

Análise de Desempenho do Sistema OFDM-PSK sob Desvanecimento Nakagami- m Complexo

Wander Henrique Machado Freitas e Rausley A. A. de Souza

Resumo— Este artigo apresenta uma análise matemática para o desempenho em termos de taxa de erro de símbolo de sistemas OFDM-PSK em canais com desvanecimento Nakagami- m complexo. O ganho complexo do canal é parametrizado de forma a se considerar o desbalanceamento de potência entre as partes real e imaginária. Adicionalmente é considerado um sistema com diversidade utilizando um combinador de máxima razão. Toda a análise matemática é comprovada via simulação de Monte-Carlo. Os resultados demonstram que a não consideração do parâmetro de fase no modelo pode resultar em uma subestimação da taxa de erro de símbolo do sistema.

Palavras-Chave— Análise de erro, canal com desvanecimento, OFDM, modelo Nakagami- m complexo, parâmetro de fase, PSK.

Abstract— This paper presents a mathematical analysis for the performance in terms of symbol error rate of OFDM-PSK of systems under complex Nakagami- m fading channel model. The complex gain of the channel is parameterized in order to consider the imbalance of power between the real and imaginary parts. Additionally it is considered a system with diversity using a maximum ratio combiner. All mathematical analysis is proven via Monte-Carlo simulation. The results show that no consideration of the phase parameter in the model may result in an underestimation of the error symbol rate system.

Keywords— Error analysis, fading channel, OFDM, complex Nakagami- m model, phase parameter, PSK modulation.

I. INTRODUÇÃO

A distribuição Nakagami- m tem sido largamente aceita na literatura pelo fato dela se ajustar melhor aos dados empíricos obtidos em diversos ambientes de propagação. Em parte, isto é devido ao parâmetro m , que define o grau de desvanecimento sofrido pelo sinal ao se propagar pelo canal rádio móvel. Quanto maior o valor de m , menos severo é o efeito do canal. Um caso em especial é quando $m \rightarrow \infty$, em que o canal pode ser considerado sem desvanecimento, ou seja, AWGN (*additive white Gaussian noise*). No trabalho seminal desenvolvido por Nakagami [1], a preocupação inicial estava exclusivamente na modelagem da envoltória do sinal, sem se preocupar com o correto modelo da fase.

Modelos estatísticos precisos para o ganho do canal no domínio da frequência desempenham um papel importante na análise de desempenho dos sistemas OFDM (*orthogonal*

frequency-division multiplexing) em canais com desvanecimento seletivo em frequência. Quando os ângulos de fase de uma variável aleatória complexa tornam-se uniformemente distribuídas, então suas partes real e imaginária possuem uma simetria circular, no qual facilita derivar expressões simples para as funções densidade de probabilidade das envoltórias complexas e suas funções geradora de momentos (FGM) (e.g., [1], [2]). Ou seja, para a correta caracterização da probabilidade de erro em sistemas OFDM é necessário um modelo preciso para as estatísticas relacionadas à fase do sinal complexo que caracteriza o desvanecimento de curto prazo.

Recentemente foi reconhecido que a fase da variável aleatória Nakagami- m complexa pode não ser uniformemente distribuída para todos os valores de m [3], [4], e que modelos precisos para a distribuição de fase devem depender do parâmetro de desvanecimento m . Um modelo de fase preciso foi proposto para o desvanecimento Nakagami- m em [3], [4]. Neste modelo, a envoltória do canal permanece a envoltória Nakagami- m originalmente proposta em [1], mas a fase do canal não é, de forma geral, uniformemente distribuída, como tradicionalmente aceito, exceto para o caso especial do desvanecimento Rayleigh quando $m = 1$. Em vez disso, a distribuição de fase coincide com os modelos de desvanecimento Rice e Hoyt para os casos limites, ou seja, quando $m > 1$ o desvanecimento Nakagami- m aproxima-se da distribuição Rice e quando $m < 1$ o desvanecimento Nakagami- m aproxima-se da distribuição Hoyt, no qual é conhecido que ambas tem uma distribuição de fase não uniforme.

Várias pesquisas recentes utilizam a densidade Nakagami- m complexa para modelar canais com desvanecimento, devido ao fato desta ser um distribuição flexível por se ajustar em diversos ambientes de propagação. Alguns trabalhos que utilizam esse modelo são citados neste parágrafo para mostrar ao leitor aplicações tanto teóricas como práticas. Em [5] são realizadas medidas em um cenário de rede de área corporal WBAN (*wireless body area network*), em que são obtidas estatísticas de primeira e de segunda ordem que comprovam a validade do modelo de fase Nakagami- m . O trabalho em [6] propõe um método eficiente para geração de amostras Nakagami- m complexa usando um algoritmo baseado na técnica de aceitação e rejeição. Em [7] são deduzidas expressões exatas de forma fechada para a taxa de cruzamento de fase para canais com desvanecimento Nakagami- m . O autor em [8] investiga a capacidade de canais MIMO (*multiple input-multiple output*) com desvanecimento Nakagami- m com distribuições de fase uniforme e não uniforme.

O objetivo deste trabalho é analisar o desempenho de um sistema OFDM-PSK em canais com desvanecimento

Wander Henrique Machado Freitas e Rausley A. A. de Souza, Instituto Nacional de Telecomunicações, INATEL, Santa Rita do Sapucaí-MG, Brasil, E-mails: wanderfreitas@get.inatel.br, rausleyaas@gmail.com. Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fapemig, CNPq contrato No. 305467/2014-0 e pela Finep, com recursos do Funttel, contrato No 01.14.0231.00, sob o projeto Centro de Referência em Radiocomunicações (CRR) do Instituto Nacional de Telecomunicações – Inatel, Brasil.

Nakagami- m com distribuição de fase não uniforme. A análise de desempenho em termos de probabilidade de erro de bit é realizada também com um sistema de diversidade com a utilização de um combinador MRC (do inglês *maximum ratio combining*). Em contraste às pesquisas anteriores, focamos no efeito do parâmetro de fase p no desempenho deste sistema. Portanto, as contribuições deste trabalho são as análises da influência do parâmetro de fase do canal Nakagami- m no desempenho do sistema, e a influência da ordem de modulação, M -PSK, na taxa de erro de bit. Toda a análise matemática presente neste artigo é comprovada por meio de simulações.

Este artigo é organizado como segue. Na Seção II é descrito de forma sucinta o modelo de desvanecimento Nakagami- m complexo. Na Seção III apresentamos as equações para o cálculo da probabilidade de erro de bit para um sistema OFDM-BPSK. Resultados numéricos são dados na Seção IV para modulação BPSK. Na Seção V é feita uma generalização para a modulação M -PSK. A Seção VI conclui o artigo.

II. MODELO NAKAGAMI- m COMPLEXO

Seja a variável aleatória Nakagami- m complexa definida por $R = X + jY$, sendo X e Y as partes real e imaginária de R , respectivamente. Yacoub em [4] desenvolve expressões para função densidade de probabilidade (FDP) do módulo e fase da variável aleatória Nakagami- m complexa. As expressões para as FDPs do módulo e fase são, respectivamente

$$f_{|R_\ell|}(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega_\ell} \right)^m r^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega_\ell} r^2\right) \quad (1)$$

$$f_{\arg R_\ell}(\varphi) = \frac{\Gamma(m)}{2^m \Gamma\left(\frac{1+p}{2}m\right) \Gamma\left(\frac{1-p}{2}m\right)} \frac{|\sin(2\varphi)|^{m-1}}{|\tan(\varphi)|^{pm}}, \quad (2)$$

em que R_ℓ , $\ell = 0, 1, \dots, L-1$, são variáveis aleatórias Nakagami- m complexa no ℓ -ésimo percurso, m é o parâmetro de desvanecimento, p é o parâmetro de fase, Ω_ℓ é a potência do ℓ -ésimo percurso e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma [9, eq. (6.1.1)] definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (3)$$

O parâmetro de fase p quantifica o desbalanceamento de potência existente entre as componentes em fase e quadratura, e é definido por

$$p = \frac{m_X - m_Y}{m_X + m_Y} = \frac{\Omega_X - \Omega_Y}{\Omega_X + \Omega_Y}, \quad (4)$$

no qual as condições $m_X + m_Y = 2m$ e $\Omega_X + \Omega_Y = 2\Omega$ tem que ser respeitadas. Os parâmetros m_X e Ω_X parametrizam a parte real do ganho do canal e m_Y e Ω_Y a parte imaginária. A condição de balanceamento de potência ocorre para $p = 0$, ou seja, $m_X = m_Y$, caso contrário teremos desbalanceamento de potência das componentes em fase e quadratura. Em particular, para $p = 1$, todas as Gaussianas que formam o processo Nakagami- m provém do sinal em fase, enquanto que para $p = -1$, todas as Gaussianas que formam o processo Nakagami- m são do sinal em quadratura. Da definição em (4), $-1 \leq p \leq 1$. Pelas expressões (1) e (2) conclui-se que mesmo admitindo que a envoltória seja Rayleigh ($m = 1$), a fase pode ser uniforme ($p = 0$) ou não-uniforme ($p \neq 0$).

III. DEDUÇÃO DA PROBABILIDADE DE ERRO

O desempenho do receptor OFDM depende da relação sinal-ruído instantânea definida como

$$\gamma_n = \text{SNR} |H_n|^2, \quad (5)$$

em que SNR (do inglês *signal-to-noise ratio*) é a relação sinal ruído média e H_n é a resposta ao impulso do canal no domínio da frequência do n -ésimo canal dada por

$$H_n = \sum_{\ell=0}^{L-1} R_\ell e^{-j2\pi n \ell / N}, \quad (6)$$

em que $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, N denotando o número total de subportadoras (canais) no domínio da frequência e L é o número de multipercursos. Aqui, R_ℓ , $\ell = 0, 1, \dots, L-1$ são variáveis aleatórias Nakagami- m complexas independentes.

O trabalho publicado em [10] apresenta a dedução da função geradora de momentos (FGM) do ganho do canal no domínio da frequência para um sistema OFDM, e é dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{-z|H_n|^2} \right] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} \\ &\times \prod_{\ell=0}^{L-1} \Phi_\ell(2\sqrt{z}u, 2\sqrt{z}v) dudv, \end{aligned} \quad (7)$$

em que $\Phi_\ell(\cdot, \cdot)$ é definida em [10, eq. (15)]. A equação (7) é válida para canais com desvanecimento multipercursos com modelos de amplitude e fase arbitrários. Hamdi [10] desenvolve a equação (7) para o modelo Nakagami- m complexo, e também, faz a simplificação para os canais indexados por $n = 0, N/4, N/2, 3N/4$. Porém, em [10] considerou-se o parâmetro de fase $p = 0$, ou seja, admitiu-se o balanceamento de potência entre as partes real e imaginária do ganho do canal. Como o objetivo deste trabalho é verificar a influência do parâmetro de fase p no desempenho do sistema, a FGM será dada por

$$\mathbb{E} \left[e^{-z|H_n|^2} \right] = \mathcal{M}(z, m_x) \mathcal{M}(z, m_y), \quad (8)$$

em que

$$\mathcal{M}(z, m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\omega^2} \prod_{\ell=0}^{L-1} {}_1F_1\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{\Omega_\ell}{m} z \omega^2\right) d\omega, \quad (9)$$

sendo ${}_1F_1(\cdot, \cdot; \cdot)$ a função hipergeométrica confluyente [9, (13.1.2)] definida por

$${}_1F_1(a, b; z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{(a)_2 z^2}{(b)_2 2!} + \dots + \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}, \quad (10)$$

no qual

$$(a)_n \equiv \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) \quad (11)$$

denota o símbolo de Pochhammer [9, eq. (6.1.22)] com $(a)_0 = 1$, e Ω_ℓ é a potência de cada ramo multipercurso, em que

$$\sum_{\ell=0}^{L-1} \Omega_\ell = 1. \quad (12)$$

Para a resolução das equações (8) e (9), precisamos definir que

$$m_x = (1 + p)m \quad (13a)$$

$$m_y = (1 - p)m \quad (13b)$$

$$\Omega_x = (1 + p)\Omega \quad (13c)$$

$$\Omega_y = (1 - p)\Omega. \quad (13d)$$

A taxa de erro de bit média (BER, do inglês *bit error rate*) de um sistema com modulação BPSK tendo uma diversidade de ordem D (por exemplo, diversidade de antenas) e utilizando um combinador MRC é calculada por [11, eq. (5.3)]

$$\text{BER} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathcal{M}^D \left(\frac{\text{SNR}}{2 \sin^2 \theta}, m_x \right) \mathcal{M}^D \left(\frac{\text{SNR}}{2 \sin^2 \theta}, m_y \right) d\theta. \quad (14)$$

IV. EXEMPLOS NUMÉRICOS E ANÁLISES

As Figuras 1 a 3 mostram os resultados de BER teóricos (linhas), a partir de (14), de um sistema OFDM-BPSK sob desvanecimento Nakagami- m . Resultados da simulação de Monte Carlo são também mostrados (símbolos) para validar os resultados teóricos. O número mínimo de eventos de Monte Carlo utilizado para determinar cada ponto da simulação foi 10^6 . As simulações foram feitas utilizando-se o software MATLAB. As amostras complexas Nakagami- m foram geradas a partir do algoritmo proposto em [6]. Em todos os resultados apresentados neste artigo foram considerados apenas valores positivos para o parâmetro de fase p , já que o valor negativo de p produz o mesmo resultado que o respectivo valor positivo.

Na Figura 1, a BER é plotada em função do parâmetro de desvanecimento m . É observado que para $L = 2$ percursos a BER cresce com o aumento de m , enquanto que para $L = 3$ percursos a BER diminui com o aumento de m . A Figura 2 traça a BER agora em função do número de multipercursos L para diferentes valores do parâmetro de fase p . Notadamente, os ganhos obtidos com o aumento de L são maiores para valores menores de L . Para altos valores de L , os ganhos obtidos em termos na diminuição da BER tornam-se cada vez menores. É importante ressaltar que, a partir da Figura 2, os resultados comprovam as conclusões encontradas por Hamdi em [10], em que para L ímpar a BER diminui e para L par a BER aumenta, com o aumento de m . Devido a não linearidade do problema, é difícil ter uma explicação clara para este comportamento. Fenômeno semelhante já foi observado em outros trabalhos (p.ex. [12]).

Na Figura 3, a BER é plotada em função da relação sinal-ruído (SNR) com $m = 3$, sem diversidade, i.e. $D = 1$ e diversidade de ordem $D = 2$. Como esperado, o aumento da ordem de diversidade D provoca uma melhora significativa no desempenho do sistema.

De forma geral, nota-se a excelente aderência entre a simulação realizada e as curvas teóricas demonstrando assim a correta análise matemática. Ainda, pode-se observar que com o aumento de p , ou seja, um maior desbalanceamento de potência entre as partes real e imaginária do ganho complexo

do canal, a BER aumenta. A variação no desempenho é mais significativa para $p > 0.5$. Observa-se também que na condição extrema, em que todas as Gaussianas que formam o processo Nakagami- m pertencem à parte real ($p = 1$), pior é o desempenho do sistema.

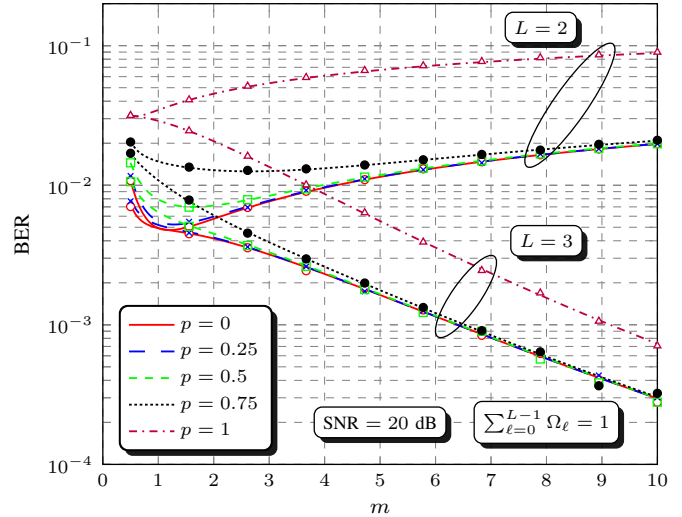


Fig. 1. Taxa de erro de bit, BER, em função do parâmetro de desvanecimento, m , para vários valores do parâmetro de fase, p , sem diversidade.

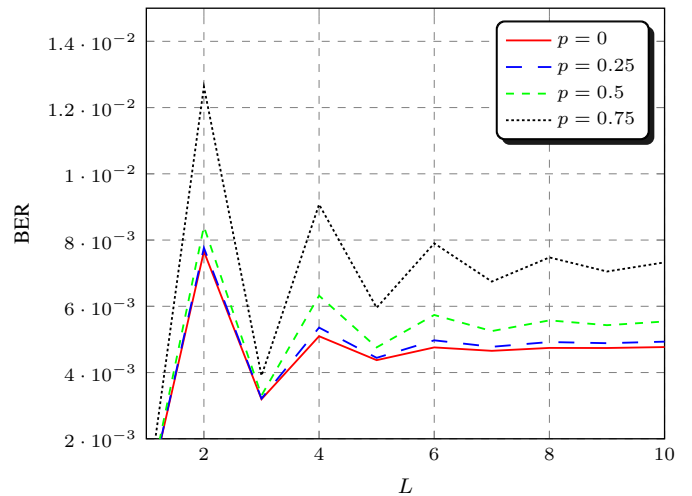


Fig. 2. Taxa de erro de bit, BER, em função do número de percursos L , para vários valores do parâmetro de fase, p , sem diversidade e $m = 3$.

V. GENERALIZAÇÃO PARA M -PSK

Na Seção IV analisamos resultados de BER apenas para a modulação BPSK em sinais OFDM com desvanecimento Nakagami- m . Agora vamos generalizar para a modulação M -PSK, em que a probabilidade de erro de símbolo média (SER, do inglês, *symbol error rate*) é dada por [11, eq. (5.67)]

$$\text{SER} = \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-1)\pi/M} \mathcal{M}^D \left(\frac{\sin^2(\pi/M)\text{SNR}}{2 \sin^2 \theta}, m_x \right) \times \mathcal{M}^D \left(\frac{\sin^2(\pi/M)\text{SNR}}{2 \sin^2 \theta}, m_y \right) d\theta. \quad (15)$$

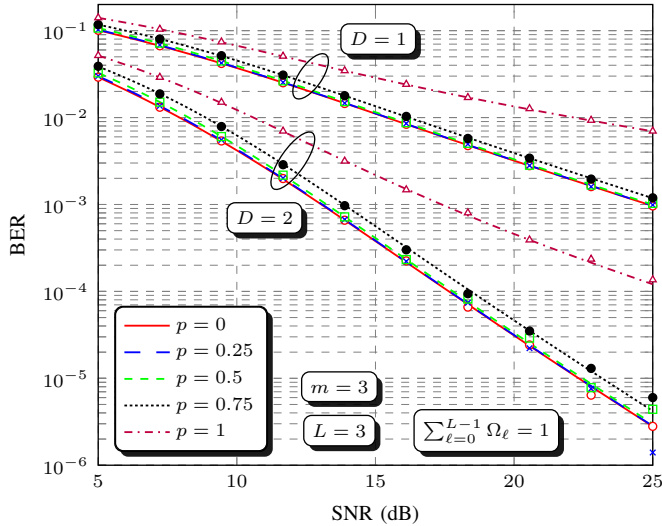


Fig. 3. Taxa de erro de bit, BER, em função da relação sinal-ruído, SNR, para vários valores do parâmetro de fase, p , com e sem diversidade.

As Figuras 4 a 7 mostram os resultados de taxa de erro de símbolo de um sistema OFDM sob desvanecimento Nakagami- m , mas agora comparando o desempenho das modulações BPSK, QPSK e 8-PSK. Os resultados teóricos foram calculados a partir de (15) e a simulação foi implementada no software Matlab.

Nas Figuras 4 e 5, a SER é traçada contra o parâmetro de desvanecimento m para 2 e 3 percursos, respectivamente. Na Figura 4 é observado que quando o parâmetro m aumenta a SER também aumenta, e na Figura 5 quando o parâmetro m aumenta a SER diminui. Analisando estes comportamentos podemos concluir que, independente da ordem de modulação, a SER torna-se maior no caso de números pares de percursos, enquanto que para números ímpares de percursos a SER diminui. Pelas figuras, conclui-se que ao se admitir balanceamento de potência entre as componentes em fase e em quadratura ($p = 0$), a estimação da probabilidade de erro de símbolo, e consequentemente a estimação da probabilidade de erro de bit, torna-se subestimada frente ao desbalanceamento ($p \neq 0$), principalmente para valores de m próximos de 1. Desta maneira, ressalta-se a importância da correta modelagem não apenas da envoltória, mas também da fase do sinal sob desvanecimento. Como esperado, as Figuras 4 e 5 mostram que o aumento da ordem de modulação provoca um aumento da taxa de erro de símbolo para uma SNR fixa. Para um dado valor fixo do parâmetro de desvanecimento m , o impacto da variação do parâmetro de fase p na probabilidade de erro de símbolo média, SER, é sempre maior em modulações de alta ordem.

Nas Figuras 6 e 7, a taxa de erro de símbolo é traçada contra a SNR quando $m = 3$ para diversidades de ordem $D = 1$ e $D = 2$, respectivamente. É observado que com o aumento da diversidade há uma melhora significativa no desempenho do sistema. Por exemplo, para a SNR = 25 dB todas as curvas do gráfico sem diversidade está com uma SER acima de 10^{-3} , enquanto que todas as curvas do gráfico com diversidade de ordem 2, para a mesma SNR, está com uma SER abaixo de

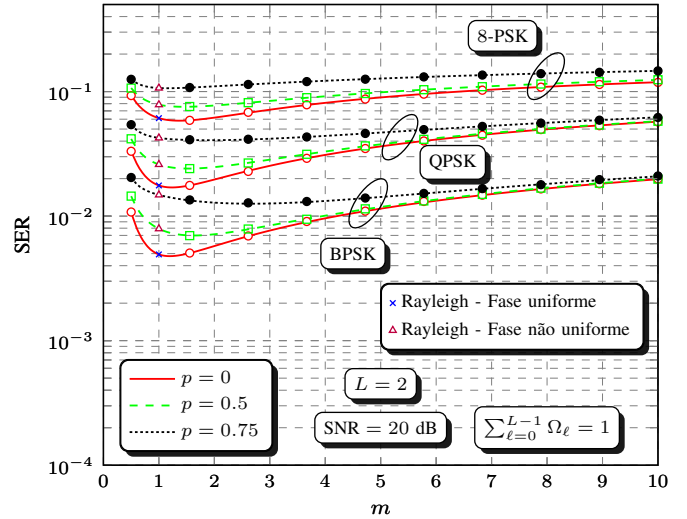


Fig. 4. Taxa de erro de símbolo, SER, em função do parâmetro de desvanecimento, m , para vários valores do parâmetro de fase, p , sem diversidade e para modulações BPSK, QPSK e 8-PSK.

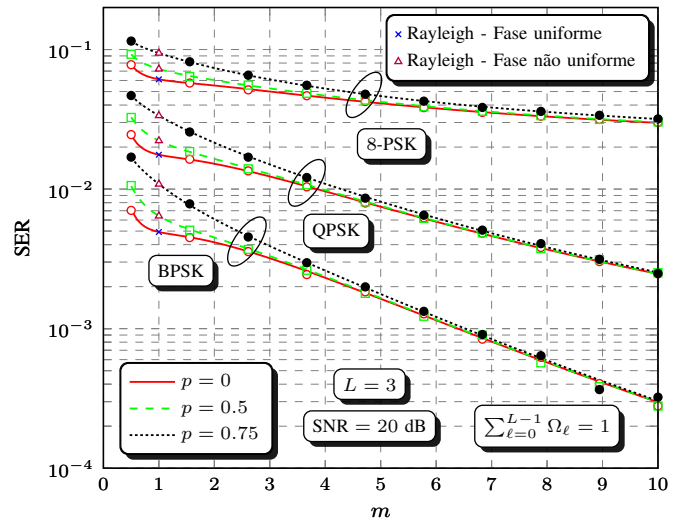


Fig. 5. Taxa de erro de símbolo, SER, em função do parâmetro de desvanecimento, m , para vários valores do parâmetro de fase, p , sem diversidade e para modulações BPSK, QPSK e 8-PSK.

10^{-3} . Uma importante observação destacada nas Figuras 4 e 5 é o fato da distribuição Rayleigh possuir além da tradicional fase uniforme na situação de $p = 0$, também possuir uma fase não uniforme na situação de $p \neq 0$.

VI. CONCLUSÕES

Neste artigo estudamos o desempenho do sistema OFDM em canais com desvanecimento Nakagami- m de frequência seletiva. Métodos clássicos, como a função geradora de momentos, podem então ser empregados para obter resultados de taxa de erro precisos para diferentes formatos de modulação e ordens de diversidade arbitrárias, sendo que esse artigo fez uma análise de desempenho da modulação PSK. Analisamos também, a influência do parâmetro de fase p no desempenho deste sistema.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Nakagami, "The m -distribution - a general formula of intensity distribution of rapid fading," *Statistical Method of Radio Propagation*, 1960.
- [2] R. D. Lord, "The use of the Hankel transform in statistics i. general theory and examples," *Biometrika*, vol. 41, no. 1-2, pp. 44–55, 1954.
- [3] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, and J. C. S. Santos Filho, "Nakagami- m phase-envelope joint distribution," *Electronics Letters*, vol. 41, no. 5, pp. 259–261, 2005.
- [4] M. D. Yacoub, "Nakagami- m phase-envelope joint distribution: A new model," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [5] I. B. G. Porto, M. D. Yacoub, J. C. S. S. Filho, S. L. Cotton, and W. G. Scanlon, "Nakagami- m phase model: Further results and validation," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 2, no. 5, pp. 523–526, Oct. 2013.
- [6] R. A. A. de Souza, R. Cogliatti, and M. D. Yacoub, "Efficient acceptance-rejection method for Nakagami- m complex samples," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 3, no. 1, pp. 94–96, Feb. 2014.
- [7] D. B. da Costa, M. D. Yacoub, J. C. S. S. Filho, G. Fraidenraich, and J. R. Mendes, "Generalized Nakagami- m phase crossing rate," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 1, pp. 13–15, Jan. 2006.
- [8] C. Zhong, S. Jin, T. Ratnarajah, and K. k. Wong, "On the capacity of non-uniform phase MIMO Nakagami- m fading channels," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 14, no. 6, pp. 536–538, June 2010.
- [9] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1972.
- [10] K. A. Hamdi, "Analysis of OFDM over Nakagami- m fading with non-uniform phase distributions," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 11, no. 2, pp. 488–492, Feb. 2012.
- [11] M. K. Simon and M.-S. Alouini, *Digital communication over fading channels*. John Wiley & Sons, 2005, vol. 95.
- [12] Z. Du, J. Cheng, and N. C. Beaulieu, "Accurate error-rate performance analysis of OFDM on frequency-selective Nakagami- m fading channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 2, pp. 319–328, Feb. 2006.

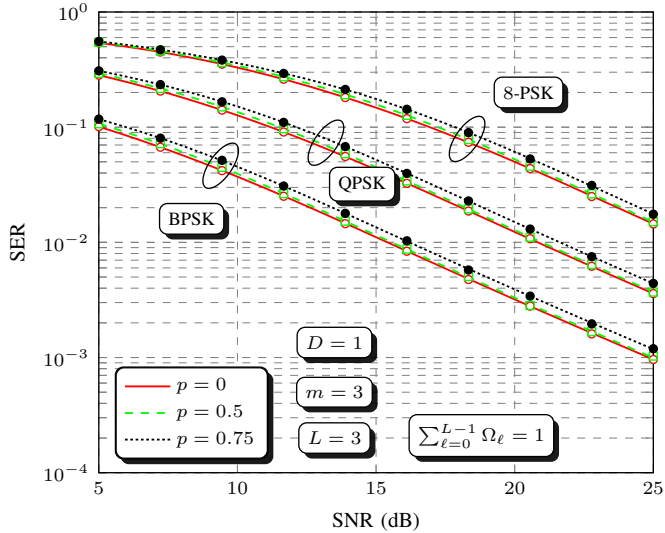


Fig. 6. Taxa de erro de símbolo, SER, em função da relação sinal-ruído, SNR, para vários valores do parâmetro de fase, p , sem diversidade e para modulações BPSK, QPSK e 8-PSK.

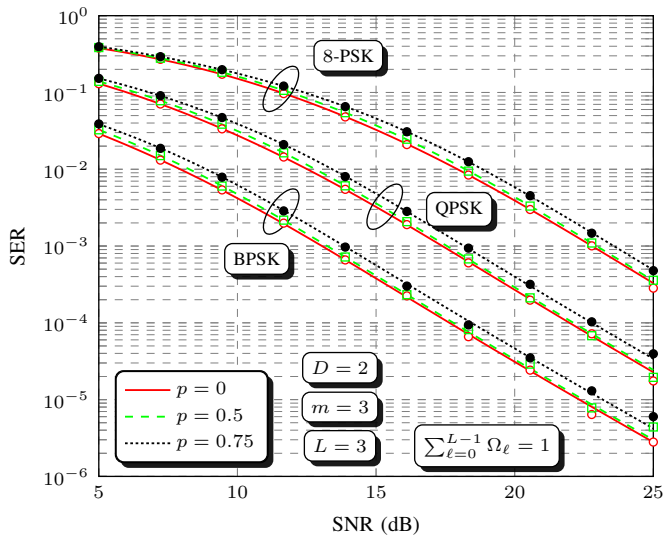


Fig. 7. Taxa de erro de símbolo, SER, em função da relação sinal-ruído, SNR, para vários valores do parâmetro de fase, p , com diversidade de ordem 2 e para modulações BPSK, QPSK e 8-PSK.