

Distribuição Conjunta Fase-Envoltória Nakagami- m Bivariável

Thiago Alencar Moreira de Bairros e Michel Daoud Yacoub

Abstract—A fading model for a correlated Nakagami- m complex signal is proposed. Exact closed-form expression for the joint probability density function of two envelopes and two corresponding phases is obtained. It is assumed that the two signals present the same fading parameter but arbitrary powers. The model proposed here opens a totally new area of research and is unprecedented in the literature.

Keywords—Nakagami- m distribution, bivariate phase-envelope joint distribution, phase distribution.

Resumo—Um modelo de desvanecimento para o sinal Nakagami- m complexo é proposto. Uma expressão exata e fechada para a função densidade de probabilidade conjunta envolvendo duas envoltórias e as duas fases correspondentes é obtida. Consideram-se os sinais com o mesmo fator de desvanecimento mas com potências arbitrárias. O modelo proposto aqui abre uma nova área de pesquisa e é inédito na literatura.

Palavras-Chave—Distribuição Nakagami- m , distribuição conjunta de fase e envoltória bivariável, distribuição conjunta de fase.

I. INTRODUÇÃO

Um canal de comunicação é tipicamente caracterizado em termos de parâmetros como ganho e fase que afetam o sinal que por ele trafega. Por conta do grande número de fatores influenciando o fluxo do sinal pelo canal, tais parâmetros são tratados de forma estocástica. Particularmente, em comunicações sem fio, o ganho do canal de multipercurso pode ser descrito por processos bem estabelecidos como Rayleigh, Hoyt, e Rice. Mais recentemente, Nakagami- m surgiu como uma forma de aproximar Hoyt e Rice, incluindo, de forma exata, Rayleigh. E Nakagami- m ganhou popularidade devido à facilidade de tratamento matemático e bom ajuste a medidas de campo. Ao contrário de Rayleigh, Hoyt, e Rice, o modelo Nakagami- m foi proposto em termos das estatísticas de primeira ordem do ganho do canal, e um campo imenso abriu-se para melhor caracterizar o processo como um todo. Em [1], um modelo físico para Nakagami- m foi proposto, através do qual a derivada da envoltória do processo e estatísticas concernentes (taxa de cruzamento de nível, tempo médio de desvanecimento) foram formuladas. Mais recentemente ainda, três outros modelos de desvanecimento, i.e. α - μ [2], κ - μ [3], e η - μ [3] foram propostos, também em termos de suas estatísticas de primeira ordem. Mais tarde, modelos para estatísticas de ordem superior para estes canais foram investigados [4],

[5]. As pesquisas avançaram e novos resultados envolvendo correlação, tempo de coerência, distância de coerência, e banda de coerência surgiram [6] [7]. Deve-se ressaltar, no entanto, que os referidos avanços nas pesquisas envolveram basicamente a caracterização do ganho do canal. De novo, ao contrário de Rayleigh, Hoyt, e Rice, para os quais os modelos de fase surgem naturalmente a partir dos modelos físicos dos respectivos canais, para Nakagami- m , nenhuma informação a respeito da fase pode ser extraída de sua proposta original. Por este motivo, e por um bom tempo, as estatísticas de fase para Nakagami- m foram arbitrariamente consideradas como uniformemente distribuídas. Em [8], um modelo de fase para Nakagami- m foi proposto, em que apenas para a condição $m = 1$ (Rayleigh) a fase era uniforme. Este modelo foi, em seguida, generalizado em [9] para incluir desbalanceamento de potências entre componentes fase e quadratura. Modelos de fase para as demais distribuições propostas com base na envoltória apareceram mais tarde em [10] para η - μ e [11] para κ - μ . Os modelos de fase propostos foram, de fato, validados em situações práticas [12], [13]. O uso dos modelos em [8] e [9] vem encontrando aplicações em diversas oportunidades. Em [14], o desempenho de sistemas OFDM foi investigado. Em [15], a capacidade de canais MIMO foi obtida. Em [13], expressões para a função de distribuição cumulativa de fase e de sua inversa foram apresentadas. Em [16] – [19], o desenvolvimento de simuladores foi explorado.

A proposta de um modelo físico para a Nakagami- m propiciou que estatísticas de ordem superior pudessem ser obtidas [1], [5], [6]. Além de estatísticas como taxa de cruzamento e tempo médio de desvanecimento, tanto para a envoltória quanto para a fase, modelos de correlação puderam ser explorados. Em particular, por meio dos modelos de correlação, é possível determinarem-se parâmetros importantes do canal, como tempo, distância, e banda de coerência. Por outro lado, tais parâmetros foram obtidos apenas para o ganho (envoltória) do canal. De acordo com [1] e [2], ganho e envoltória em Nakagami- m constituem processos independentes. Assim, resultados obtidos para a envoltória não necessariamente se aplicarão para a fase. Além disso, modulações que fazem uso da informação de fase do canal poderão desempenhar de forma diferente dependendo de como o canal se correlaciona ao longo do tempo, distância, ou frequência. Dentro deste contexto, o presente trabalho objetiva a obtenção de uma distribuição conjunta fase-envoltória para dois sinais Nakagami- m correlacionados. Uma fórmula exata e fechada para a função densidade de probabilidade (FDP) conjunta para os dois sinais correlacionados, com idênticas figuras de desvanecimento, mas potências arbitrárias é obtida.

Thiago A. M. de Bairros e Michel D. Yacoub estão no Laboratório de Tecnologia Sem Fio (Wisstek), Departamento de Comunicações, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, Emails:[thiagob,michel]@decom.fee.unicamp.br. Este trabalho recebeu o apoio financeiro parcial da CAPES.

Pelo que consta aos autores, esta é uma proposta inédita que abre um leque de novos conhecimentos e campos a serem explorados relativamente ao sinal Nakagami- m . A Seção II introduz alguns conceitos preliminares envolvendo o modelo complexo Nakagami- m [20]. A Seção III propõe um modelo a partir do qual se chega à FDP conjunta desejada. A Seção IV mostra uma nova identidade matemática. A Seção V apresenta uma nova expressão fechada da conjunta de fase e da diferença de fase para o caso $m = 1$. A Seção VI mostra alguns plots da FDP de fase conjunta para diversos valores dos parâmetros de desvanecimento. A Seção VII conclui o artigo.

II. PRELIMINARES

A obtenção da distribuição conjunta fase-envoltória Nakagami- m mostrada em [8] segue o mesmo princípio que norteou o modelo físico proposto em [1]. Isto é, em um ambiente de propagação, os sinais chegam ao receptor em *clusters* de multipercurso. Uma k -ésima variável aleatória (VA) complexa Nakagami- m , N_k , representa o somatório de um conjunto de m *clusters* que chegam ao receptor e é dada por $N_k = X_k + jY_k$, onde X_k e Y_k , respectivamente, correspondem às componentes em fase e em quadratura. A envoltória R_k e a fase Θ_k são dadas por $R_k = |N_k|$ e $\Theta_k = \arg(N_k)$. A potência do sinal Nakagami- m pode ser representada através do somatório de m VA's Rayleigh $R_{ray-k,i}$, i.e. $R_k^2 = \sum_{i=1}^m R_{ray-k,i}^2$, em que $R_{ray-k,i}^2 = X_{G-k,i}^2 + Y_{G-k,i}^2$. Neste caso, $X_{G-k,i}$ e $Y_{G-k,i}$ correspondem à i -ésima componente em fase e em quadratura com distribuição Gaussiana de média nula e variância $E[R_{ray-k,i}^2] = \Omega_{ray-k,i}$. Da mesma forma, $R_k^2 = X_k^2 + Y_k^2$, onde X_k e Y_k possuem média nula e variância $E[R_k^2] = \Omega_k$ [8]. Como as VA's de Rayleigh são identicamente distribuídas [20], então $\Omega_k = m\Omega_{ray-k,i}$. O termo i será suprimido deste ponto em diante e o Ω_k passará a ser representado por

$$\Omega_k = m\Omega_{ray-k}, \quad (1)$$

com $\Omega_{ray-k} = E[R_{ray-k}^2]$.

As FDPs das componentes em fase e quadratura [8] para $Z=X$ e $Z=Y$ são otidas através da seguinte relação:

$$f_{Z_k}(z_k) = \left(\frac{m}{\Omega_k}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{|z_k|^{m-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \exp\left(-\frac{mz_k^2}{\Omega_k}\right) \quad -\infty < z_k < \infty, \quad (2)$$

Para X_k e Y_k independentes, FDP conjunta envoltória R_k e fase Θ_k é dada por [8]

$$f_{R_k\Theta_k}(r_k, \theta_k) = \left(\frac{m}{\Omega_k}\right)^m \frac{r_k^{2m-1} |\sin\theta_k \cos\theta_k|^{m-1}}{\Gamma(\frac{m}{2})^2} \exp\left(-\frac{mr_k^2}{\Omega_k}\right) \quad 0 \leq r_k < \infty, \quad -\pi \leq \theta_k < \pi. \quad (3)$$

As FDPs marginais são dadas por [8]

$$f_{R_k}(r_k) = \left(\frac{m}{\Omega_k}\right)^m \frac{2r_k^{2m-1}}{\Gamma(m)} \exp\left(-\frac{mr_k^2}{\Omega_k}\right) \quad 0 \leq r_k < \infty, \quad (4)$$

$$f_{\Theta_k}(\theta_k) = \frac{\Gamma(m) |\sin(2\theta_k)|^{m-1}}{2^m \Gamma(\frac{m}{2})^2} \quad -\pi \leq \theta_k < \pi. \quad (5)$$

Para um ambiente correlacionado [20], a FDP conjunta de duas envoltórias Nakagami- m R_1, R_2 é dada por

$$f_{R_1 R_2}(r_1, r_2) = \frac{4(r_1 r_2)^m}{\Gamma(m)\Omega_{ray1}\Omega_{ray2}(1-\rho_r)(\sqrt{\Omega_{ray1}\Omega_{ray2}\rho_r})^{m-1}} \times \exp\left[-\frac{1}{1-\rho_r} \left(\frac{r_1^2}{\Omega_{ray1}} + \frac{r_2^2}{\Omega_{ray2}}\right)\right] \mathbf{I}_{m-1}\left[\frac{2r_1 r_2 \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_{ray1}\Omega_{ray2}(1-\rho_r)}}\right] \quad 0 < r_1 < \infty, \quad 0 < r_2 < \infty, \quad (6)$$

onde ρ_r é o coeficiente de correlação de envoltória [21].

A expressão (6) e a relação (1) são utilizadas como base para as deduções apresentadas na Seção III.

III. MODELO PROPOSTO

A. FDP Conjunta Fase-Quadratura

De acordo com o modelo proposto em [8], a distribuição do módulo da componente em fase ou da componente em quadratura é uma Nakagami- $m/2$, i.e. Nakagami com parâmetro de desvanecimento $m/2$. Estendendo esse modelo para a condição de sinais correlacionados, a densidade conjunta dos módulos das componentes em fase e em quadratura para $Z = X$ e $Z = Y$ é dada por

$$f_{|Z_1||Z_2|}(x_1, z_2) = \frac{4(|z_1 z_2|)^{\frac{m}{2}} \rho_r^{\frac{1}{2}} (1-\frac{m}{2}) (\Omega_{ray1}\Omega_{ray2})^{-\frac{1}{2}} (1+\frac{m}{2})}{(1-\rho_r)\Gamma(\frac{m}{2})} \times \exp\left[-\frac{1}{(1-\rho_r)} \left(\frac{z_1^2}{\Omega_{ray1}} + \frac{z_2^2}{\Omega_{ray2}}\right)\right] \times \mathbf{I}_{\frac{m}{2}-1}\left[\frac{2|z_1 z_2| \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_{ray1}\Omega_{ray2}(1-\rho_r)}}\right] \quad 0 < |z_1| < \infty, \quad 0 < |z_2| < \infty, \quad (7)$$

O problema em questão agora é o seguinte: dada a distribuição do módulo de uma VA, qual é a distribuição da respectiva VA? Este é um problema que pode admitir infinitas soluções. Contudo, uma proposta de solução dada em [11] leva em conta condições de contorno que devem ser satisfeitas. Isso favorece que a solução seja obtida de forma que situações conhecidas do modelo se mantenham. Essa proposta foi aplicada com sucesso na obtenção do sinal complexo κ - μ , que se mostrou correta através de dados de campo [22]. Interessantemente, embora de forma intuitiva, a abordagem usada muito antes em [8] é exatamente aquela de [11], mas sem o correspondente formalismo vislumbrado. Assim, utilizando a solução de [11] (apêndice A), mas aqui estendida para duas variáveis, a FDP conjunta $f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2)$ é determinada através da seguinte relação:

$$f_{Z_1, Z_2}(Z_1, Z_2) = f_{|Z_1||Z_2|}(|z_1|, |z_2|) \frac{f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2; \mathbf{A}=\mathbf{A}_0)}{f_{|Z_1||Z_2|}(|z_1|, |z_2|; \mathbf{A}=\mathbf{A}_0)}, \quad (8)$$

onde $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ são as ditas condições de contorno. Uma condição de contorno conhecida em Nakagami- m é aquela para a qual a distribuição reduz-se para Rayleigh, i.e. $m = 1$. Nesta situação, a conjunta das componentes em fase é aquela de uma Gaussiana correlacionada. Da mesma forma, a conjunta das componentes em quadratura é aquela de uma Gaussiana bivariável correlacionada.

Assim, para $Z = X$ e $Z = Y$

$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2)|_{m=1} = \frac{1}{\pi \sqrt{(1-\rho_r)} \sqrt{\Omega_{r_{ay1}} \Omega_{r_{ay2}}}} \times \exp \left[-\frac{(z_1^2) \Omega_{r_{ay2}} - 2\sqrt{\rho_r} \sqrt{\Omega_{r_{ay1}} \Omega_{r_{ay2}}} (z_1 z_2) + (z_2^2) \Omega_{r_{ay1}}}{(1-\rho_r) \Omega_{r_{ay1}} \Omega_{r_{ay2}}} \right] -\infty < z_1 < \infty, -\infty < z_2 < \infty, \quad (9)$$

Substituindo (7) e (9) em (8) e utilizando (1) as FDPs conjuntas $f_{X_1 X_2}(X_1, X_2)$ e $f_{Y_1 Y_2}(Y_1, Y_2)$ das componentes em fase e em quadratura X_1, X_2 e Y_1, Y_2 para $Z = X$ e $Z = Y$ é obtida através da seguinte relação:

$$f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = \frac{(|z_1 z_2|)^{\frac{m}{2}} m^{\frac{m}{2}+1} \rho_r^{\frac{1}{2}(1-\frac{m}{2})} (\Omega_1 \Omega_2)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{m}{2})}}{(1-\rho_r) \Gamma(\frac{m}{2})} \times \exp \left\{ -\frac{m[(z_2^2) \Omega_1 + (z_1^2) \Omega_2] - 2m\sqrt{\rho_r} \sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (z_1 z_2)}{(1-\rho_r) \Omega_1 \Omega_2} \right\} \times I_{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{2m|z_1 z_2| \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] \operatorname{sech} \left[\frac{2m|z_1 z_2| \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] -\infty < z_1 < \infty, -\infty < z_2 < \infty. \quad (10)$$

Como X_1, Y_1 e X_2, Y_2 são VAs independentes, então $f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \times f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2)$ e com isto obtém-se a expressão final dada por

$$f_{X_1 Y_1 X_2 Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{(|x_1 x_2 y_1 y_2|)^{\frac{m}{2}} m^{m+2} \rho_r^{(1-\frac{m}{2})} (\Omega_1 \Omega_2)^{-(1+\frac{m}{2})}}{(1-\rho_r)^2 \Gamma(\frac{m}{2})^2} \times \exp \left\{ -\frac{m[(x_2^2 + y_2^2) \Omega_1 + (x_1^2 + y_1^2) \Omega_2]}{(1-\rho_r) \Omega_1 \Omega_2} \right\} \times \exp \left\{ +\frac{2m\sqrt{\rho_r} \sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (x_1 x_2 + y_1 y_2)}{(1-\rho_r) \Omega_1 \Omega_2} \right\} \times I_{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{2m|x_1 x_2| \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] I_{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{2m|y_1 y_2| \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] \times \operatorname{sech} \left[\frac{2m|x_1 x_2| \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] \operatorname{sech} \left[\frac{2m|y_1 y_2| \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] -\infty < x_1 < \infty, -\infty < y_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < y_2 < \infty. \quad (11)$$

B. FDP Conjunta Fase-Envoltória Bivariável

Utilizando (11) e através do processo o de transformação de variáveis $X_1 = R_1 \cos \theta_1, Y_1 = R_1 \sin \theta_1, X_2 = R_2 \cos \theta_2$ e $Y_2 = R_2 \sin \theta_2$, tem-se $f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = f_{X_1, Y_1, X_2, Y_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) |J|$ com $|J| = R_1 R_2$. Assim, a FDP conjunta fase-envoltória Nakagami-m bivariável é dada por

$$f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = \frac{(r_1 r_2)^{m+1} m^{m+2} \rho_r^{(1-\frac{m}{2})} (\Omega_1 \Omega_2)^{-(1+\frac{m}{2})}}{(1-\rho_r)^2 \Gamma(\frac{m}{2})^2} \times |\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2|^{\frac{m}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{m[r_1^2 \Omega_2 + r_2^2 \Omega_1] - 2mr_1 r_2 \sqrt{\rho_r} \sqrt{\Omega_1 \Omega_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{(1-\rho_r) \Omega_1 \Omega_2} \right\} \times I_{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{2mr_1 r_2 \sqrt{\rho_r} |\cos \theta_1 \cos \theta_2|}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] \times I_{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{2mr_1 r_2 \sqrt{\rho_r} |\sin \theta_1 \sin \theta_2|}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] \times \operatorname{sech} \left[\frac{2mr_1 r_2 \sqrt{\rho_r} |\cos \theta_1 \cos \theta_2|}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] \times \operatorname{sech} \left[\frac{2mr_1 r_2 \sqrt{\rho_r} |\sin \theta_1 \sin \theta_2|}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)} \right] 0 < r_1 < \infty, 0 < r_2 < \infty, -\pi < \theta_1 < \pi, -\pi < \theta_2 < \pi. \quad (12)$$

Se aplicarmos o $\lim_{\rho_r \rightarrow 0} [f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2)]$, ou seja considerando as VA's decorrelatas obtém-se o produto das FDP's de envoltória e de fase de R_1, θ_1 e R_2, θ_2 de Nakagami-m [8].

IV. DETERMINAÇÃO DE IDENTIDADE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA ANÁLISE DA FDP DE NAKAGAMI-m

Dada a FDP conjunta de fase e envoltória temos que:

$$f_{R_1 R_2}(r_1, r_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \quad (13)$$

Substituindo (6) e (12) em (13) e considerando que $w = \frac{2mr_1 r_2 \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\Omega_1 \Omega_2} (1-\rho_r)}$, obtém-se a seguinte identidade

$$I_{m-1}[w] = \frac{w \Gamma(m)}{\Gamma(\frac{m}{2})^2} 2^{-3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2|^{\frac{m}{2}} \times \exp[w \cos(\theta_1 - \theta_2)] I_{\frac{m}{2}-1}[w |\cos \theta_1 \cos \theta_2|] \times I_{\frac{m}{2}-1}[w |\sin \theta_1 \sin \theta_2|] \operatorname{sech}[w |\cos \theta_1 \cos \theta_2|] \times \operatorname{sech}[w |\sin \theta_1 \sin \theta_2|] d\theta_1 d\theta_2. \quad (14)$$

A identidade pode ser facilmente comprovada por métodos numéricos, o que foi feito exaustivamente pelos autores.

V. FDP CONJUNTA DE FASE E FDP DA DIFERENÇA DE FASE

A FDP conjunta de fase é calculada como

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_{R_1, \Theta_1, R_2, \Theta_2}(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) dr_1 dr_2.$$

Infelizmente, não é possível encontrar-se uma fórmula fechada para a referida FDP conjunta para o caso geral. Por outro lado, para $m = 1$, isso é possível. Neste caso

$$f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2; m = 1) = -\frac{2-2\rho_r}{8\pi^2 \{-1+\rho_r[\cos(\theta_1-\theta_2)]^2\}} -\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{8\pi^2 \{-1+\rho_r[\cos(\theta_1-\theta_2)]^2\}} \sqrt{\frac{\rho_r(-1+\rho_r)^2}{-1+\rho_r[\cos(\theta_1-\theta_2)]^2}} \times \left\{ \pi + 2 \arctan \left[\frac{\cos(\theta_1-\theta_2)}{\sqrt{\frac{1}{\rho_r} - [\cos(\theta_1-\theta_2)]^2}} \right] \right\} -\pi < \theta_1 < \pi, -\pi < \theta_2 < \pi. \quad (15)$$

Através do processo de transformação de variáveis temos que $f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f_{\Theta_1, \Theta_2}(\theta_1, \theta_2) |J| d\varphi$, onde $\varphi = \theta_2$, $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ e $|J| = 1$, obtém-se a FDP da diferença de fase como

$$f_{\Delta\Theta}(\Delta\theta; m=1) = -\frac{2-2\rho_r}{4\pi\{-1+\rho_r[\cos(\Delta\theta)]^2\}} - \frac{\cos(\Delta\theta)}{4\pi\{-1+\rho_r[\cos(\Delta\theta)]^2\}} \sqrt{\frac{\rho_r(-1+\rho_r)^2}{-1+\rho_r[\cos(\Delta\theta)]^2}} \times \left\{ \pi + 2 \arctan \left[\frac{\cos(\Delta\theta)}{\sqrt{\frac{1}{\rho_r} - [\cos(\Delta\theta)]^2}} \right] \right\} \quad (16)$$

$-\pi < \Delta\theta < \pi.$

VI. RESULTADOS

A Figura 1 mostra o comportamento da FDP da diferença de fase e as Figuras 2 a 7 ilustram a FDP conjunta das componentes em fase X_1, X_2 (ou, equivalentemente em quadratura Y_1, Y_2) e a FDP conjunta conjunta das fases Θ_1, Θ_2 para diferentes valores de m .

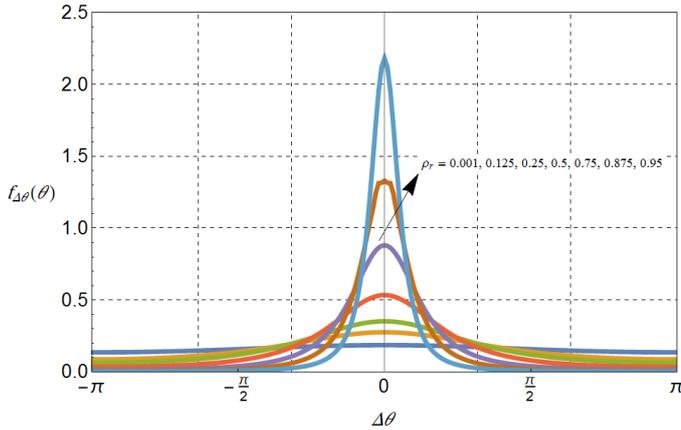


Fig. 1. FDP da diferença de fase para $m = 1$.

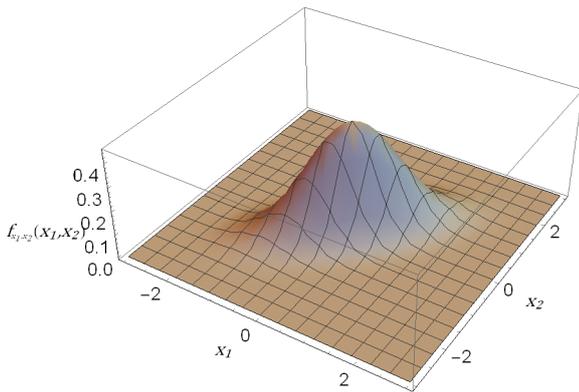


Fig. 2. FDP conjunta das componentes de fase para $m = 1$, $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = 1$, $\rho_r = \frac{1}{2}$.

Note na Figura 1 que à medida que o coeficiente de correlação diminui a FDP tende a ser uniforme. E o contrário, à medida que o coeficiente aumenta a diferença de fase concentra-se em torno de zero, tendendo a zero no limite. Nas Figuras 2 e 5 mostram, respectivamente, o comportamento

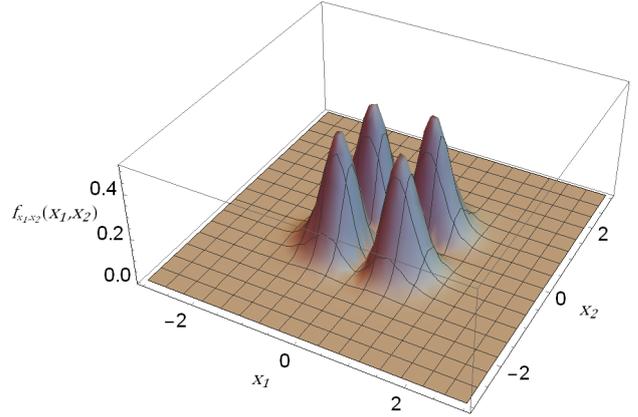


Fig. 3. FDP conjunta das componentes de fase para $m = 3$, $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = 1$, $\rho_r = 0$.

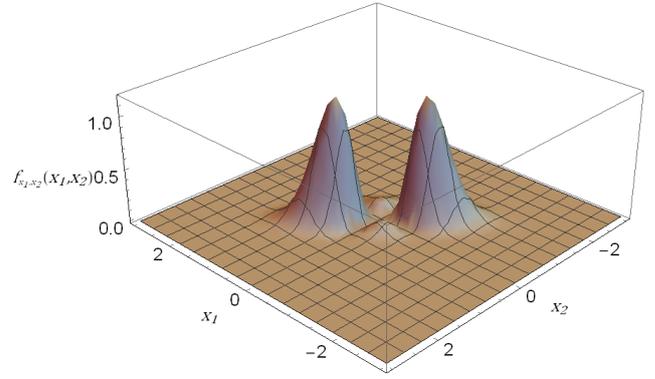


Fig. 4. FDP conjunta das componentes de fase para $m = 3$, $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = 1$, $\rho_r = \frac{1}{2}$.

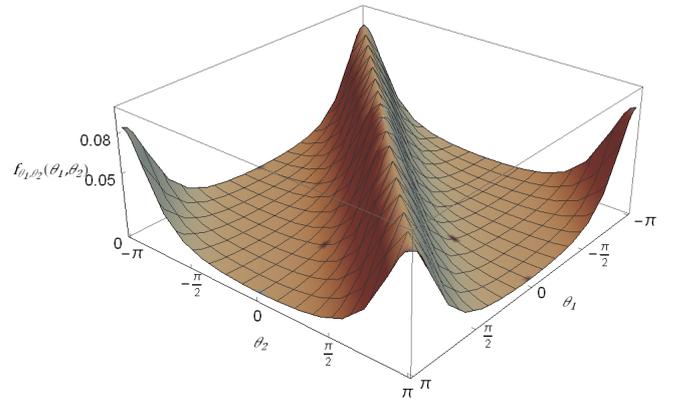
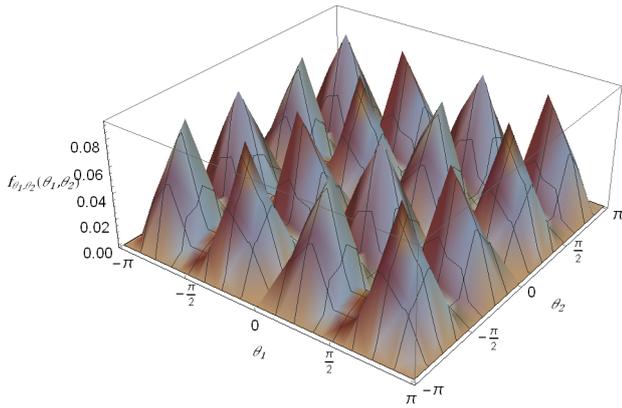
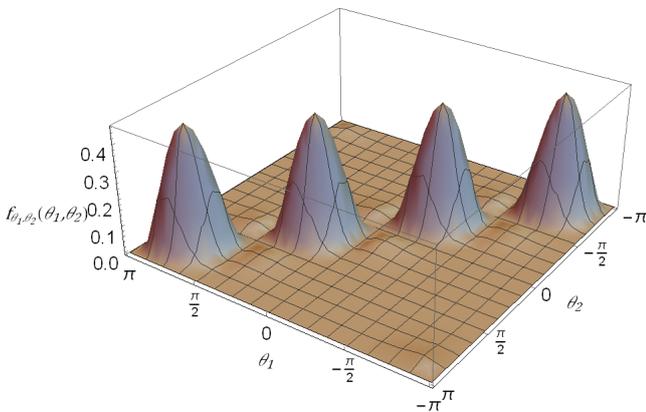


Fig. 5. FDP conjunta de fase para $m = 1$, $\rho_r = \frac{1}{2}$.

da FDP conjunta das componentes em fase (ou quadratura) e da FDP conjunta das fases o caso particular de $m = 1$ e correlação $1/2$. Para correlação nula a FDP das componentes em fase (ou quadratura) tem o formato de um sino de simetria circular enquanto que para a FDP da fase o formato é de um paralelepípedo de lados idênticos e iguais a 2π e altura $(1/2\pi)^2$. Estes resultados, de fato, são conhecidos da literatura [21], mas são mostrados aqui para contrastá-los com aqueles para $m \neq 1$. As Figuras 3 e 4 e as Figuras 6 e 7 mostram os gráficos para a situação em que $m \neq 1$. Em todos esses

Fig. 6. FDP conjunta de fase para $m = 3$, $\rho_r = 0$.Fig. 7. FDP conjunta de fase para $m = 3$, $\rho_r = \frac{1}{2}$.

gráficos é possível notar os efeitos da presença de *clusters* de multipercursos, observável através da segmentação planar da distribuição das variáveis. Em particular, para o caso da FDP conjunta das componentes em fase (ou quadratura), como na Figura 3, há picos simétricos ocorrendo nos quatro quadrantes no plano X_1, X_2 (Y_1, Y_2). Com o aumento da correlação, como na Figura 4, os picos dos quadrantes de sinais opostos tendem a desaparecer. Relativamente às fases, para a situação de decorrelação, como na Figura 6, há picos simétricos ocorrendo nos 16 segmentos planares de lados $\pi/2$. Com o aumento da correlação, os picos tendem a se concentrar na diagonal do plano Θ_1, Θ_2 .

Vale ressaltar que as características das componentes em fase (ou em quadratura) e também das fases de sinais compostos por *clusters* de multipercursos é inédito na literatura.

VII. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou um modelo bivariável de sinais complexos Nakagami- m correlacionados. Ressalte-se que a modelagem reportada neste artigo é inédita e abre um amplo campo de pesquisa para o estudo de desempenho de sistemas de comunicações sem fio em que envoltórias e fases correlacionadas devem ser levadas em consideração. Por exemplo, as seguintes perguntas surgem: (i) Qual o desempenho de sistemas de modulação em que a fase deve ser levada em consideração? (ii) Qual é a banda de coerência do canal

relativamente à fase? (iii) E o tempo? (iv) E a distância? Enfim, outras várias perguntas poderão ser respondidas explorando-se adequadamente o modelo proposto.

REFERÊNCIAS

- [1] M. D. Yacoub, J. E. V. Bautista, and L. G. R. Guedes, "On higher order statistics of the nakagami- m distribution," *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 3, pp. 790–794, May 1999.
- [2] M. D. Yacoub, "The α - μ distribution: A physical fading model for the stacy distribution," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [3] —, "The κ - μ distribution and the η - μ distribution," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [4] S. Cotton and W. Scanlon, "Higher-order statistics for κ - μ distribution," *Electronics Letters*, vol. 43, no. 22, pp. —, Oct 2007.
- [5] D. B. Costa, J. C. S. S. Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, "Second-order statistics of η - μ ," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 7, no. 3, pp. 819–824, March 2008.
- [6] J. C. S. S. Filho, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, "A simple accurate method for generating autocorrelated nakagami- m envelope sequences," *Communications Letters, IEEE*, vol. 11, no. 3, pp. 231–233, Mar. 2007.
- [7] J. R. Mendes, M. D. Yacoub, and U. S. Dias, "Power correlation coefficient of a very general fading model in maximal ratio combining," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 9, pp. 2472–2479, September 2010.
- [8] M. D. Yacoub, G. Fraidenraich, and J. C. S. Santos Filho, "Nakagami- m phase-envelope joint distribution," *Electronics Letters*, vol. 41, no. 5, pp. 259–261, Mar. 2005.
- [9] M. D. Yacoub, "Nakagami- m phase-envelope joint distribution: A new model," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 59, no. 3, pp. 1552–1557, Mar. 2010.
- [10] D. B. Costa and M. D. Yacoub, "The η - μ joint phase-envelope distribution," *Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE*, vol. 6, pp. 195–198, Apr. 2007.
- [11] U. S. Dias and M. D. Yacoub, "The κ - μ phase-envelope joint distribution," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 58, no. 1, pp. 40–45, Jan. 2010.
- [12] C. L. Selvati and U. S. Dias, "On the fading parameters characterization of the κ - μ distribution: Measurements and statistics," in *Communications (LATINCOM), 2011 IEEE Latin-American Conference on*, Oct 2011, pp. 1–5.
- [13] I. B. G. Porto, M. D. Yacoub, J. Santos Filho, S. L. Cotton, and W. G. Scanlon, "Nakagami- m phase model: Further results and validation," *Wireless Communications Letters, IEEE*, vol. 2, no. 5, pp. 523–526, Oct. 2013.
- [14] K. A. Hamdi, "Analysis of ofdm over nakagami- m fading with nonuniform phase distributions," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 11, no. 2, pp. 488–492, February 2012.
- [15] C. Zhong, S. Jin, T. Ratnarajah, and K. Wong, "On the capacity of non-uniform phase mimo nakagami- m fading channels," *Communications Letters, IEEE*, vol. 14, no. 6, pp. 536–538, June 2010.
- [16] Y. Ma and D. Zhang, "A method for simulating complex nakagami fading time series with nonuniform phase and prescribed autocorrelation characteristics," *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 1, pp. 29–35, Jan 2010.
- [17] G. T. F. Abreu, "On the moment-determinance and random mixture of nakagami- m variates," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 58, no. 9, pp. 2561–2575, September 2010.
- [18] J. C. S. S. Filho, B. V. Teixeira, M. D. Yacoub, and G. T. F. Abreu, "The rm^2 nakagami fading channel simulator," *Wireless Communications, IEEE Transactions on*, vol. 12, no. 5, pp. 2323–2333, May 2013.
- [19] L. Shi, Z. Guo, Y. Liu, and X. Li, "A novel simulation method for nakagami- m fading channel," in *General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS), 2014 XXXth URSI*, Aug 2014, pp. 1–4.
- [20] M. Nakagami, "The m -distribution, a general formula of intensity of rapid fading," in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation: Proceedings of a Symposium held at University of California, Los Angeles, June 18-20, 1958*, W. C. Hoffman, Ed. Pergamon Press, Jun. 1960, pp. 3–36.
- [21] W. C. Jakes and D. C. Cox, Eds., *Microwave Mobile Communications*. Wiley-IEEE Press, 1994.
- [22] S. L. Cotton, U. S. Dias, W. G. Scanlon, and M. D. Yacoub, "On the distribution of signal phase in body area networks," *Communications Letters, IEEE*, vol. 14, no. 8, pp. 728–730, August 2010.