

# Detecção de Erros em Códigos Convolucionais sem a Utilização de Treliças

G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza

**Resumo**— Este artigo apresenta a teoria de bancos de filtros sobre corpos finitos para introduzir uma nova abordagem dos códigos convolucionais. Essa abordagem permite a implementação de detectores de erros e a obtenção das mensagens para qualquer código convolucional sem a necessidade de treliças.

**Palavras-Chave**— Códigos convolucionais, banco de filtros, corpos finitos, detecção de erros.

**Abstract**— This paper presents the filter banks theory over finite fields and use it to establish a new approach for convolutional codes. This approach allows the implementation of error detection and reconstruction of messages for any convolution code without need for trellis.

**Keywords**— Convolutional codes, filter banks, finite field, error detection.

## I. INTRODUÇÃO

Códigos corretores de erros encontram diversas aplicações em telecomunicações [1]. Dentre esses códigos, existe a classe dos códigos convolucionais, proposta inicialmente em 1955 [2]. Esses códigos são implementados simplesmente utilizando registradores de deslocamento (flip-flops) e portas lógicas (ou exclusivo) [3], como mostra o exemplo da Figura 1.

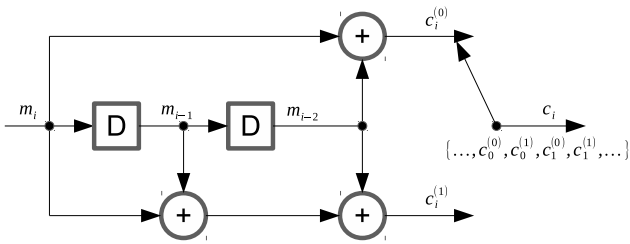


Fig. 1. Um típico código convolucional de taxa  $R = 1/2$ . Esse código é implementado com flip-flops do tipo D e portas ou-exclusivo (somadores em  $GF(2)$ ).

A decodificação de máxima verossimilhança para esse código, com correção de erros, é feita através do algoritmo de Viterbi [4], que utiliza treliças de decodificação e necessita de cerca de  $n2^\nu$  elementos de memória, em que  $\nu$  é o comprimento de restrição e  $n$  a quantidade de bits recebidos [1]. Entretanto, se o objetivo do receptor é apenas detectar se houve ou não erros na transmissão utilizando decisão abrupta (*hard decision*) e obter a mensagem enviada  $m(x)$ , a utilização do algoritmo de Viterbi não parece tão atrativa pela sua complexidade.

G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza, Grupo de Processamento de Sinais, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, E-mails: gilsonjr@gmail.com, ricardo@ufpe.br

Nesse artigo é mostrado como os códigos convolucionais podem ser abordados com a teoria de banco de filtros sobre corpos finitos. A próxima seção apresenta os principais resultados dessa teoria. A Seção III mostra como um código convolucional pode ser representado por um banco de filtros sobre corpos finitos e vice versa. A Seção IV mostra como a detecção de erros e a recuperação da mensagem podem ser implementadas utilizando a abordagem em banco de filtros sobre corpos finitos. A conclusão do artigo está na Seção V.

## II. PRELIMINARES

Seja  $GF(q)$  um corpo finito de ordem  $q$  [5] e seja  $a_i$  uma sequência sobre o corpo  $GF(q)$ , em que, para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , existe  $a_i \in GF(q)$ . Define-se a função

$$a(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \quad (1)$$

como a série formal de Laurent, centrada em zero, de  $a_i$  [6], que nesse contexto é chamada simplesmente de função de  $a_i$ , em que  $x \in GF(q^E)$  para qualquer inteiro  $E > 0$ . Denota-se

$$a_i \longleftrightarrow a(x)$$

como um par sequência-função.

### A. Sinais e Sistemas sobre Corpos Finitos

Códigos e mensagens podem ser abordados como sinais e sistemas definidos sobre corpos finitos. Nesse contexto, algumas propriedades importantes são apresentadas na Tabela I. A demonstração dessas propriedades pode ser encontrada em [7].

TABELA I

PROPRIEDADES DOS PARES SEQUÊNCIA-FUNÇÃO, CONSIDERANDO  $\alpha, \beta \in GF(q)$ .

Sequência	Função	Propriedade
$a_i$	$a(x)$	–
$b_i$	$b(x)$	–
$\alpha a_i + \beta b_i$	$\alpha a(x) + \beta b(x)$	Linearidade
$a_{i-j}$	$x^j a(x)$	Deslocamento
$a_i * b_i$	$a(x)b(x)$	Convolução

Um sinal importante no estudo de sinais e sistemas é o impulso unitário [7]. Define-se como impulso discreto a sequência

$$\delta_i \triangleq \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0. \end{cases}$$

Obviamente

$$\delta_i \longleftrightarrow 1$$

e, pelo Deslocamento,

$$\delta_{i-j} \longleftrightarrow x^j. \quad (2)$$

Um sistema é definido como uma transformação que apresenta uma sequência de saída (ou resposta)  $y_i$  a uma determinada sequência de entrada  $a_i$ , conforme ilustrado na Figura 2.

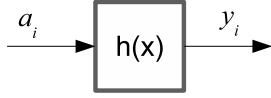


Fig. 2. Representação de um sistema sobre corpos finitos em diagrama de blocos.

Um sistema linear e invariante no tempo (LIT) é caracterizados por sua resposta ao impulso unitário  $\delta_i$ , dada por  $h_i$  [7]. A saída  $y_i$  para uma entrada qualquer  $a_i$ , em um sistema LIT, é dada por [7]

$$y_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j h_{i-j} = a_i * h_i,$$

e, pela propriedade da Convolução,

$$y(x) = a(x)h(x).$$

A função  $h(x)$  é a função transferência do sistema LIT (ou filtro). Essa função se relaciona com a resposta ao impulso  $h_i$  através de

$$h(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i x^i,$$

ou

$$h_i \longleftrightarrow h(x).$$

### B. Bancos de Filtros sobre Corpos Finitos

Banco de filtros são implementados através de filtros, compressores e expansores. Um compressor por  $M$ , denotado por  $\{\downarrow_M\}$ , é o sistema linear representado na Figura 3 e sua saída é dada por

$$y_i = \{a_i \downarrow_M\} = a_{iM},$$

em que  $M > 1$  é um número natural. O expansor de  $L$ , denotado por  $\{\uparrow_L\}$ , é o sistema linear representado na Figura 4 e sua saída é dada por

$$y_i = \{a_i \uparrow_L\} = \begin{cases} a_{i/L}, & \text{se } L \text{ divide } i, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3)$$

em que  $L > 1$  é um número natural. A Equação (3) também pode ser escrita por

$$\{a_i \uparrow_L\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \delta_{i-Lj}. \quad (4)$$

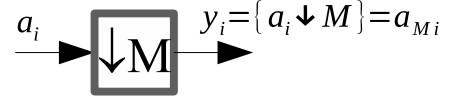


Fig. 3. Sistema compressor por  $M$ .

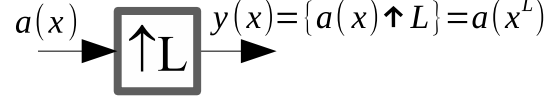


Fig. 4. Sistema expansor por  $L$ .

Calculando a função de  $\{a_i \uparrow_L\}$  pela Equação (4), utilizando (2), tem-se

$$\{a(x) \uparrow_L\} = a(x^L). \quad (5)$$

Uma compressão por  $M$  é a operação inversa da expansão de  $M$ , o que é representado por

$$\{\{a(x) \uparrow_M\} \downarrow_M\} = a(x).$$

Entretanto, o sistema de compressão não possui inverso. É fácil observar que

$$\{\{a_i \downarrow_M\} \uparrow_M\} = \begin{cases} a_i, & \text{se } M \text{ divide } i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6)$$

A seguir, são apresentadas propriedades conhecidas como identidades nobres.

*Propriedade 1 (Identidade Nobre 1):*

$$\{a(x) \downarrow_M\} h(x) = \{a(x) h(x^M) \downarrow_M\}. \quad (7)$$

*Demonstração:* Basta observar o segundo membro de (7) na forma de sequência. Usando (4), tem-se

$$\begin{aligned} \{a_i * \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \delta_{i-Mj} \downarrow_M\} &= \{\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j a_{i-Mj} \downarrow_M\} = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j a_{M(i-j)} = a_{Mi} * h_i, \end{aligned}$$

mas  $\{a_i \downarrow_M\} = a_{iM}$  e a prova segue. ■

*Propriedade 2 (Identidade Nobre 2):*

$$\{a(x) h(x) \uparrow_L\} = \{a(x) \uparrow_L\} h(x^L). \quad (8)$$

*Demonstração:* Basta aplicar (5) no primeiro membro para obter

$$\{a(x) h(x) \uparrow_L\} = a(x^L) h(x^L),$$

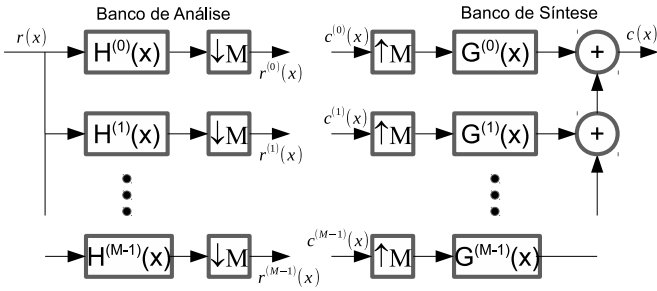
mas  $a(x^L) = \{a(x) \uparrow_L\}$  e a prova segue. ■

Um banco de filtros de  $M$  canais é a estrutura formado por um banco de análise e um banco de síntese, como mostra a Figura 5. Para essa estrutura, vale

$$r^{(j)}(x) = \{r(x) H^{(j)}(x) \downarrow_M\}, \quad (9)$$

para  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , e

$$c(x) = \sum_{j=0}^{M-1} \{c^{(j)}(x) \uparrow_M\} G^{(j)}(x). \quad (10)$$


 Fig. 5. Banco de filtros de análise e síntese com  $M$  canais.

### C. Decomposição Polifásica

A decomposição polifásica é útil em análises de sinais reais multitaxa e banco de filtros [8]. Considere a decomposição polifásica do tipo 1 da função  $c(x)$  [9],

$$c(x) = \sum_{j=0}^{M-1} x^j c_j(x^M), \quad (11)$$

em que

$$c_j(x) = \{x^{-j}c(x) \downarrow M\} \longleftrightarrow c_{ji} = c_{Mi+j}. \quad (12)$$

Agora considere a decomposição polifásica tipo 1 dos filtros de síntese da estrutura de banco de filtros da Figura 5, em que o  $l$ -ésimo filtro de síntese é dado por

$$G^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{M-1} x^j G_j^{(l)}(x^M), \quad (13)$$

e então, por (10),

$$\begin{aligned} c(x) &= \sum_{l=0}^{M-1} \{c^{(l)}(x) \uparrow M\} \sum_{j=0}^{M-1} x^j G_j^{(l)}(x^M) \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} \{c^{(l)}(x) \uparrow M\} G_j^{(l)}(x^M) x^j. \end{aligned}$$

Usando a Identidade Nobre 2,

$$c(x) = \sum_{j=0}^{M-1} x^j \sum_{l=0}^{M-1} \{c^{(l)}(x) G_j^{(l)}(x) \uparrow M\}$$

e, definindo

$$c_j(x) \triangleq \sum_{l=0}^{M-1} c^{(l)}(x) G_j^{(l)}(x), \quad (14)$$

a função  $c(x)$  é dada por (11), havendo portanto, uma relação de decomposição polifásica tipo 1 de taxa  $M$  entre  $c(x)$  e as funções  $c_j(x)$ . A Equação (14) é válida para  $j = 0, 1, \dots, M-1$ ; escrevendo essas equações em ordem, é possível construir uma equação matricial definindo a Matriz Polifásica de Síntese

$$G_p(x) \triangleq \begin{bmatrix} G_0^{(0)}(x) & G_0^{(1)}(x) & \cdots & G_0^{(M-1)}(x) \\ G_1^{(0)}(x) & G_1^{(1)}(x) & \cdots & G_1^{(M-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M-1}^{(0)}(x) & G_{M-1}^{(1)}(x) & \cdots & G_{M-1}^{(M-1)}(x) \end{bmatrix},$$

e então

$$\begin{bmatrix} c_0(x) \\ c_1(x) \\ \vdots \\ c_{M-1}(x) \end{bmatrix} = G_p(x) \begin{bmatrix} c^{(0)}(x) \\ c^{(1)}(x) \\ \vdots \\ c^{(M-1)}(x) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

A Equação (15) é conhecida como Equação Polifásica de Síntese. Pode-se aplicar um princípio análogo escrevendo o  $l$ -ésimo filtro de análise como

$$H^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{M-1} x^{-j} H_j^{(l)}(x^M),$$

em que

$$H_j^{(l)}(x) = \{x^j H^{(l)}(x) \downarrow M\} \longleftrightarrow H_{ji}^{(l)} = H_{Mi-j}^{(l)} \quad (16)$$

é uma decomposição polifásica do tipo 2 [9]. Nesse caso, denotando as saídas da estrutura de análise por  $r^{(l)}(x)$ , e usando (9), tem-se, para cada  $l$ ,

$$\begin{aligned} r^{(l)}(x) &= \{r(x) \sum_{j=0}^{M-1} x^{-j} H_j^{(l)}(x^M) \downarrow M\} \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \{x^{-j} r(x) H_j^{(l)}(x^M) \downarrow M\}, \end{aligned}$$

e, usando a Identidade Nobre 1, tem-se

$$r^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{M-1} \{x^{-j} r(x) \downarrow M\} H_j^{(l)}(x),$$

e, por (12),

$$r^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{M-1} r_j(x) H_j^{(l)}(x), \quad (17)$$

em que  $r_j(x)$  são componentes polifásicas do tipo 1 de  $r(x)$ . Escrevendo (17) para  $l = 0, 1, \dots, M-1$ , pode-se construir uma equação matricial definindo a Matriz Polifásica de Análise por

$$H_p(x) \triangleq \begin{bmatrix} H_0^{(0)}(x) & H_1^{(0)}(x) & \cdots & H_{M-1}^{(0)}(x) \\ H_0^{(1)}(x) & H_1^{(1)}(x) & \cdots & H_{M-1}^{(1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0^{(M-1)}(x) & H_1^{(M-1)}(x) & \cdots & H_{M-1}^{(M-1)}(x) \end{bmatrix},$$

e então

$$\begin{bmatrix} r^{(0)}(x) \\ r^{(1)}(x) \\ \vdots \\ r^{(M-1)}(x) \end{bmatrix} = H_p(x) \begin{bmatrix} r_0(x) \\ r_1(x) \\ \vdots \\ r_{M-1}(x) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A Equação (18) é conhecida como Equação Polifásica de Análise.

*Definição 1:* O conjunto dos filtros de análise  $H^{(j)}(x)$  e o conjunto dos filtros de síntese  $G^{(j)}(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , formam uma estrutura de bancos de filtros de  $M$  canais com análise perfeita (AP) se, para todo  $c(x)$  gerado por um conjunto de  $c^{(j)}(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ , a estrutura de síntese

em cascata com a estrutura de análise produz componentes dadas por  $\hat{c}^{(j)}(x) = x^d c^{(j)}(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema 1:** Seja um banco de filtros de análise com Matriz Polifásica dada por  $H_p(x)$  e um banco de filtros de síntese com Matriz Polifásica dada por  $G_p(x)$ , ambos com  $M$  canais. Se

$$H_p(x)G_p(x) = x^d I_M, \quad (19)$$

em que  $I_M$  é a matriz identidade ( $M \times M$ ) e  $d \in \mathbb{Z}$ , então esses filtros formam uma estrutura de banco de filtros com AP.

**Demonstração:** Assumindo que a estrutura de análise recebe  $c(x)$ , por (18)

$$\begin{bmatrix} \hat{c}^{(0)}(x) \\ \hat{c}^{(1)}(x) \\ \vdots \\ \hat{c}^{(M-1)}(x) \end{bmatrix} = H_p(x) \begin{bmatrix} c_0(x) \\ c_1(x) \\ \vdots \\ c_{M-1}(x) \end{bmatrix},$$

usando (15) e considerando (19), tem-se que  $\hat{c}^{(j)}(x) = x^d c^{(j)}(x)$ , para  $j = 0, 1, \dots, M-1$ . ■

### III. CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS E BANCOS DE FILTROS

Formalmente, um código convolucional de taxa  $R = k/n$  é descrito através da equação matricial

$$\begin{bmatrix} c^{(0)}(x) & c^{(1)}(x) & \dots & c^{(n-1)}(x) \\ m^{(0)}(x) & m^{(1)}(x) & \dots & m^{(k-1)}(x) \end{bmatrix} G(x), \quad (20)$$

em que a matriz  $G(x)$ , ( $k \times n$ ), é formada pelas funções  $g^{(ij)}(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k-1$  e  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . A palavra código transmitida  $c(x)$  é uma intercalação das funções  $c^{(j)}(x)$ , conforme mostrado na Figura 1. Entretanto, esse seletor pode ser modelado com expansores e retardos como em uma decomposição polifásica. Pode-se escrever

$$c(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j c^{(j)}(x^n), \quad (21)$$

em que, por (20),

$$c^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} m^{(i)}(x) g^{(ij)}(x). \quad (22)$$

Substituindo (22) em (21), tem-se

$$\begin{aligned} c(x) &= \sum_{j=1}^n x^j \sum_{i=0}^{k-1} m^{(i)}(x^n) g^{(ij)}(x^n) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} m^{(i)}(x^n) \sum_{j=1}^n x^j g^{(ij)}(x^n) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \{m^{(i)}(x) \uparrow_n\} \sum_{j=1}^n x^j g^{(ij)}(x^n), \end{aligned}$$

e, definindo

$$G^{(i)}(x) \triangleq \sum_{j=1}^n x^j g^{(ij)}(x^n), \quad (23)$$

para  $i = 0, 1, \dots, k-1$ , então

$$c(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \{m^{(i)}(x) \uparrow_n\} G^{(i)}(x),$$

é uma estrutura de banco de filtros de análise com  $n$  canais, mais sintetizada com apenas  $k$  canais. Essa estrutura é mostrada na Figura 6. Esse resultado demonstra o teorema a seguir.

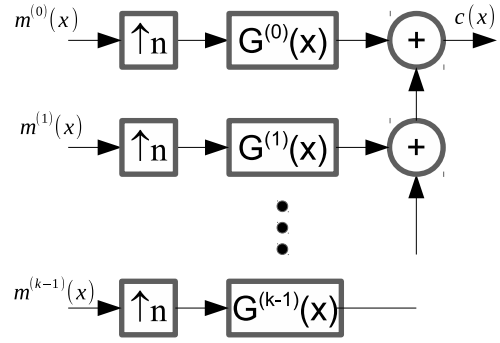


Fig. 6. Um código convolucional genérico de taxa  $R = k/n$  com matriz geradora  $G(x)$ ,  $k \times n$ , implementado utilizando  $k$  canais de um banco de filtros de síntese de  $n$  canais.

**Teorema 2:** Todo código convolucional de matriz geradora  $G(x) = [g^{(ij)}(x)]$ ,  $k \times n$ , é equivalente à estrutura de banco de filtros de análise com  $n$  canais usando apenas  $k$  canais com filtros de síntese dados na Equação (23), como mostra a Figura 6.

**Teorema 3:** Um código convolucional de matriz geradora  $G(x) = [g^{(ij)}(x)]$ ,  $k \times n$ , é equivalente à estrutura de banco de filtros de análise com  $n$  canais usando apenas os  $k$  primeiros canais com matriz Polifásica de Análise da forma

$$G_p(x) = [G(x)^T | A(x)], \quad (24)$$

em que  $A(x)$ ,  $n \times (n-k)$ , é uma matriz qualquer de funções tal que  $\det(G_p(x)) \neq 0$ .

**Demonstração:** Comparando (23) com (13) tem-se que

$$G_j^{(l)}(x) = g^{lj}(x),$$

e as primeiras  $k$  colunas de  $G_p(x)$  são formadas pela matriz  $G(x)$  transposta. ■

Para a utilização da estruturas de análise, é necessário encontrar os demais filtros  $G^{(i)}(x)$  e os filtros  $H^{(i)}(x)$ , para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Esses filtros são encontrados utilizando técnicas de projeto de banco de filtros com AP, apresentados a seguir.

**Proposição 1:** Seja um código convolucional  $C$  de taxa  $R = k/n$  com matriz geradora dada por  $G(x)$ . Escolhe-se uma matriz polifásica de síntese da forma descrita por (24), de tal modo que  $\det[G_p(x)] = x^l$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Calcula-se

$$H_p(x) = G_p(x)^{-1}.$$

Os filtros  $G^{(j)}(x)$  e  $H^{(j)}(x)$  são obtidos através das matrizes polifásicas utilizando (13) e (16) respectivamente. Os filtros de análise e síntese são FIR e a estrutura de síntese gera o código convolucional  $C$  através do seus primeiros  $k$  canais, conforme a Figura 6.

*Exemplo 1:* Considere o código convolucional da Figura 1 com  $G(x) = [1+x^2 \ 1+x+x^2]$ . Nesse caso, a matriz polifásica de síntese do código é da forma

$$G_p(x) = \begin{bmatrix} 1+x^2 & A(x) \\ 1+x+x^2 & B(x) \end{bmatrix},$$

em que  $A(x)$  e  $B(x)$  são polinômios arbitrários. Escolhendo  $A(x) = B(x) = 1$ , tem-se  $\det[G_p(x)] = x$  e portanto

$$xG_p(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+x+x^2 & 1+x^2 \end{bmatrix}.$$

Agora, escolhe-se uma Matriz Polifásica de Análise de tal forma que  $H_p(x)G_p(x) = x^d I_2$ ; a matriz  $xG_p(x)^{-1}$  é uma possível escolha, mas  $H_p(x) = x^2 G_p(x)^{-1}$ , além de satisfazer a condição AP, resulta em filtros causais, isto é, com potências não negativas de  $x$ , assim

$$H_p(x) = \begin{bmatrix} x & x \\ x+x^2+x^3 & x+x^3 \end{bmatrix}.$$

Utilizando (16), tem-se

$$H^{(0)}(x) = x^2 + x^{-1}x^2 = x + x^2 \quad (25)$$

e

$$\begin{aligned} H^{(1)}(x) &= x^2 + x^4 + x^6 + x^{-1}(x^2 + x^6) \\ &= x + x^2 + x^4 + x^5 + x^6. \end{aligned} \quad (26)$$

A obtenção da estrutura completa de análise e síntese permite o projeto de um circuito de síndrome que detecta erros e recupera as mensagens  $m^{(j)}(x)$ .

#### IV. DETECÇÃO DE ERROS E RECUPERAÇÃO DE MENSAGENS

Considere o código convolucional  $C$  com taxa  $R = k/n$  e matriz geradora  $G(x)$ , como mostra a Figura 6. Se  $c(x) \in C$ , conhecendo os filtros de análise,  $H^{(j)}(x)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , então, as  $k$  mensagens transmitidas podem ser obtidas por

$$m^{(j)}(x) = \{c(x)H^{(j)}(x) \downarrow n\}x^{-d},$$

para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ , e  $d \in \mathbb{Z}$  tal que  $H_p(x)G_p(x) = x^d I_n$ . Além disso, definem-se as funções síndrome por

$$s^{(j-k)} \triangleq \{c(x)H^{(j)}(x) \downarrow n\}x^{-d},$$

para  $j = k, k+1, \dots, n-1$ , e, se  $c(x) \in C$ , então todas as funções síndrome são nulas.

Em um caso geral, as mensagens  $m^{(j)}(x)$  geram  $c(x) \in C$ . Assumindo que  $c(x)$  atravessa um canal BSC, um receptor recebe  $r(x) = c(x) + e(x)$ . A linearidade do banco de filtros de análise permite detectar a presença do erro nas funções síndrome. Se por acaso  $e(x) = 0$  a estrutura de análise decodifica as mensagens  $m^{(j)}(x)$ .

*Exemplo 2:* Considere a estrutura da Figura 7 implementada para decodificar o código do Exemplo 1. Nesse caso, os filtros de análise são dados em (25) e (26). Considerando que  $m(x) = 1 + x$ , então  $c(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^6 + x^7$ . Aplicando  $c(x)$  na estrutura de análise da Figura 7, tem-se  $\hat{m}(x) = x^2 + x^3 = x^2(1+x)$  e  $s(x) = 0$ .

Considera-se agora que ocorreu um erro na transmissão na posição 2, isto é,  $e(x) = x^2$ . Nesse caso,  $r(x) = 1 + x +$

$x^4 + x^6 + x^7$  e então  $\hat{m}(x) = x^3$  e  $s(x) = x^2 + x^3 + x^4$ , o que indica que houve erro na transmissão. Note que a partir de  $s_2 = 1$  já ocorre a detecção de erros.

Uma forma de corrigir erros usando a estrutura de análise é analisar os erros na estrutura para identificar os padrões de erros de interesse. Por exemplo, analisando a resposta da estrutura para  $\delta_i$ , tem-se

$$\begin{aligned} \hat{m}_i &= [0 \ 1 \ 0 \ 0], \\ s_i &= [0 \ 1 \ 1 \ 1], \end{aligned}$$

o que significa que sempre que o padrão  $[1 \ 1 \ 1]$  for detectado na síndrome, ocorreu um erro na mensagem no bit atual. Esse padrão sempre corrige um erro em uma posição par, como no caso em que  $e(x) = x^2$ .

Aplicando o princípio da identificação de padrões de erros, é possível implementar decodificadores para códigos convolucionais com baixa complexidade computacional.

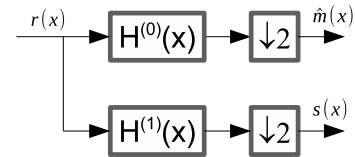


Fig. 7. Estrutura de análise do código convolucional da Figura 1.

#### V. CONCLUSÕES

Foi apresentada uma nova abordagem para tratar códigos convolucionais que estuda esses códigos através de bancos de filtros sobre corpos finitos. Foi demonstrado que todo código convolucional pode ser implementado utilizando um banco de filtros de síntese. Embora pareça lógico projetar um código convolucional a partir de um banco de filtros, um método para se obter os filtros de análise para um dado código convolucional foi proposto. Foi mostrado como é possível implementar detecção de erros e a recuperação da mensagem sem utilizar qualquer algoritmo baseado em treliças. A implementação de correção de erros usando essa teoria está sendo investigada.

#### REFERÊNCIAS

- [1] T. K. Moon, *Error Correction Coding : Mathematical Methods and Algorithms*. Wiley-Interscience, 2005.
- [2] A. Dholakia, *Introduction to Convolutional Codes with Applications*, ser. The Springer International Series in Engineering and Computer Science. Springer, 1994.
- [3] S. Lin and D. J. Costello, *Error Control Coding*, 2nd ed. Prentice Hall, 2004.
- [4] A. Viterbi, "Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 13, no. 2, pp. 260–269, April 1967.
- [5] R. J. McEliece, *Finite Fields for Computer Scientists and Engineers*. Kluwer Academic Publishers, 1987.
- [6] M. G. Soares, *Cálculo em uma Variável Complexa*, 5th ed. IMPA, 2014.
- [7] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Sinais e Sistemas*, 2nd ed. Pearson Prentice Hall, 2010.
- [8] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010.
- [9] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley - Cambridge Press, 1997.