o \dots w_{N-1}^o]^T$ modela a resposta ao impulso de um sistema desconhecido, $\mathbf{u}(n) = [u(n), \dots, u(n-N+1)]^T$ é o vetor de sinal de entrada e $r(n)$ é um processo Gaussiano branco com variância σ_r^2 e independente de qualquer outro sinal. O sinal $u(n)$ é modelado como um processo AR de ordem H dado por:

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=1}^H a_i \mathbf{u}(n-i) + \mathbf{z}(n) \quad (2)$$

em que a_i são os coeficientes do processo AR e $\mathbf{z}(n)$ é um vetor com N amostras de um processo Gaussiano branco estacionário com variância σ_z^2 .

III. O ALGORITMO PAP DE ORDEM DEFICIENTE

A equação de atualização do algoritmo PAP é dada por [4]:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \alpha \frac{\phi(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} e(n) \quad (3)$$

em que $\mathbf{w}(n) = [w_0(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$ é o vetor dos coeficientes do filtro adaptativo e

$$e(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}^o + r(n) - \mathbf{u}^T(n)\mathbf{w}(n) \quad (4)$$

é o sinal de erro. O algoritmo PAP utiliza P vetores passados do sinal de entrada para determinar o vetor $\phi(n)$ que define a direção de atualização e é dado por:

$$\phi(n) = \mathbf{u}(n) - \mathbf{U}(n)\hat{\mathbf{a}}(n) \quad (5)$$

em que $\mathbf{U}(n) = [\mathbf{u}(n-1), \dots, \mathbf{u}(n-P)]$ e $\hat{\mathbf{a}}(n)$ é o estimador de mínimos quadrados dos coeficientes de um modelo AR de ordem P do sinal de entrada. Sua expressão é:

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1} \mathbf{U}^T(n)\mathbf{u}(n) \quad (6)$$

A possibilidade de implementação com ordem deficiente é expressa pela consideração de que $P < H$. Pode-se escrever (2) como [5]

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{U}(n)\mathbf{b} + \bar{\mathbf{U}}(n)\mathbf{c} + \mathbf{z}(n) \quad (7)$$

em que $\bar{\mathbf{U}}(n) = [\mathbf{u}(n-P-1) \dots \mathbf{u}(n-H)]$ contém os $H-P$ vetores de entrada menos recentes, $\mathbf{b} = [a_1 \dots a_P]^T$ e $\mathbf{c} = [a_{P+1} \dots a_H]^T$. Substituindo (7) em (6), obtém-se:

$$\hat{\mathbf{a}}(n) = \mathbf{b} + [\mathbf{U}^T(n)\mathbf{U}(n)]^{-1} \mathbf{U}^T(n)[\bar{\mathbf{U}}(n)\mathbf{c} + \mathbf{z}(n)] \quad (8)$$

A equação (8) mostra que se $P < H$, $\hat{\mathbf{a}}(n)$ é um estimador polarizado de \mathbf{b} . Consequentemente, $\phi(n)$ não pode mais ser modelado como uma sequência de vetores estatisticamente independentes como foi feito em [4].

IV. ANÁLISE TEÓRICA

As seguintes hipóteses estatísticas são usadas na análise:

- H1: O número de coeficientes do filtro adaptativo é grande tal que $N \gg P$.
- H2: A dependência estatística entre $\mathbf{z}(n)$ e $\mathbf{U}(n)$ pode ser descartada se $N \gg P$.
- H3: O vetor $\phi(n)$ é ortogonal às colunas de $\mathbf{U}(n)$.
- H4: Os vetores $\phi(n)$ e $\mathbf{w}(n)$ são estatisticamente independentes.

As hipóteses H3 e H4 foram utilizadas em [2] sob a condição de que $H = P$. Elas serão menos válidas quanto maior for a diferença entre os valores de P e H pois, conforme mostra a equação (5), a correlação do vetor $\phi(n)$ se aproxima da correlação de $\mathbf{u}(n)$ quando $H-P$ é grande. Assim, os vetores $\phi(n)$ e $\phi(n-1)$ apresentam correlação entre si. Como, através da equação (3), $\phi(n-1)$ está correlacionado com $\mathbf{w}(n)$, então o vetor $\phi(n)$ apresentará correlação com o vetor $\mathbf{w}(n)$. Essas duas hipóteses são empregadas aqui como aproximações para viabilizar a análise matemática. A baixa sensibilidade do modelo matemático em relação a essas aproximações será verificada através dos resultados de simulação apresentados na Seção V.

Definindo:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^o \quad (9)$$

a equação (3) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{v}(n) + \alpha \frac{\phi(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} e(n) \quad (10)$$

e o sinal de erro se torna:

$$e(n) = -\mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n) + r(n) \quad (11)$$

A. Efeito da inicialização

Substituindo (11) e (5) em (10) e usando a propriedade $\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n+1) = \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n)$ (obtida com o auxílio da hipótese H3), obtém-se

$$\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) = (1-\alpha)\mathbf{e}_a(n-1) + \alpha\mathbf{r}(n-1) \quad (12)$$

em que $\mathbf{e}_a(n-1) = [e_a(n-1), \dots, e_a(n-P)]^T$, com $e_a(n) = \mathbf{u}^T(n)\mathbf{v}(n)$, e $\mathbf{r}(n-1) = [r(n-1), \dots, r(n-P)]^T$. Entretanto, (12) pode não ser válida em $n=0$ para uma inicialização arbitrária $\mathbf{w}(0)$. Procedendo como em [6] para considerar o efeito de inicialização, (12) se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(n) &= (1-\alpha)\mathbf{e}_a(n-1) + \alpha\mathbf{r}(n-1) + \\ &\mathbf{Q}(-n+1)[\mathbf{U}^T(n)\mathbf{v}(0) - (1-\alpha)\mathbf{e}_a(n-1) \\ &\quad - \alpha\mathbf{r}(n-1)] \end{aligned} \quad (13)$$

em que:

$$\mathbf{Q}(-n+1) = \begin{bmatrix} u_{-1}(-n+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{-1}(-n+2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{-1}(-n+P) \end{bmatrix} \quad (14)$$

e $u_{-1}(n)$ é a função degrau unitário.

B. Comportamento médio dos coeficientes

O vetor $e_a(n-1)$ é composto por P amostras do erro *a priori* de estimação, e seu valor é desconhecido. Assim, sua ocorrência em (13) precisa ser aproximada. A Figura 1 mostra o comportamento de $e_a(n)$ para um sinal $u(n) = -0,4u(n-1) + z(n)$, com $\sigma_z^2 = 0,8469$, $P = 1$, planta desconhecida consistindo em uma janela de Hann normalizada com $N = 64$ coeficientes, passo de adaptação $\alpha = 0,8$ e com $w(0) = \mathbf{0}$.

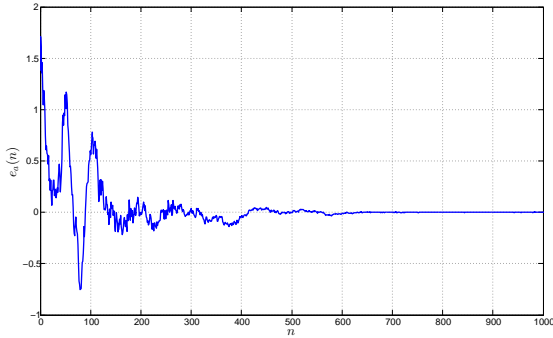


Fig. 1
COMPORTAMENTO INSTANTÂNEO DE $e_a(n)$

Com base nesse comportamento tipicamente exponencial não monotônico, observado no sinal $e_a(n)$ para diversos tipos de sinais de entrada $u(n)$ do tipo autoregressivo, e no comportamento também típico dos algoritmos do gradiente estocástico (cujo tempo de convergência é fortemente influenciado por um autovalor da matriz de autocorrelação do sinal de entrada) optou-se por modelar as componentes do vetor $e_a(n-1)$ com um modelo de decaimento exponencial controlado pelo autovalor que produziria o modo de convergência mais lento e oscilatório no algoritmo *steepest-descent* [8]. Assim,

$$e_a(n-1) \approx [(1-\alpha\lambda)^{n-1} \quad \dots \quad (1-\alpha\lambda)^{n-P}]^T \quad (15)$$

em que λ é o autovalor da matriz de autocorrelação de $u(n)$ que produza $(1-\alpha\lambda)$ o mais próximo de -1 . Substituindo (15) em (13) e expandindo (11) utilizando (5), a equação (10) se torna:

$$\begin{aligned} v(n+1) = & v(n) - \alpha \frac{\phi(n)\phi^T(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} v(n) \\ & - \alpha(1-\alpha) \frac{\phi(n)\beta(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} \\ & - \alpha \frac{\phi(n)\hat{a}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}^T(n)v(0)}{\phi^T(n)\phi(n)} \\ & + \alpha^2 \frac{\phi(n)\hat{a}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)r(n-1)}{\phi^T(n)\phi(n)} \\ & + \alpha \frac{\phi(n)r_a(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} \end{aligned} \quad (16)$$

em que:

$$\beta(n) = \sum_{i=1}^P \hat{a}(n)_i (1-\alpha\lambda)^{n-i} [1 - u_{-1}(-n+i)] \quad (17)$$

e $r_a(n)$ é o ruído filtrado definido por [2]

$$r_a(n) = r(n) - \alpha \hat{a}^T(n) r(n-1) \quad (18)$$

A obtenção de uma forma fechada para $\beta(n)$ requer a avaliação das componentes de $\hat{a}(n)$. A aproximação feita em [4] não é válida para o cenário de ordem deficiente. É possível mostrar, utilizando a hipótese H2 e tomando o valor esperado de (7), que $\hat{a}(n)$ é um estimador polarizado dos primeiros P coeficientes de \mathbf{a} . Conforme mostrado em [9], se $u(n)$, dado por

$$u(n) = \sum_{i=1}^P a_i u(n-i) + z(n), \quad (19)$$

é saída de um sistema estável, o estimador dos coeficientes do sistema é dado por:

$$\mathbf{a}_w = -\mathbf{R}_{u_{P \times P}}^{-1} \mathbf{p}_u \quad (20)$$

em que $\mathbf{R}_{u_{P \times P}}$ é a matriz de autocovariância do vetor $[u(n), \dots, u(n-P+1)]^T$ e $\mathbf{p}_u = [r_u(1), \dots, r_u(P)]^T$, em que $r_u(k)$ é a sequência de autocorrelação de $u(n)$. Portanto, \mathbf{a}_w é uma generalização de $\hat{a}(n)$ e $\mathbf{a}_w = \mathbf{a}$ se $P \geq H$.

Utilizando (20), a equação (17) pode ser escrita como:

$$\beta(n) = \sum_{i=1}^P a_{w_i} (1-\alpha\lambda)^{n-i} [1 - u_{-1}(-n+i)] \quad (21)$$

Como $r(n)$ é de média zero e independente de qualquer outro sinal, os valores esperados dos dois últimos termos de (16) são nulos. O mesmo se aplica ao terceiro termo, já que $\phi(n)$ possui média zero. Portanto, o valor esperado de (16), utilizando a hipótese H4, é dado por

$$\begin{aligned} E\{v(n+1)\} = & E\{v(n)\} - \alpha E\left\{ \frac{\phi(n)\phi^T(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} \right\} E\{v(n)\} \\ & - \alpha E\left\{ \frac{\phi(n)\hat{a}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}^T(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} \right\} v(0) \end{aligned} \quad (22)$$

Utilizando a hipótese H1, o primeiro valor esperado em (22) pode ser aproximado como feito em [5]. Assim,

$$E\left\{ \frac{\phi(n)\phi^T(n)}{\phi^T(n)\phi(n)} \right\} \approx \frac{1}{(G-2)\sigma_\phi^2} \mathbf{R}_\phi \quad (23)$$

em que $G = N - P$, σ_ϕ^2 é a variância dos elementos de $\phi(n)$ e $\mathbf{R}_\phi = E\{\phi(n)\phi^T(n)\}$. Definindo, como em [6],

$$\mathbf{R}_{\phi_u}(n) = E\{\phi(n)\hat{a}(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}^T(n)\} \quad (24)$$

a equação (22) pode ser escrita como:

$$E\{v(n+1)\} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \mathbf{R}_\phi}{\sigma_\phi^2 (G-2)} \right) E\{v(n)\} + \frac{\alpha \mathbf{R}_{\phi_u}(n) v(0)}{\sigma_\phi^2 (G-2)} \quad (25)$$

A matriz \mathbf{R}_ϕ possui a mesma forma determinada em [5]:

$$\mathbf{R}_\phi = \frac{G}{N} \sigma_z^2 \mathbf{I} + \Delta \quad (26)$$

em que

$$\mathbf{\Delta} = E\{\mathbf{P}_\perp(n)\bar{\mathbf{U}}(n)\mathbf{c}\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{U}}^T(n)\mathbf{P}_\perp^T(n)\} \quad (27)$$

e $\mathbf{P}_\perp(n)$ é a matriz de projeção no espaço complementar ao espaço gerado pelas colunas de $\mathbf{U}(n)$. As matrizes $\mathbf{\Delta}$ e $\mathbf{R}_{\phi u}(n)$ dependem apenas das estatísticas do sinal de entrada.

C. Erro Quadrático Médio

Elevando (11) ao quadrado, tomando o valor esperado e usando as propriedades de $r(n)$ tem-se:

$$\begin{aligned} E\{e^2(n)\} &= (1 - \alpha)^2\beta^2(n) + \text{Tr}\{\mathbf{R}_\phi\mathbf{K}(n)\} + E\{r_a^2(n)\} \\ &\quad 2E\{\mathbf{v}(n)\phi(n)\hat{\mathbf{a}}(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{U}(n)\mathbf{v}(0) \\ &\quad + \mathbf{v}^T(0)(\mathbf{U}(n)\mathbf{Q}(-n+1)\hat{\mathbf{a}}(n))^2\mathbf{v}(0) \\ &\quad - \alpha^2 E\{(\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{r}(n-1))^2\} \end{aligned} \quad (28)$$

em que $\mathbf{K}(n) = E\{\mathbf{v}(n)\mathbf{v}^T(n)\}$.

Substituindo $\hat{\mathbf{a}}(n)$ por \mathbf{a}_w em (20) e a definição de $r_a(n)$ dada por (18), o terceiro valor esperado em (28) é calculado como

$$E\{r_a^2(n)\} = (1 + \alpha^2\mathbf{a}_w^T\mathbf{a}_w)\sigma_r^2 \quad (29)$$

e o último valor esperado se torna

$$E\{(\hat{\mathbf{a}}^T(n)\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{r}(n-1))^2\} = \mathbf{a}_w^T\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{a}_w\sigma_r^2 \quad (30)$$

Definindo como em [7]:

$$\mathbf{R}_{uu}(n) = E\{(\mathbf{U}(n)\mathbf{Q}(-n+1)\hat{\mathbf{a}}(n))^2\} \quad (31)$$

e utilizando a definição da matriz $\mathbf{R}_{\phi u}(n)$, a equação (28) é dada por:

$$\begin{aligned} E\{e^2(n)\} &= (1 - \alpha)^2\beta^2(n) + \text{Tr}\{\mathbf{R}_\phi\mathbf{K}(n)\} \\ &\quad + (1 + \alpha^2\mathbf{a}_w^T\mathbf{a}_w)\sigma_r^2 + 2E\{\mathbf{v}^T(n)\}\mathbf{R}_{\phi u}(n)\mathbf{v}(0) \\ &\quad + \mathbf{v}^T(0)\mathbf{R}_{uu}(n)\mathbf{v}(0) - \alpha^2\mathbf{a}_w^T\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{a}_w\sigma_r^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Para avaliar o erro quadrático médio é necessário modelar a evolução da matriz $\mathbf{K}(n)$ de correlação do vetor de erro nos coeficientes.

D. Matriz de correlação do erro nos coeficientes

Pós-multiplicando (16) por sua transposta, tomando o valor esperado, aplicando as hipóteses simplificadoras e o teorema da fatoração dos momentos gaussianos [7], [8], obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(n+1) &= \mathbf{K}(n) - \frac{\alpha}{\sigma_\phi^2(G-2)}[\mathbf{R}_\phi\mathbf{K}(n) + \mathbf{K}(n)\mathbf{R}_\phi] \\ &\quad + \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}\beta^2(n)\mathbf{R}_\phi \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}(1 + \alpha^2\mathbf{a}_w^T\mathbf{a}_w)\sigma_r^2\mathbf{R}_\phi \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}[\mathbf{R}_\phi\text{Tr}[\mathbf{R}_\phi\mathbf{K}(n)] + 2\mathbf{R}_\phi\mathbf{K}(n)\mathbf{R}_\phi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\alpha}{\sigma_\phi^2(G-2)}[\mathbf{R}_{\phi u}(n)\mathbf{v}(0)E\{\mathbf{v}^T(n)\}] \\ &- \frac{\alpha}{\sigma_\phi^2(G-2)}[E\{\mathbf{v}(n)\}\mathbf{v}^T(0)\mathbf{R}_{\phi u}^T(n)] \\ &+ \frac{2\alpha^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}[\mathbf{R}_{\phi u}(n)\mathbf{v}^T(0)E\{\mathbf{v}(n)\}\mathbf{R}_\phi] \\ &+ \frac{2\alpha^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}[\mathbf{v}^T(0)\mathbf{R}_{\phi u}^T(n)E\{\mathbf{v}(n)\}\mathbf{R}_\phi] \\ &+ \frac{2\alpha^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}[\mathbf{R}_\phi E\{\mathbf{v}(n)\}\mathbf{v}^T(0)\mathbf{R}_{\phi u}^T(n)] \\ &+ \frac{2\alpha^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}[\mathbf{R}_{\phi u}(n)\mathbf{v}(0)\mathbf{v}^T(0)\mathbf{R}_{\phi u}^T(n)] \\ &+ \frac{\alpha^2}{\sigma_\phi^4G(G+2)}\mathbf{R}_\phi\mathbf{v}^T(0)\mathbf{R}_{uu}(n)\mathbf{v}(0) \\ &- \frac{\alpha^4}{\sigma_\phi^4G(G+2)}\mathbf{R}_\phi\mathbf{a}_w^T\mathbf{Q}(-n+1)\mathbf{a}_w\sigma_r^2 \end{aligned} \quad (33)$$

V. SIMULAÇÕES

Esta seção apresenta resultados de simulações Monte Carlo para verificar a validade e as limitações das equações (25), (32) e (33). Em todos os casos, as matrizes $\mathbf{R}_{\phi u}(n)$, $\mathbf{R}_{uu}(n)$ e $\mathbf{\Delta}$ foram estimadas numericamente a partir de realizações do processo de entrada. A resposta w^o do sistema desconhecido é uma janela de Hanning de comprimento N e com norma ℓ_2 unitária. O vetor $w(0)$ é inicializado no vetor nulo $w(0) = \mathbf{0}$, $\sigma_r^2 = 10^{-6}$, $\sigma_u^2 = 1$, e os resultados correspondem à média de 600 realizações.

Exemplo 1: Para comparar o modelo proposto neste trabalho e o modelo apresentado em [4], o primeiro exemplo utilizou o seguinte conjunto de parâmetros: $u(n) = 1,96u(n-1) - 0,9893u(n-2) + z(n)$ com $\sigma_z^2 = 0,0575$, $P = 2$, $N = 64$ e $\alpha = 0,8$. A Figura 2 compara o resultado de simulações de Monte Carlo da evolução do 50-ésimo coeficiente para o algoritmo PAP com as previsões fornecidas pelos dois modelos. A previsão obtida com o novo modelo é claramente superior. O modelo de [4] não foi capaz de prever de forma satisfatória o comportamento do coeficiente durante o transitório. A Figura 3 apresenta o comportamento do logaritmo do erro quadrático médio obtido por simulação e previsto pelos dois modelos. Aqui também é clara a superioridade do novo modelo.

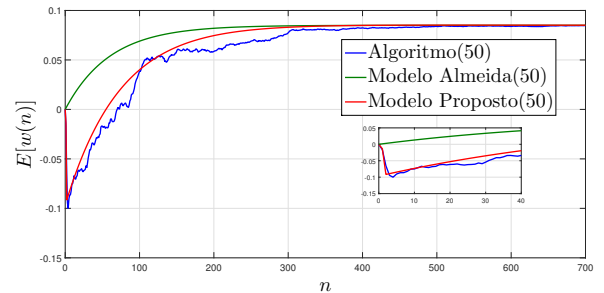


Fig. 2

EXEMPLO 1: COMPORTAMENTO MÉDIO DO COEFICIENTE $w_{50}(n)$ PARA O CASO DE ORDEM SUFICIENTE.

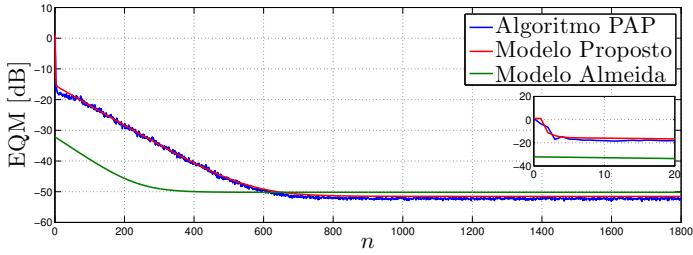


Fig. 3

EXEMPLO 1: ERRO QUADRÁTICO MÉDIO, EM DECIBÉIS, PARA O CASO DE ORDEM SUFICIENTE.

Exemplo 2: Para avaliar o modelo proposto no cenário de ordem insuficiente, um segundo conjunto de parâmetros foi usado: a entrada $u(n)$ é um processo AR(10) com coeficientes $\mathbf{a} = [-0,9, 0,7, -0,6, 0,5, -0,45, 0,35, -0,3, 0,25, -0,2, 0,1]$, $\sigma_z^2 = 0,5388$, $\lambda = 2,4054$, $P = 2$, $\alpha = 0,8$ e $N = 32$. A Figura 4 mostra o comportamento médio do coeficiente $w_{25}(n)$.

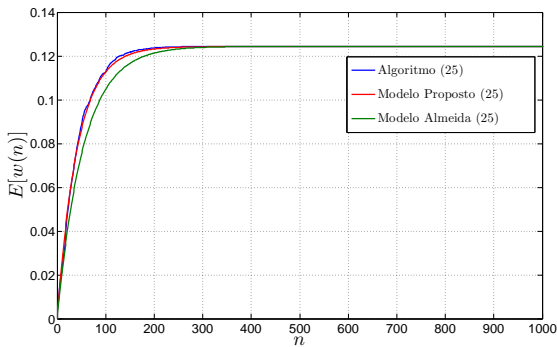


Fig. 4

EXEMPLO 2: COMPORTAMENTO MÉDIO DO COEFICIENTE $w_{25}(n)$ PARA O CASO DE ORDEM INSUFICIENTE.

A Figura 5 mostra os resultados obtidos para o logaritmo do Erro Quadrático Médio em excesso (EQME). Verifica-se que o modelo (25) apresenta um erro em excesso em regime permanente menor que 1dB e em transitório menor que 6dB. Nota-se uma discrepância entre a previsão do modelo e o comportamento real do EQME em uma parte do período transitório. Isso ocorre devido à violação da teoria da independência (hipótese H4) para $P < H$. Esse é o mesmo efeito verificado em modelos do algoritmo NLMS que empregam a teoria da independência. Nota-se também que o comportamento previsto pelo novo modelo em regime permanente é bem mais acurado com os resultados de simulação do que o previsto pelo modelo de [5], que apresenta um erro elevado nas primeiras iterações. Nota-se ainda que em regime permanente, o modelo proposto por este trabalho produz um erro pequeno quando comparado à simulação de Monte Carlo.

VI. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um modelo analítico aperfeiçoado para a previsão do comportamento estocástico para o algo-

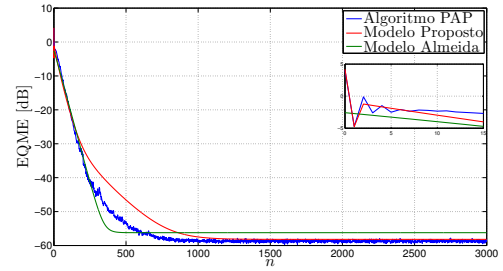


Fig. 5

EXEMPLO 2: ERRO QUADRÁTICO MÉDIO EM EXCESSO, EM DECIBÉIS, PARA O CASO DE ORDEM INSUFICIENTE

ritmo de Pseudo Projeções Afins para o cenário de ordem deficiente e levando em conta os efeitos de inicialização. Equações determinísticas foram derivadas considerando o sinal de entrada autoregressivo (AR) e um passo de adaptação genérico. O desenvolvimento do novo modelo incluiu uma modelagem aproximada do comportamento do vetor de erro *a priori* e a utilização de uma forma fechada para o estimador de mínimos quadrados dos coeficientes do processo AR. Resultados de simulação Monte Carlo ilustraram o melhor desempenho do novo modelo em relação a modelos existentes em situações nas quais os efeitos de inicialização se tornam importantes e nos casos de implementação com ordem deficiente.

REFERÊNCIAS

- [1] K. Ozeki and T. Umeda, "An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties," *Electron. Commun. Jpn.*, vol. 67-A, no. 5, pp. 19–27, 1984.
- [2] M. Rupp, "A family of adaptive filter algorithms with decorrelating properties," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 3, pp. 771–775, 1998.
- [3] F. Bouteille, P. Scarlat, and M. Corazza, "Pseudo affine projection algorithm: new solution for adaptive identification," in *Eurospeech*, Budapest, 1999, pp. 427–430.
- [4] S.J.M. de Almeida, J.C.M. Bermudez, and N.J. Bershad, "A stochastic model for a pseudo affine projection algorithm," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 1, pp. 107–118, Jan 2009.
- [5] S.J.M. de Almeida, M.H. Costa, and J.C.M. Bermudez, "A theoretical model for the deficient order pseudo-affine projection algorithm," in *Signal Processing Conference, EUSIPCO*, Aug 2010, pp. 1718–1722.
- [6] M.H. Costa, S.J.M. de Almeida, J.C.M. Bermudez, and R.B. Barcelos, "New insights into the weight behaviour of the affine projection algorithm," in *EUSIPCO*, Aug 2012, pp. 2610–2614.
- [7] M.H. Costa, S.J.M. de Almeida, J.C.M. Bermudez, "A new theoretical model for the pseudo affine projections algorithm for unity step size and autoregressive inputs," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 64, no. 14, pp. 3591–3604, July 2016.
- [8] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Englewoods Cliffs: Prentice-Hall, 4 edition, 2002.
- [9] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, Prentice Hall, 1993.