

Detecção Ótima e Subótima para um Radar Meteorológico com Três Antenas Fixas

Fernando Darío Almeida García, Marco Antonio Miguel Miranda e José Cândido Silveira Santos Filho

Resumo— Em artigos recentes, os autores deste trabalho propuseram e analisaram uma abordagem inovadora de baixo custo para a construção de radares meteorológicos, com base em duas antenas fixas de feixe largo. Nesses artigos, verificou-se que uma quantidade muito elevada de amostras de sinal seria necessária para garantir um desempenho satisfatório do radar proposto. Por outro lado, vislumbrou-se que tal problema poderia ser contornado pelo uso de mais do que duas antenas. Este trabalho constitui um primeiro passo nesse sentido, estendendo a proposta original do radar de duas para três antenas. Um detector ótimo é projetado para o novo radar, bem como suas probabilidades de detecção e falso alarme são obtidas em forma fechada. Além disso, como termo de comparação, um esquema subótimo de detecção é também avaliado, aplicando-se o detector ótimo conhecido para duas antenas a cada possível par de antenas, e combinando-se então as decisões parciais via regra da maioria. O detector ótimo mostra-se muito superior ao detector subótimo.

Palavras-Chave— Antenas fixas, detecção ótima, radar meteorológico, regra da maioria.

Abstract— In recent papers, we have proposed and analyzed an innovative low-cost framework for the construction of meteorological radars, based on two fixed wide-beam antennas. In those papers, it has been found that a very large amount of signal samples would be required to ensure an adequate performance for the proposed radar. On the other hand, it has been envisaged that such problem could be circumvented by using more than two antennas. This work is a first step in this direction, by extending the original radar proposal from two to three antennas. We design an optimal detector for the new radar and derive its false-alarm and detection probabilities in closed form. In addition, for comparison, we also assess a suboptimal detection scheme, by applying the known two-antenna optimal detector to each possible pair of antennas, and by combining the partial decisions via majority rule. The optimal detector proves much better than the suboptimal one.

Keywords— Fixed antennas, majority rule, meteorological radar, optimal detection.

I. INTRODUÇÃO

Radares meteorológicos tradicionais se baseiam em uma única antena girante de feixe estreito [1]. No entanto, essa abordagem pode ser muito custosa, pois requer um aparato mecânico enorme e extremamente robusto. Além disso, pode ser inadequada para previsões do tempo de curto prazo (*now-casting*), já que seu ciclo de varredura é muito demorado. A fim de contornar esse problema, uma abordagem inovadora

Fernando Darío Almeida García e José Cândido Silveira Santos Filho, Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brazil, Tel: +55 (19) 3788-5106, Fax: +55 (19) 3289-1395, E-mail: {ferdaral,candido}@decom.fee.unicamp.br.

Marco Antonio Miguel Miranda, Bradar S.A., Campinas, SP, Brazil, Tel: +55 (19) 2101-8844, E-mail: {marco.miranda}@bradar.com.br.

de varredura rápida e baixo custo foi introduzida em [2]. A nova abordagem se baseia no uso de duas antenas fixas de feixe largo. A ideia é que tais antenas, mesmo sendo de feixe largo, possam prover resolução angular de feixe estreito, explorando-se para tanto a correlação mútua entre os sinais recebidos pelas antenas. Mais especificamente, se existe um alvo meteorológico (nuvem ou chuva, por exemplo) na região de intersecção entre as células de resolução das duas antenas, então os sinais recebidos por elas devem ser correlacionados entre si. Do contrário, se não existe alvo na região de intersecção, então os sinais são mutuamente independentes. Assim, o grau de correlação entre os sinais recebidos pelas duas antenas provê a base para um algoritmo de detecção para o radar. Quanto maior a correlação, melhor o desempenho esperado. Em [2], essa correlação foi obtida analiticamente em termos de parâmetros físicos do radar, como linha de base entre as antenas, largura de banda de frequência e diretividade das antenas. Em [3], o detector ótimo para o radar em questão foi projetado e analisado, em termos das probabilidades de detecção (PD) e de falso alarme (PFA).

Por outro lado, observou-se em [3] que uma quantidade muito elevada de amostras dos sinais recebidos seria tipicamente necessária para assegurar um desempenho satisfatório do radar proposto, e que isso poderia ser parcialmente contornado aumentando-se a quantidade de antenas. Este trabalho constitui uma primeira investigação nesse sentido. Em particular, propõe-se aqui um radar meteorológico com três (em vez de duas) antenas fixas. O detector ótimo para o novo radar é projetado e analisado, obtendo-se expressões fechadas para PD e PFA. Além disso, como termo de comparação, um esquema subótimo de detecção é também proposto e analisado. Nesse detector subótimo, cada par de sinais recebidos é submetido ao detector ótimo de duas antenas projetado em [3], e as decisões parciais são posteriormente combinadas via regra da maioria. Exemplos numéricos atestam que o detector ótimo é muito superior ao detector subótimo.

Os resultados apresentados neste trabalho vêm sendo empregados como ferramenta de projeto e dimensionamento de radares meteorológicos na Bradar Indústria S.A., empresa do grupo Embraer Defesa e Segurança.

II. MODELO DO RADAR

Considere o radar meteorológico apresentado na Fig. 1, composto de um arranjo linear de três antenas, separadas por uma linha de base B . O radar é do tipo multiestático e pulsado, de modo que o mesmo arranjo de antenas é usado para transmissão e recepção, em intervalos alternados [4].

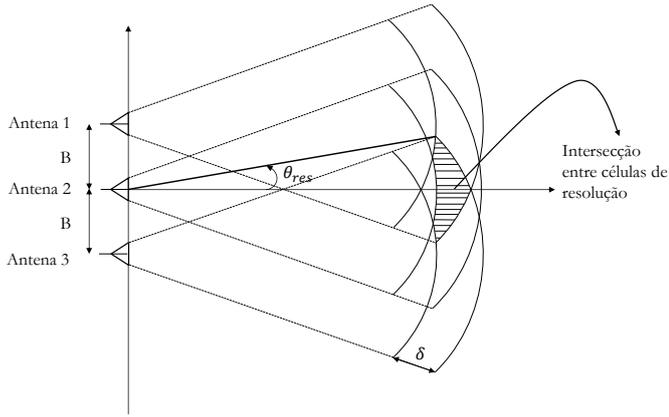


Fig. 1. Vista superior do radar meteorológico, composto por um arranjo linear de três antenas separadas por uma determinada linha de base, B.

Além disso, considera-se o uso de compressão de pulso na recepção [5].

A menor distância radial entre dois alvos tais que eles sejam distinguíveis pelo radar é denominada resolução em alcance (δ). Da mesma forma, a menor separação angular azimutal entre dois alvos tais que eles sejam distinguíveis pelo radar é denominada resolução em azimute (θ_{res}). Para um radar pulsado com compressão de pulso, mostra-se que $\delta = c/\Delta f$, em que c é a velocidade da luz e Δf é a largura de banda do pulso transmitido [5]. Por outro lado, observe na Fig. 1 que, a um dado alcance, o valor de δ e o feixe de cada antena definem uma faixa curva, denominada célula de resolução. Observe também que as células de resolução das três antenas apresentam uma região de intersecção (hachurada). É essa região que determina θ_{res} , como indicado na figura. Note que θ_{res} diminui com o aumento de B.

O sinal recebido por cada antena resulta da soma de ecos provenientes de uma quantidade imensa de espalhadores dentro da célula de resolução. Esses espalhadores representam o fenômeno meteorológico sob observação (chuva ou nuvens, por exemplo). Os sinais recebidos pelas antenas 1, 2 e 3 podem ser escritos respectivamente como

$$S_{1i} = X_{1i} + jY_{1i} \quad (1a)$$

$$S_{2i} = X_{2i} + jY_{2i} \quad (1b)$$

$$S_{3i} = X_{3i} + jY_{3i}, \quad (1c)$$

em que i é um índice temporal discreto ($i = 1, 2, \dots, n$), n é a quantidade de amostras observadas em cada antena, X_{ki} é a componente em fase da k -ésima antena ($k = 1, 2, 3$) e Y_{ki} é a componente em quadratura correspondente. Como discutido em [2], X_{1i} e Y_{1i} são mutuamente independentes, bem como X_{2i} e Y_{2i} , e também X_{3i} e Y_{3i} . Além disso, S_{1i} , S_{2i} e S_{3i} são independentes de S_{1m} , S_{2m} e S_{3m} , $\forall i \neq m$, considerando que o intervalo de repetição de pulso é muito maior que o tempo de coerência associado ao movimento randômico dos espalhadores [6]. Por outro lado, X_{ki} e X_{li} (bem como Y_{ki} e Y_{li}) podem ser ou mutuamente independentes ou apresentar certo coeficiente de correlação ρ_{kl} , $(k, l) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, dependendo da existência ou ausência de alvo na região de intersecção entre as células

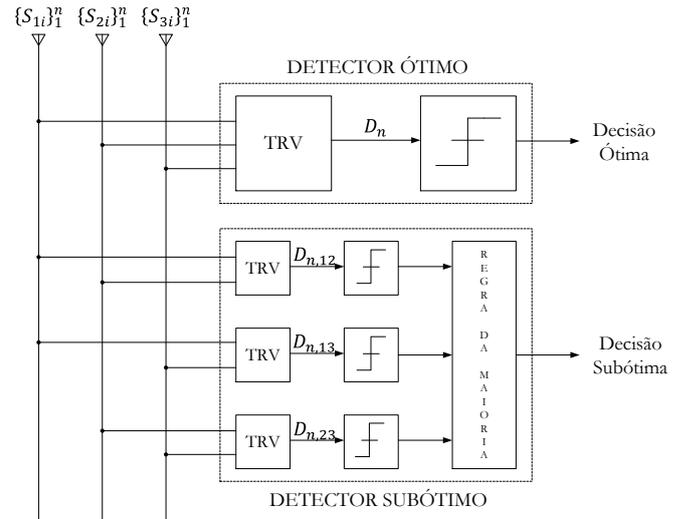


Fig. 2. Diagrama de blocos dos detectores ótimo e subótimo.

de resolução das antenas, respectivamente. Finalmente, sob condições bem gerais, S_{1i} , S_{2i} e S_{3i} são processos gaussianos brancos circularmente simétricos e identicamente distribuídos, de modo que X_{1i} , X_{2i} , X_{3i} , Y_{1i} , Y_{2i} e Y_{3i} têm média nula e mesma variância (digamos, σ^2), como demonstrado em [2]. Nesse trabalho, uma análise abrangente dos parâmetros ρ_{kl} e σ^2 foi apresentada em termos dos parâmetros físicos do radar. Portanto, nenhuma discussão adicional envolvendo tais parâmetros será apresentada aqui. Em vez disso, o objetivo deste trabalho é projetar e analisar o detector ótimo e um detector subótimo para o radar em questão, em termos de valores arbitrários de ρ_{12} , ρ_{13} , ρ_{23} e σ^2 . Isso é apresentado na próxima seção.

III. PROJETO E ANÁLISE DE DETECTORES

Na apresentação que segue, $f_Z(\cdot)$ denota a função densidade de probabilidade (FDP) de uma variável aleatória genérica Z , $E\{\cdot\}$ denota média estatística e $\text{VAR}\{\cdot\}$ denota variância. Além disso, as observações referentes aos sinais em (1) são representadas de forma compacta como

$$\underline{X} = \{X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots, X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}\} \quad (2a)$$

$$\underline{Y} = \{Y_{11}, Y_{21}, Y_{31}, \dots, Y_{1n}, Y_{2n}, Y_{3n}\}. \quad (2b)$$

A. Detector Ótimo

1) *Teste de Hipóteses*: No problema de detecção em radares, a questão central é decidir pela presença ou ausência de um alvo. No caso deste trabalho, tal questão é posta sobre cada região de intersecção entre as células de resolução das três antenas, para diversas combinações de alcance. Desse modo, varre-se todo o setor iluminado pelas antenas. Trata-se de um teste de hipóteses binário simples, baseado nas observações \underline{X} e \underline{Y} , como segue:

- Hipótese \mathcal{H}_0 : não existe alvo. Nesse caso, de acordo com o modelo de radar descrito na seção anterior, \underline{X} e \underline{Y} são formados por componentes gaussianas mutuamente independentes com média nula e variância σ^2 .

- Hipótese \mathcal{H}_1 : existe alvo. Nesse caso, \underline{X} e \underline{Y} são ainda independentes entre si, mas agora as componentes X_{ki} e X_{li} (bem como Y_{ki} e Y_{li}), $(k, l) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, são variáveis conjuntamente gaussianas com média nula, variância σ^2 e coeficiente de correlação ρ_{kl} .

Em outras palavras, a FDP conjunta de \underline{X} e \underline{Y} é

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_\nu) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i^T C_{\mathcal{H}_\nu}^{-1} \underline{X}_i + \underline{Y}_i^T C_{\mathcal{H}_\nu}^{-1} \underline{Y}_i)\right]}{[(2\pi)^3 \det(C_{\mathcal{H}_\nu})]^n}, \quad (3)$$

com $\nu \in \{0, 1\}$, conforme a hipótese, $\underline{X}_i \triangleq [X_{1i} \ X_{2i} \ X_{3i}]^T$ e $\underline{Y}_i \triangleq [Y_{1i} \ Y_{2i} \ Y_{3i}]^T$, em que $[\cdot]^T$ indica transposição. Além disso, $C_{\mathcal{H}_0}$ e $C_{\mathcal{H}_1}$ são as matrizes de covariância, dadas por

$$C_{\mathcal{H}_0} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{\mathcal{H}_1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

2) *Critério de Decisão*: Em um teste de hipóteses binário simples, a decisão ótima (máxima PD para uma dada PFA) é fornecida pelo critério de Neyman-Pearson [7]. Segundo esse critério, decide-se pela hipótese \mathcal{H}_1 se a razão de verossimilhança $\Lambda(\underline{X}, \underline{Y})$ entre as hipóteses \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_0 exceder um certo limiar γ' , e pela hipótese \mathcal{H}_0 caso contrário, ou seja,

$$\Lambda(\underline{X}, \underline{Y}) \triangleq \frac{f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_1)}{f_{\underline{X}\underline{Y}}(\underline{X}, \underline{Y} | \mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\underset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \gamma'. \quad (5)$$

O critério de Neyman-Pearson é também chamado de teste por razão de verossimilhança (TRV).

3) *Variável de Decisão*: A partir de (5), é possível destrinchar melhor a regra de decisão em termos das observações de \underline{X} e \underline{Y} . O intuito é explicitar uma função D_n das observações (também chamada de variável de decisão) a partir da qual a decisão é tomada. O processo está ilustrado na Fig. 2. Substituindo-se (3) em (5), e realizando-se as devidas simplificações, obtém-se

$$\Lambda(\underline{X}, \underline{Y}) = \left[\frac{\det(C_{\mathcal{H}_0})}{\det(C_{\mathcal{H}_1})} \right]^n \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H (C_{\mathcal{H}_1}^{-1} - C_{\mathcal{H}_0}^{-1}) \underline{S}_i) \right], \quad (6)$$

em que $\underline{S}_i \triangleq [S_{1i} \ S_{2i} \ S_{3i}]^H$, com $[\cdot]^H$ indicando conjugado transposto. A fim de simplificar a análise, escalona-se a variável de decisão como $D_n = D'_n K_D$, em que $K_D \triangleq \sigma^2 (1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{23}^2)$ é uma constante, e

$$D'_n \triangleq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\underline{S}_i^H (C_{\mathcal{H}_1}^{-1} - C_{\mathcal{H}_0}^{-1}) \underline{S}_i). \quad (7)$$

Uma vez que a função exponencial é monótona e crescente, confrontar $\Lambda(\underline{X}, \underline{Y})$ com um limiar γ' , como em (5), é equivalente a confrontar D_n com outro limiar γ correspondente. A normalização por n em (7) é arbitrária. Finalmente, a regra de decisão em (5) pode ser reescrita como

$$D_n \underset{\mathcal{H}_1}{\underset{\mathcal{H}_0}{\geq}} \gamma. \quad (8)$$

4) *Desempenho do Detector*: Considerando-se um número n de amostras suficientemente elevado, segue, pelo Teorema Central do Limite, que a variável de decisão D_n definida em (7) se aproxima de uma gaussiana. Por conta disso, a caracterização de D_n requer apenas a determinação

de sua média e variância, sob cada uma das hipóteses, \mathcal{H}_0 e \mathcal{H}_1 . Isso pode ser obtido a partir da FDP conjunta de \underline{X} e \underline{Y} , dada por (3) e (4). Após uma longa série de manipulações e simplificações algébricas, omitidas aqui por simplicidade, os resultados finais são estes:

$$E\{D_n | \mathcal{H}_0\} = 4\sigma^2 (3\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) \quad (9)$$

$$E\{D_n | \mathcal{H}_1\} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}\{D_n | \mathcal{H}_0\} &= \frac{8\sigma^4}{n} [\rho_{12}^4 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 4\rho_{12}^3\rho_{13}\rho_{23} \\ &\quad + (\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} (3 + 2\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2) \\ &\quad + \rho_{12}^2 (1 + 2\rho_{23}^2 + \rho_{13}^2 (2 + 6\rho_{23}^2))] \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}\{D_n | \mathcal{H}_1\} &= \frac{8\sigma^4}{n} (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2) \\ &\quad \times (-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23})^2. \quad (12) \end{aligned}$$

Quando a variável de decisão é gaussiana, a PD e a PFA de um detector binário genérico são conhecidas, sendo dadas por (veja, por exemplo, [3, Eqs. (37) e (38)] ou [8])

$$\text{PD} = Q \left(\frac{\gamma - E\{D_n | \mathcal{H}_0\}}{\sqrt{\text{VAR}\{D_n | \mathcal{H}_0\}}} \right) \quad (13a)$$

$$\text{PFA} = Q \left(\frac{\gamma - E\{D_n | \mathcal{H}_1\}}{\sqrt{\text{VAR}\{D_n | \mathcal{H}_1\}}} \right), \quad (13b)$$

em que $Q(x) \triangleq \int_x^\infty (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-t^2/2) dt$ é a função de distribuição cumulativa complementar de uma variável normal padrão (média nula e variância unitária). Finalmente, substituindo-se (9)–(12) em (13), PFA e PD são obtidas como em (14), no topo da próxima página, e

$$\text{PD} = Q \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\frac{8\sigma^4 (\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2) (-1 + \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23})^2}{n}}} \right). \quad (15)$$

B. Detector subótimo

O detector subótimo está ilustrado na Fig. 2. Nele, os sinais de cada par (k, l) de antenas, $(k, l) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, originam uma variável de decisão parcial $D_{n,kl}$, obtida como no detector ótimo (TRV) para duas antenas apresentado em [3]. Mais especificamente, $D_{n,kl}$ é obtida como [3, Eq. (18)]

$$\begin{aligned} D_{n,12} &= \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{1i} X_{2i} + Y_{1i} Y_{2i}) \right. \\ &\quad \left. - \rho_{12} \sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{2i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{2i}^2) \right) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n,13} &= \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{1i} X_{3i} + Y_{1i} Y_{3i}) \right. \\ &\quad \left. - \rho_{13} \sum_{i=1}^n (X_{1i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{1i}^2 + Y_{3i}^2) \right) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{n,23} &= \frac{1}{n} \left(2 \sum_{i=1}^n (X_{2i} X_{3i} + Y_{2i} Y_{3i}) \right. \\ &\quad \left. - \rho_{23} \sum_{i=1}^n (X_{2i}^2 + X_{3i}^2 + Y_{2i}^2 + Y_{3i}^2) \right). \quad (18) \end{aligned}$$

$$\text{PFA} = Q \left(\frac{\gamma - 4 (3\rho_{13}\rho_{23}\rho_{12} - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2) \sigma^2}{\sqrt{\frac{(\rho_{12}^4 - 4\rho_{13}\rho_{23}\rho_{12}^3 + ((6\rho_{23}^2 + 2)\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2 + 1)\rho_{12}^2 - 2\rho_{13}\rho_{23}(2\rho_{13}^2 + 2\rho_{23}^2 + 3)\rho_{12} + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + (\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2)^2)(8\sigma^4)}{n}}} \right) \quad (14)$$

Uma decisão parcial é formada a partir de cada $D_{n,kl}$, por comparação com um limiar γ , como em (8). Finalmente, aplicando-se a regra da maioria às decisões parciais, chega-se a uma decisão final. Ou seja, decide-se por \mathcal{H}_1 se pelo menos duas das decisões parciais tiverem decidido por \mathcal{H}_1 . Caso contrário, decide-se por \mathcal{H}_0 . Portanto, a decisão por \mathcal{H}_0 ou \mathcal{H}_1 corresponde à união das intersecções entre cada par dos eventos $D_{n,12} > \gamma$, $D_{n,13} > \gamma$ e $D_{n,23} > \gamma$, como mostrado na região hachurada da Fig. 3. Assim, PFA e PD podem ser expressadas como

$$\begin{aligned} \text{PFA} &= \Pr[(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \\ &+ \Pr[(D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \\ &+ \Pr[(D_{n,23} > \gamma) \cap (D_{n,12} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \\ &- 2\Pr[(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_0] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{PD} &= \Pr[(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) | \mathcal{H}_1] \\ &+ \Pr[(D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_1] \\ &+ \Pr[(D_{n,23} > \gamma) \cap (D_{n,12} > \gamma) | \mathcal{H}_1] \\ &- 2\Pr[(D_{n,12} > \gamma) \cap (D_{n,13} > \gamma) \cap (D_{n,23} > \gamma) | \mathcal{H}_1], \end{aligned} \quad (20)$$

e, portanto, formuladas em termos das FDPs conjuntas de $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$ como

$$\begin{aligned} \text{PFA} &= \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}}(a, b | \mathcal{H}_0) da db \\ &+ \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,23}}(a, c | \mathcal{H}_0) da dc \\ &+ \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,13}, D_{n,23}}(b, c | \mathcal{H}_0) db dc \\ &- 2 \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(a, b, c | \mathcal{H}_0) da db dc \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{PD} &= \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}}(a, b | \mathcal{H}_1) da db \\ &+ \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,23}}(a, c | \mathcal{H}_1) da dc \\ &+ \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,13}, D_{n,23}}(b, c | \mathcal{H}_1) db dc \\ &- 2 \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} \int_{\gamma}^{\infty} f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(a, b, c | \mathcal{H}_1) da db dc. \end{aligned} \quad (22)$$

Faz-se, pois, necessário especificar tais FDPs para cada uma das hipóteses. Mais uma vez, considerando-se um número n de amostras suficientemente elevado, segue, pelo Teorema Central do Limite, que $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ e $D_{n,23}$, como definidos em (16)–(18), se aproximam de variáveis conjuntamente gaussianas. Assim, basta encontrar o vetor de média $m = [m_1 \ m_2 \ m_3]^T$ e a matriz (simétrica) de covariância $C =$

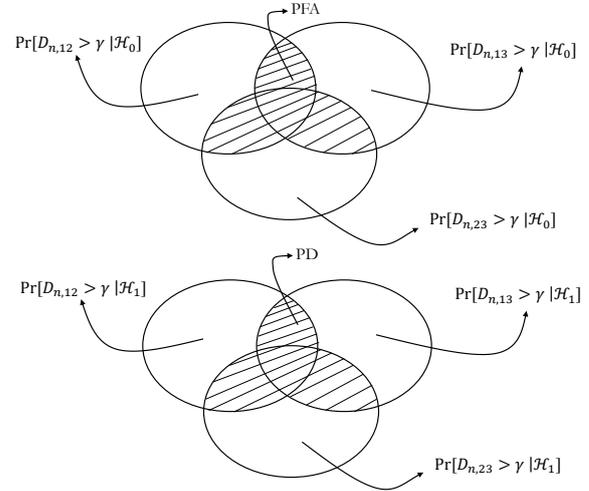


Fig. 3. Cálculo de PFA e PD para o detector subótimo.

$[C_{11} \ C_{12} \ C_{13}; \ C_{12} \ C_{22} \ C_{23}; \ C_{13} \ C_{23} \ C_{33}]$ correspondentes. Isso pode ser feito com uso da FDP conjunta de \underline{X} e \underline{Y} , dada por (3) e (4). Todavia, o procedimento matemático é muito extenso, e por isso será omitido aqui. Os resultados finais estão apresentados na Tabela I, que lista os elementos de m e C para cada uma das hipóteses. As FDPs conjuntas correspondentes, necessárias em (21) e (22), são dadas por

$$\begin{aligned} f_{D_{n,12}, D_{n,13}}(a, b) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \det(C_1)} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a - m_1 \\ b - m_2 \end{bmatrix}^T C_1^{-1} \begin{bmatrix} a - m_1 \\ b - m_2 \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} f_{D_{n,12}, D_{n,23}}(a, c) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \det(C_2)} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a - m_1 \\ c - m_3 \end{bmatrix}^T C_2^{-1} \begin{bmatrix} a - m_1 \\ c - m_3 \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} f_{D_{n,13}, D_{n,23}}(b, c) &= \frac{1}{(2\pi)^2 \det(C_3)} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} b - m_2 \\ c - m_3 \end{bmatrix}^T C_3^{-1} \begin{bmatrix} b - m_2 \\ c - m_3 \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

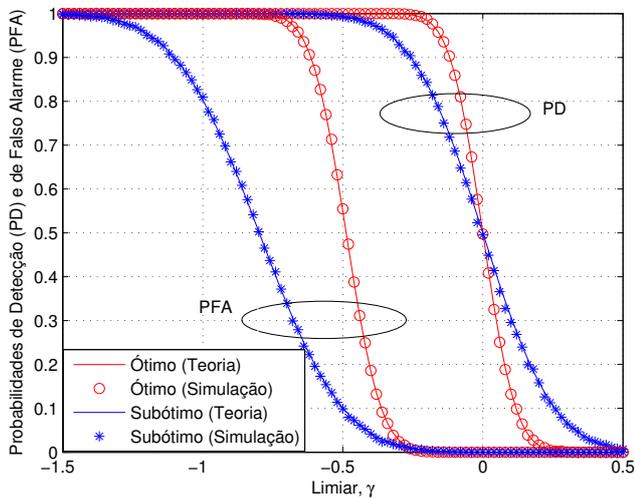
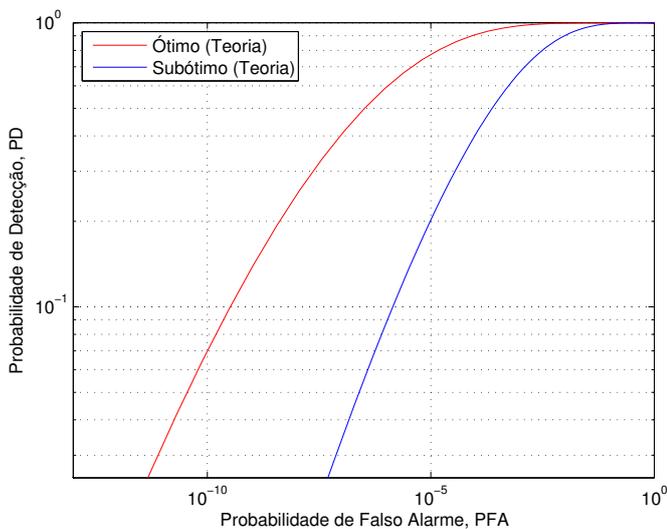
$$\begin{aligned} f_{D_{n,12}, D_{n,13}, D_{n,23}}(a, b, c) &= \frac{1}{(2\pi)^3 \det(C)} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a - m_1 \\ b - m_2 \\ c - m_3 \end{bmatrix}^T C^{-1} \begin{bmatrix} a - m_1 \\ b - m_2 \\ c - m_3 \end{bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

em que $C_1 = [C_{11} \ C_{12}; \ C_{12} \ C_{22}]$, $C_2 = [C_{11} \ C_{13}; \ C_{13} \ C_{33}]$ e $C_3 = [C_{22} \ C_{23}; \ C_{23} \ C_{33}]$. Aparentemente, não há solução em forma fechada para o problema, de modo que (21) e (22) devem ser avaliadas numericamente.

TABELA I

 ELEMENTOS DO VETOR DE MÉDIA E DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA DE $D_{n,12}$, $D_{n,13}$ E $D_{n,23}$, CONDICIONADOS ÀS HIPÓTESES \mathcal{H}_0 E \mathcal{H}_1 .

	\mathcal{H}_0	\mathcal{H}_1
m_1	$-4\sigma^2\rho_{12}$	0
m_2	$-4\sigma^2\rho_{13}$	0
m_3	$-4\sigma^2\rho_{23}$	0
C_{11}	$\frac{8\sigma^4}{n}(1+\rho_{12}^2)$	$8\sigma^4(-1+\rho_{12}^2)^2/n$
C_{22}	$\frac{8\sigma^4}{n}(1+\rho_{13}^2)$	$8\sigma^4(-1+\rho_{13}^2)^2/n$
C_{33}	$\frac{8\sigma^4}{n}(1+\rho_{23}^2)$	$8\sigma^4(-1+\rho_{23}^2)^2/n$
C_{12}	$\frac{4\sigma^4}{n}\rho_{12}\rho_{13}$	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{13}(-1+\rho_{12}^2+\rho_{13}^2)-2\rho_{23}^2(-1+\rho_{12}^2+\rho_{13}^2)+\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}^2)$
C_{13}	$\frac{4\sigma^4}{n}\rho_{12}\rho_{23}$	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{12}\rho_{23}(-1+\rho_{12}^2+\rho_{23}^2)-2\rho_{13}^2(-1+\rho_{12}^2+\rho_{23}^2)+\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}^2)$
C_{23}	$\frac{4\sigma^4}{n}\rho_{13}\rho_{23}$	$\frac{4\sigma^4}{n}(\rho_{13}\rho_{23}(-1+\rho_{13}^2+\rho_{23}^2)-2\rho_{12}^2(-1+\rho_{13}^2+\rho_{23}^2)+\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}^2)$


 Fig. 4. PD e PFA em função do limiar γ de detecção ($n = 100$, $\sigma = 1$, $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$).

 Fig. 5. PD em função de PFA ($n = 100$, $\sigma = 1$, $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$).

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

A Fig. 4 ilustra o desempenho dos detectores ótimo e subótimo projetados, apresentando PD e PFA em função do limiar de decisão, para $n = 100$, $\sigma = 1$, $\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.1$ e $\rho_{23} = 0.2$. A figura inclui curvas teóricas, obtidas a partir das contribuições analíticas deste trabalho — (14), (15), (21) e (22) —, e curvas obtidas por simulação de Monte Carlo. Note como teoria e simulação estão em perfeito acordo, o que atesta a validade das expressões analíticas deduzidas. A Fig. 5 apresenta PD em função de PFA, para o mesmo cenário anterior. Note como o detector ótimo é muito superior ao detector subótimo, fornecendo um valor consideravelmente maior de PD para cada PFA. No cenário considerado, para uma PFA de 10^{-5} , por exemplo, os detectores ótimo e subótimo apresentam uma PD em torno de 80% e 20%, respectivamente.

V. CONCLUSÕES

Em trabalhos recentes, os autores deste artigo propuseram uma abordagem inovadora para a construção de radares meteorológicos, com base em duas antenas fixas de feixe largo. A grande vantagem dessa nova abordagem frente à abordagem tradicional (uma antena girante de feixe estreito) é o menor custo e o menor tempo de varredura. Por outro lado, verificou-se nesses trabalhos que uma quantidade excessivamente elevada de amostras dos sinais recebidos pelas antenas seria necessária para o funcionamento a contento do radar. Além disso, sinalizou-se o uso de mais do que duas antenas como uma estratégia promissora de se contornar o requisito por amostras. Este trabalho representa um primeiro esforço rumo ao uso de múltiplas antenas nesse esquema inovador para radares meteorológicos. Mais especificamente, uma terceira antena foi adicionada à proposta original. Dois esquemas de detecção foram projetados para o novo radar: o ótimo e um subótimo. As probabilidades de detecção e de falso alarme foram obtidas em forma fechada para o detector ótimo e em forma integral para o detector subótimo. Resultados numéricos indicaram uma ampla vantagem para o detector ótimo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] M. Wada, J. Horikomi e F. Mizutani, "Development of solid-state weather radar", em *Proc. IEEE Radar Conf.*, 2009.
- [2] M. A. M. Miranda, J. C. S. S. Filho, et al., "Correlation Between Signals From Spaced Antennas of Stationary Meteorological Radars", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, v. 52, no. 6, pp. 3116–3124, Julho de 2013.
- [3] M. A. M. Miranda, J. C. S. S. Filho, et al., "Radar Meteorológico com Antenas Fixas: Projeto e Análise de Detector Ótimo", em *Proc. XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBfT 2013*, Fortaleza, CE, Brasil, 1–4 de Setembro de 2013.
- [4] T. Ito, R. Takahashi, S. Morita e K. Hirata, "Experimental Result of Passive Bistatic Radar with Unknown Transmitting Radar Pulse", em *Proc. 2013 European Radar Conference (EuRAD)*, pp. 455–458, Outubro de 2013.
- [5] M. A. Richards, J. Scheer e W. A. Holm, *Principles of modern radar: Basic principles*, SciTech Pub., 2010.
- [6] H. Sauvageot, *Radar meteorology*, Artech House Publishers, 1992.
- [7] A. Leon-Garcia, *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Addison Wesley Longman, 1994.
- [8] M. A. Richards, *Fundamentals of Radar Signal Processing*, McGraw Hill Professional, 2005.