

Duas Aproximações para a DCT Baseadas na Fatoração de Chen

C. J. Tablada, F. M. Bayer e R. J. Cintra

Resumo—Baseadas na fatoração de Chen, duas novas aproximações para a DCT são propostas. As aproximações propostas são livres de multiplicação e têm algoritmos rápidos eficientes. Tais aproximações foram avaliadas em termos de custo computacional e medidas de erro, sendo melhores aproximações para a DCT de comprimento 8 do que a *signed* DCT, a transformadas de Hadamard, a transformada de Walsh-Hadamard e a aproximação de Bouguezel-Ahmad-Swamy, em termos de erro de energia. Os métodos propostos chegam a requerer apenas 22 adições e são adequados como ferramentas de compressão de imagens.

Palavras-Chave—DCT aproximada; Compressão de imagens; Fatoração de Chen.

Abstract—Two multiplication-free DCT approximations based on Chen's factorization are proposed and their associate fast algorithms are also derived. The proposed transforms are assessed by means of computational cost and error measures; and are shown to better approximate the 8-point DCT, in terms of energy error, when compared with the signed DCT, the Hadamard transform, the Walsh-Hadamard transform, and the Bouguezel-Ahmad-Swamy approximation. The proposed methods require as few as 22 additions and are adequate as image compression tools.

Keywords—Approximate DCT; Image compression; Chen's factorization.

I. INTRODUÇÃO

Transformadas discretas tem um papel central em técnicas de processamento de sinais e técnicas de compressão [7], [15]. Neste contexto, a transformada discreta do cosseno (DCT) é uma ferramenta crucial [2] pelo fato de ser uma prática aproximação para a transformada de Karhunen-Loève (KLT) [12]. A KLT tem a distinção de ser ótima em termos de compactação de energia quando os sinais processados são bem modelados por um processo markoviano de primeiro ordem com alta correlação [7]. Esta é suposição frequentemente satisfeita em imagens naturais [13].

Em particular, a DCT tipo II (DCT-II) de comprimento 8 tem ampla utilização em compressão de imagens [7], sendo adotada em diversos padrões de compressão, tais como JPEG [13], MPEG-1, MPEG-2, H.261, H.263 [8] e H.264 [20]. Objetivando o cálculo eficiente da DCT, muitos algoritmos rápidos vem sendo desenvolvidos [9], [19], [22], [28]. Entretanto, estes métodos usualmente requerem operações de elevado custo computacional, como a multiplicação, e uma

aritmética de ponto flutuante, que demanda maiores exigências de *hardware* [18].

Uma possível alternativa ao cálculo exato da DCT é o uso de aproximações que operem em aritmética inteira e não exijam multiplicações [7], [15]. Nesse contexto, diversas aproximações para a DCT-II foram propostas em que os elementos da matriz de transformação são definidos sobre o conjunto $\mathcal{P} = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$ [3]–[6], [11], [14]. Métodos relevantes incluem a *signed* DCT (SDCT) [14] e a aproximação de Bouguezel-Ahmad-Swamy (BAS) [4]. Por construção, matrizes com elementos em \mathcal{P} resultam em transformadas com complexidade multiplicativa nula, uma vez que as operações envolvidas podem ser implementadas por meio de adições e deslocamentos de bits (*bit shifting*) [3]. Estas aproximadas não senoidais podem ser usadas para implementações hardware-software em diversos dispositivos computacionais de baixo poder de processamento [8], [20], [21].

No presente trabalho, temos as seguintes contribuições: (i) propomos duas novas aproximações para a DCT de comprimento 8, baseadas no algoritmo de Chen *et al.* [9] para a DCT exata; (ii) derivamos algoritmos rápidos para as transformadas propostas; (iii) avaliamos as aproximações propostas por meio de figuras de mérito; e (iv) comparamos as técnicas propostas com as aproximações SDCT e BAS, além das transformadas de Hadamard e Walsh-Hadamard [15], por serem livres de multiplicação.

II. FATORAÇÃO DE CHEN PARA A DCT

Em [9], Chen *et al.* propuseram uma fatoração para DCT-II baseada numa fatoração para DCT de tipo IV (DCT-IV). Estas duas versões da DCT diferem entre si nos pontos de amostragem da função cosseno utilizados na definição de suas matrizes de transformação [7], [25]. Tais matrizes de transformação, respectivamente denotadas por \mathbf{C}_N^{II} e \mathbf{C}_N^{IV} , são dadas por:

$$[\mathbf{C}_N^{\text{II}}]_{k,n} = \left[\sqrt{\frac{2}{N}} c_k \cos\left(\frac{k(2n+1)\pi}{2N}\right) \right]_{k,n},$$

$$[\mathbf{C}_N^{\text{IV}}]_{k,n} = \left[\cos\left(\frac{(2k+1)(2n+1)\pi}{4N}\right) \right]_{k,n},$$

em que $k, n = 0, 1, \dots, N-1$, $c_0 = 1/\sqrt{2}$, $c_k = 1$, se $k \neq 0$.

Sejam \mathbf{I}_N a matriz identidade de ordem N e $\bar{\mathbf{I}}_N$ a seguinte matriz de ordem N :

$$\bar{\mathbf{I}}_N = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Em [24], Wang demonstrou que a DCT-II de comprimento 8 admite a seguinte fatoração:

$$\mathbf{C}_8^{\text{II}} = \frac{1}{2} \mathbf{P}_8 \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_4^{\text{II}} & \\ \hline \bar{\mathbf{I}}_4 \cdot \mathbf{C}_4^{\text{IV}} \cdot \bar{\mathbf{I}}_4 & \end{array} \right] \cdot \mathbf{B}_8, \quad (1)$$

em que \mathbf{P}_8 e \mathbf{B}_8 são matrizes de permutação e pré-adição, respectivamente, dadas por:

$$\mathbf{P}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_8 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_4 & \bar{\mathbf{I}}_4 \\ \hline \bar{\mathbf{I}}_4 & -\mathbf{I}_4 \end{array} \right].$$

Em [9], Chen *et al.* sugere que a matriz \mathbf{C}_4^{IV} admite a seguinte fatoração:

$$\mathbf{C}_4^{\text{IV}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3, \quad (2)$$

em que

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 & -\beta_2 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & -\beta_0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $\beta_n = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{16}\right)$.

Substituindo (2) em (1) e expandindo a fatoração, obtemos

$$\mathbf{C}_8^{\text{II}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}_8 \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_4 \cdot \mathbf{B}_8, \quad (3)$$

em que

$$\mathbf{M}_1 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_4 & \\ \hline \bar{\mathbf{I}}_4 \cdot \mathbf{Q} & \end{array} \right], \quad \mathbf{M}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_4 & \\ \hline \mathbf{A}_1 & \end{array} \right], \quad \mathbf{M}_3 = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{C}} & \\ \hline \mathbf{A}_2 & \end{array} \right],$$

$$\mathbf{M}_4 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_4 & \\ \hline \mathbf{A}_3 & \end{array} \right], \quad \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_2 & \bar{\mathbf{I}}_2 \\ \hline \bar{\mathbf{I}}_2 & -\mathbf{I}_2 \end{array} \right],$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_2^{\text{II}} & \\ \hline \bar{\mathbf{I}}_2 \cdot \mathbf{C}_2^{\text{IV}} \cdot \bar{\mathbf{I}}_2 & \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

e $\gamma_n = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{8}\right)$. A expressão (3) é chamada de fatoração de Chen.

As quantidades α , β_n e γ_n são irracionais presentes apenas nas matrizes \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 e \mathbf{M}_4 . Tais quantidades exigem operações de multiplicação usualmente sobre aritmética de ponto flutuante.

III. APROXIMAÇÕES PROPOSTAS

Nesta seção, novas aproximações para a DCT-II são introduzidas. Para tanto, manipularemos as matrizes \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 e \mathbf{M}_4 da fatoração de Chen, visando derivar novas matrizes cujos elementos estejam definidos sobre o conjunto $\mathcal{P} = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$.

Inicialmente, consideremos as funções sinal e de arredondamento denotadas por:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{round}(\cdot),$$

em que, para $x \in \mathbb{R}$, $\text{round}(x)$ denota o inteiro mais próximo a x . Estas funções coincidem com suas definições implementadas na linguagem C e em MATLAB. As funções $\text{sign}(\cdot)$ e $\text{round}(\cdot)$, quando operadas sobre matrizes, operam elemento a elemento.

Desse modo, aplicando diretamente as funções acima, obtemos as seguintes novas matrizes:

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \text{sign}(\mathbf{M}_i) \quad \text{e} \quad \widehat{\mathbf{M}}_i = \text{round}(\mathbf{M}_i), \quad i = 2, 3, 4.$$

Considerando as definições das matrizes \mathbf{M}_i , temos que:

$$\tilde{\mathbf{M}}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_4 & \\ \hline \text{sign}(\mathbf{A}_1) & \end{array} \right], \quad \tilde{\mathbf{M}}_3 = \left[\begin{array}{c|c} \text{sign}(\tilde{\mathbf{C}}) & \\ \hline \mathbf{A}_2 & \end{array} \right],$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_4 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_4 & \\ \hline \text{sign}(\mathbf{A}_3) & \end{array} \right], \quad \widehat{\mathbf{M}}_2 = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_4 & \\ \hline \text{round}(\mathbf{A}_1) & \end{array} \right],$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_3 = \left[\begin{array}{c|c} \text{round}(\tilde{\mathbf{C}}) & \\ \hline \mathbf{A}_2 & \end{array} \right], \quad \widehat{\mathbf{M}}_4 = \widehat{\mathbf{M}}_4.$$

Consequentemente, invocando a fatoração de Chen em (3), definimos as fatorações

$$\tilde{\mathbf{C}}_8 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{T}}_8 \cdot \tilde{\mathbf{M}}_3 \cdot \tilde{\mathbf{M}}_4 \cdot \mathbf{B}_8, \quad (4)$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_8 = \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{T}}_8 \cdot \widehat{\mathbf{M}}_3 \cdot \widehat{\mathbf{M}}_4 \cdot \mathbf{B}_8, \quad (5)$$

em que $\tilde{\mathbf{T}}_8 = \mathbf{P}_8 \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \tilde{\mathbf{M}}_2$ e $\widehat{\mathbf{T}}_8 = \mathbf{P}_8 \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \widehat{\mathbf{M}}_2$. As matrizes $\tilde{\mathbf{T}}_8$ e $\widehat{\mathbf{T}}_8$ são introduzidas explicitamente por brevidade de notação. As matrizes nas fatorações (4) e (5) têm inversas simples dadas por

$$\tilde{\mathbf{T}}_8^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_4^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{T}}_8^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{M}}_4^{-1} = \widehat{\mathbf{M}}_4^{-1}.$$

Note que a matriz \mathbf{B}_8 satisfaz $\mathbf{B}_8 \cdot \mathbf{B}_8^{\text{T}} = 2\mathbf{I}_8$. Assim, as aproximações para a DCT-II dadas por (4) e (5), têm inversas

$$\tilde{\mathbf{C}}_8^{-1} = \mathbf{B}_8^{\text{T}} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_4^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_3^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_8^{-1}, \quad (6)$$

$$\widehat{\mathbf{C}}_8^{-1} = \mathbf{B}_8^{\text{T}} \cdot \widehat{\mathbf{M}}_4^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{M}}_3^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{T}}_8^{-1}. \quad (7)$$

As aproximações propostas pertencem à classe de transformadas aproximadas não-ortogonais, tais como a SDCT [14] e a BAS [4]. Temos que, por construção, os elementos das matrizes envolvidas nas fatorações (4), (5), (6) e (7) pertencem ao conjunto \mathcal{P} . Dado que as transformadas $\tilde{\mathbf{C}}_8$ e $\widehat{\mathbf{C}}_8$, bem como suas inversas, são implementadas através das respectivas fatorações, suas implementações são livres de multiplicações.

Calculando as fatorações (4) e (5), obtemos explicitamente as seguintes aproximações para a DCT-II:

$$\tilde{C}_8 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_8 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por simplicidade de notação, no restante deste documento referenciamos a DCT-II simplesmente como a DCT.

IV. MEDIDA DE PROXIMIDADE E CUSTO COMPUTACIONAL

Com o objetivo de mensurar a proximidade das novas aproximações propostas com relação a DCT exata, utilizamos o erro em energia como critério. Para $m, n = 0, 1, \dots, 7$, sejam os sinais discretos $h_m[n]$ e $\hat{h}_m[n]$, formados pelas $(m+1, n+1)$ -ésimas entradas das matrizes da DCT exata e de uma dada aproximação para a DCT, respectivamente. Tomando a transformada discreta de Fourier de tempo discreto destes sinais, obtemos $H_m(\omega)$ e $\hat{H}_m(\omega)$, $m = 0, 1, \dots, 7$, que representam as funções de transferência das $(m+1)$ -ésimas linhas das matrizes DCT exata e DCT aproximada, respectivamente. Assim, definimos o *erro de energia* da $(m+1)$ -ésima linha matricial por [11]

$$\epsilon_m = \int_0^\pi |H_m(\omega) - \hat{H}_m(\omega)|^2 d\omega. \quad (8)$$

O erro de energia total é simplesmente fornecido por $\epsilon_{\text{total}} = \sum_{m=0}^7 \epsilon_m$. Como descrito em [11], ϵ_{total} é uma medida de similaridade entre a DCT exata e a DCT aproximada considerada. Alternativamente, notamos que (8) pode ser calculada de $h_m[n]$ e $\hat{h}_m[n]$ pelo Teorema de Parseval [17, p. 18].

Seguindo a técnica proposta em [10], um fator de escalonamento de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é capaz de melhorar a aproximação das transformadas propostas \tilde{C}_8 e \hat{C}_8 . Isto permite obter um menor erro de energia total. Em particular, obtemos que $\epsilon_0 = \epsilon_4 = 0$ (cf. Tabela I).

Portanto, (4) e (5) e suas inversas (6) e (7) resultam em:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_8 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tilde{T}_8 \cdot \tilde{M}_3 \cdot \tilde{M}_4 \cdot B_8, \\ \hat{C}_8 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{T}_8 \cdot \hat{M}_3 \cdot \hat{M}_4 \cdot B_8, \\ \tilde{C}_8^{-1} &= \sqrt{2} B_8^T \cdot \tilde{M}_4^{-1} \cdot \tilde{M}_3^{-1} \cdot \tilde{T}_8^{-1}, \\ \hat{C}_8^{-1} &= \sqrt{2} B_8^T \cdot \hat{M}_4^{-1} \cdot \hat{M}_3^{-1} \cdot \hat{T}_8^{-1}. \end{aligned}$$

No contexto de compressão de imagens, estes fatores de escalonamento podem ser absorvidos na etapa de quantização [3], [11]. Assim, nesse sentido, não representam aumento na complexidade computacional.

Para comparação com as transformadas propostas, consideramos as clássicas aproximações SDCT e BAS—que são não-ortogonais, assim como as transformadas de Hadamard (HT) e Walsh-Hadamard (WHT), ambas ortogonais. Os resultados para a medida de erro de energia para as aproximações discutidas estão listadas na Tabela I. Adicionalmente, na Tabela II, são fornecidas as complexidades computacionais de cada método considerado neste trabalho.

TABELA I
ERRO DE ENERGIA

m	\tilde{C}_8	\hat{C}_8	SDCT	BAS	WHT	HT
0	0	0	0	0	0	0
1	0.24	1.55	0.59	0.24	0.59	5.15
2	0.61	0.48	0.48	0.48	0.48	6.28
3	0.42	0.42	0.59	0.69	1.46	6.28
4	0	0	0	0	0	6.28
5	0.42	0.42	0.59	1.65	1.46	6.28
6	0.61	0.48	0.48	0.48	0.48	8.69
7	0.24	1.55	0.59	0.59	0.59	8.64
Total	2.52	4.88	3.32	4.12	5.05	47.61

TABELA II
CUSTO COMPUTACIONAL

	Adições	Mult.	Deslocamentos	Total
DCT exata	26	16	0	42
\tilde{C}_8	22	0	0	22
\hat{C}_8	26	0	0	26
SDCT	24	0	0	24
BAS	21	0	0	21
WHT	24	0	0	24
HT	24	0	0	24

A aproximação proposta \tilde{C}_8 apresenta o menor erro de energia entre as transformadas consideradas e requer apenas 22 adições, i.e., duas operações a menos que a SDCT e apenas uma a mais que a BAS. A Tabela II também apresenta o custo computacional da DCT exata utilizando a fatoração de Chen descrita em (3), necessitando 26 adições e 16 multiplicações para sua implementação.

O custo computacional da aproximação \tilde{C}_8 é superior ao custo computacional das outras aproximações analisadas. A Figura 1 apresenta o diagrama de fluxo do algoritmo rápido proposto para a aproximação \tilde{C}_8 . O digrama para a aproximação \hat{C}_8 é similar e foi suprimido por brevidade.

V. APLICAÇÕES EM COMPRESSÃO DE IMAGENS

A. Compressão tipo JPEG e medidas de erro

As aproximações \tilde{C}_8 e \hat{C}_8 propostas foram avaliadas no contexto de compressão de imagens, conjuntamente com as aproximações SDCT, BAS, HT e WHT. Para tanto, foi usado

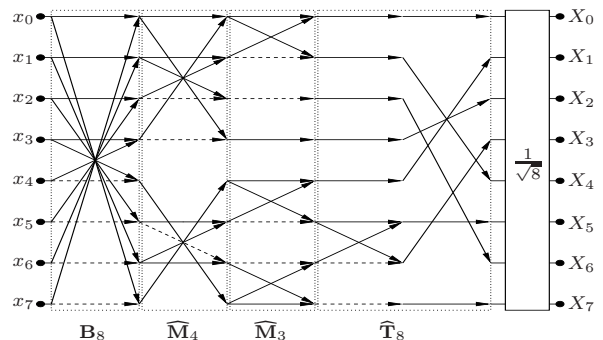


Fig. 1. Diagrama de fluxo para a aproximação \tilde{C}_8 (as linhas em traços indicam multiplicação por -1).

um conjunto de 30 imagens padronizadas de 8-bits em escala de cinza de tamanho 512×512 obtidas de [1]. Cada imagem foi subdividida em blocos de tamanho 8×8 . Cada bloco \mathbf{B} foi submetido à transformada 2-D, da seguinte forma [23]

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{-1},$$

em que \mathbf{T} é a matriz de uma das transformadas consideradas. Os 64 coeficientes resultantes para cada bloco \mathbf{B} foram ordenados segundo a sequência zig-zag padrão e apenas r coeficientes foram retidos pelo processo de compressão. Como sugerido em [11], adotamos $1 \leq r \leq 45$. Finalmente, a transformada 2-D inversa é aplicada para reconstruir a imagem compactada. A imagem resultante é então comparada com a imagem original segundo medidas objetivas de qualidade.

Como medidas de avaliação foram consideradas a relação sinal-ruído de pico (PSNR) [16], o erro médio quadrático (MSE) [26] e o índice de similaridade estrutural (SSIM) [26], [27]. Para o MSE e o SSIM, também foram calculados os erros absolutos percentuais (EAP) relativos à DCT exata. Seguindo a metodologia de [11], a média das medidas de avaliação sob as 30 imagens padronizadas foram calculadas, o que resulta em resultados estatisticamente mais robustos, quando comparados com análises feitas em imagens particulares. As medidas de PSNR e MSE são comumente as mais utilizadas para comparar técnicas de compressão. Contudo, como apontado em [27], o SSIM considera características do sistema visual humano não consideradas nas medidas anteriores.

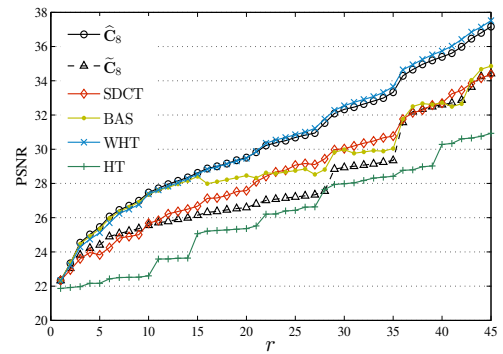
B. Resultados

Os valores resultantes dos experimentos computacionais são apresentados nas Figura 2(a)-(c). Na Figura 2(c), a curva correspondente a HT foi suprimida, pois apresenta valores excessivamente altos em comparação às outras. Os resultados mostram que, em termos de PSNR ou MSE, a aproximação $\hat{\mathbf{C}}_8$ supera a SDCT e a BAS; e proporciona resultados similares à WHT, mas com um menor custo computacional. Em termos de SSIM, temos que as duas aproximações propostas $\tilde{\mathbf{C}}_8$ e $\hat{\mathbf{C}}_8$ tem desempenhos similares.

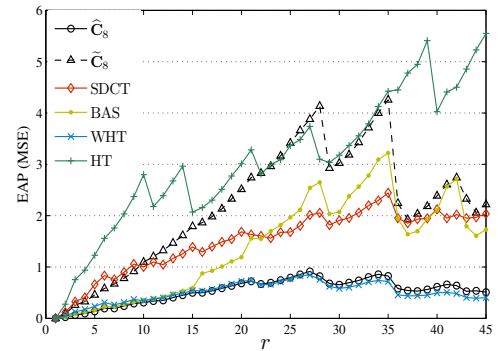
A aproximação proposta tem desempenho bastante próximo ao da WHT. Conforme as Figuras 2(a) e 2(b), o desempenho da transformada proposta $\hat{\mathbf{C}}_8$ é superior ao desempenho da WHT para r pequeno ($r \leq 15$). Assim, na Figura 3, é apresentada a imagem padrão Elaine após o processo de compressão considerando apenas a WHT e a aproximação proposta $\hat{\mathbf{C}}_8$. Imagens para a DCT exata e SDCT também são exibidas, por serem métodos de referência. Todas as imagens foram comprimidas utilizando $r = 6$, valor que representa um truncamento de aproximadamente 90.5% dos coeficientes. A análise visual dessas imagens obtidas mostra a superioridade da transformada $\hat{\mathbf{C}}_8$ proposta sobre a SDCT em compressão de imagens. Ainda, a Tabela III evidencia quantitativamente o melhor desempenho de $\hat{\mathbf{C}}_8$ sobre as demais transformadas consideradas.

C. Análise de blocking artifact

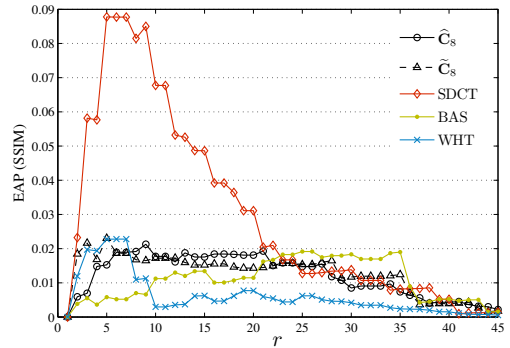
Um efeito visual indesejável em compressão de imagens é o surgimento de blocos na imagem. Esse efeito é conhecido como *blocking artifact* [13, p. 573].



(a)



(b)



(c)

Fig. 2. Curvas para a média correspondente a 30 imagens. (a) PSNR, (b) EAP (MSE) e (c) EAP (SSIM).

TABELA III
MEDIDAS DE AVALIAÇÃO DE COMPRESSÃO DA IMAGEM ELAINE,
CONSIDERANDO $r = 6$

Transformada	PSNR	MSE	SSIM
DCT exata	31.03	51.33	0.95
$\hat{\mathbf{C}}_8$	30.00	65.00	0.94
WHT	28.91	83.53	0.92
SDCT	27.59	113.37	0.88

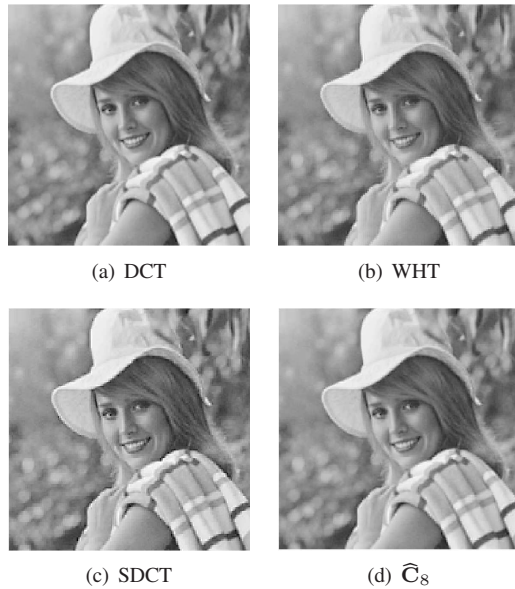


Fig. 3. Imagem Elaine ($r = 6$): (a) DCT exata, (b) WHT, (c) SDCT e (d) \widehat{C}_8 .

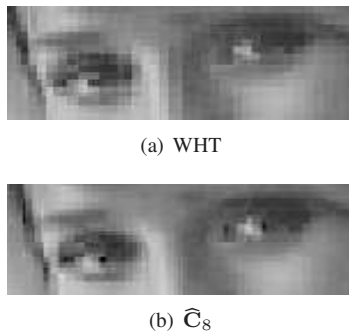


Fig. 4. Efeito de *blocking artifact* na imagem Elaine ($r = 6$): (a) WHT e (b) \widehat{C}_8 .

A Figura 4 mostra qualitativamente essa comparação em termos de *blocking artifact* derivados da \widehat{C}_8 e WHT. A utilização de \widehat{C}_8 na compressão de imagens minimiza o aparecimento de *blocking artifact* comparativamente à WHT.

VI. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta duas aproximações para a DCT baseadas na fatoração de Chen. Seus desempenhos foram comparados com outras aproximações bastante conhecidas na literatura de processamento de sinais. A aproximação \widehat{C}_8 apresentou o menor erro de energia total dentre todas as aproximações analisadas, evidenciando uma maior similaridade espectral com a DCT exata. A aproximação \widehat{C}_8 também demonstrou superioridade sobre a SDCT, a BAS e a HT em termos de PSNR e MSE das imagens comprimidas, tendo um desempenho similar à WHT, porém com um custo computacional 8% inferior.

REFERÊNCIAS

[1] The USC-SIPI Image Database, University of Southern California, Signal and Image Processing Institute., 2011.

- [2] N. Ahmed, T. Natarajan, and K. R. Rao. Discrete Cosine Transform. *IEEE Trans. Comput.*, C-23(1):90–93, January 1974.
- [3] F. M. Bayer and R. J. Cintra. DCT-like transform for image compression requires 14 additions only. *Electron. Lett.*, 48(15):919–921, July 2012.
- [4] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy. A multiplication-free transform for image compression. In *2nd International Conference on Signals, Circuits and Syst. (SCS)*, pages 1–4, November 2008.
- [5] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy. A novel transform for image compression. In *IEEE 53rd International Midwest Symposium on Circuits Syst. (MWSCAS)*, pages 509–512, August 2010.
- [6] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. N. S. Swamy. A low-complexity parametric transform for image compression. In *IEEE International Symposium on Circuits Syst. (ISCAS)*, pages 2145–2148, May 2011.
- [7] V. Britanak, P. C. Yip, and K. R. Rao. *Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations*. Elsevier Science, 2010.
- [8] T. S. Chang, C. S. Kung, and C. W. Jen. A simple processor core design for DCT/IDCT. *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, 10(3):439–447, April 2000.
- [9] W. H. Chen, C. Smith, and S. Fralick. A fast computational algorithm for the Discrete Cosine Transform. *IEEE Trans. Commun.*, 25(9):1004–1009, September 1977.
- [10] R. J. Cintra. An integer approximation method for discrete sinusoidal transforms. *Circuits, Syst., and Signal Process.*, 30(6):1481–1501, December 2011.
- [11] R. J. Cintra and F. M. Bayer. A DCT approximation for image compression. *IEEE Signal Process. Lett.*, 18(10):579–582, October 2011.
- [12] M. Effros, H. Feng, and K. Zeger. Suboptimality of the Karhunen-Loève transform for transform coding. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 50(8):1605–1619, August 2004.
- [13] R. C. Gonzalez and R. E. Woods. *Digital image processing*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 3rd edition, 2006.
- [14] T. I. Haweel. A new square wave transform based on the DCT. *Signal Process.*, 81(11):2309–2319, November 2001.
- [15] K. J. Horadam. Hadamard matrices and their applications. *Cryptography Commun.*, 2(2):129–154, 2010.
- [16] Q. Huynh-Thu and M. Ghanbari. Scope of validity of PSNR in image/video quality assessment. *Electron. Lett.*, 44(13):800–801, June 2008.
- [17] Anil K. Jain. *Fundamentals of digital image processing*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, N. J., USA, 1989.
- [18] Jie Liang and T. D. Tran. Fast multiplierless approximations of the DCT with the lifting scheme. *IEEE Trans. Signal Process.*, 49(12):3032–3044, December 2001.
- [19] C. Loeffler, A. Ligtenberg, and G. S. Moschytz. Practical fast 1-D DCT algorithms with 11 multiplications. In *International Conference on Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, pages 988–991, May 1989.
- [20] A. Puri, X. Chen, and A. Luthra. Video coding using the H.264/MPEG-4 AVC compression standard. *Signal Process.: Image Commun.*, 19(9):793–849, October 2004.
- [21] N. Roma and L. Sousa. Efficient hybrid DCT-domain algorithm for video spatial downscaling. *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, 2007(2):30–30, June 2007.
- [22] N. Suehiro and M. Hatori. Fast algorithms for the DFT and other sinusoidal transforms. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, 34(3):642–644, June 1986.
- [23] T. Suzuki and M. Ikehara. Integer DCT based on direct-lifting of DCT-IDCT for lossless-to-lossy image coding. *IEEE Trans. Image Process.*, 19(11):2958–2965, November 2010.
- [24] Z. Wang. Reconsideration of: A fast computational algorithm for the Discrete Cosine Transform. *IEEE Trans. Commun.*, 31(1):121–123, January 1983.
- [25] Z. Wang. Fast algorithms for the discrete W transform and for the Discrete Fourier Transform. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, 32(4):803–816, August 1984.
- [26] Z. Wang and A. C. Bovik. Mean squared error: Love it or leave it? A new look at signal fidelity measures. *IEEE Signal Process. Mag.*, 26(1):98–117, January 2009.
- [27] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, and E. P. Simoncelli. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Trans. Image Process.*, 13(4):600–612, April 2004.
- [28] W. Yuan, P. Hao, and C. Xu. Matrix factorization for fast DCT algorithms. In *IEEE International Conference on Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, volume 3, pages 948–951, May 2006.