

Parametrização Automática do Algoritmo l_0 -LMS com Relação à Razão Sinal-Ruído

Jéssica Bartholdy Sanson, Mariane Rembold Petraglia, Diego Barreto Haddad

Resumo—O l_0 -LMS é um algoritmo adaptativo recentemente proposto para promover a identificação de sistemas esparsos de modo mais eficiente. Sua estratégia consiste em alterar a função-custo do algoritmo padrão LMS, por meio da adição de um termo que penaliza soluções pouco esparsas. Comparado com seus precursores, este algoritmo se revelou bastante competitivo. Entretanto, a vantagem do algoritmo l_0 -LMS depende não raro de uma judiciosa escolha de seus parâmetros, de sorte a evitar um desempenho até mesmo inferior ao LMS tradicional. Este trabalho propõe, no contexto de identificação de sistemas, uma forma de ajuste automático (dependente da razão sinal-ruído) do parâmetro referente ao termo penalizador, de modo a garantir um desempenho vantajoso do algoritmo l_0 -LMS.

Palavras-Chave—Norma l_0 , *Least Mean Square* (LMS), Filtragem Adaptativa, Esparsidade.

Abstract—The l_0 -LMS is an adaptive algorithms recently proposed for the identification of sparse systems. Its strategy consists in modifying the cost function of the standard LMS algorithm by adding a term that penalizes non-sparse solutions. Compared to its precursors, this algorithm has proven very competitive. However, the advantages of the l_0 -LMS algorithm usually depend upon a judicious selection of its parameters, thereby avoiding performance evenworse than the traditional LMS. This paper proposes, in the system identification context, a procedure for automatic adjustment (dependent on the signal-to-noise ratio) of the parameter related to the penalizing term, in order to ensure an advantageous performance of the algorithm l_0 -LMS.

Keywords— l_0 Norm, Least Mean Square (LMS), Adaptive Filtering, Sparsity.

I. INTRODUÇÃO

A evolução das telecomunicações impulsiona o desenvolvimento de técnicas eficientes para processamento digital de sinais. Em particular, técnicas de filtragem adaptativa têm atraído um grande interesse, tanto em pesquisa teórica quanto aplicada. Devido ao seu bom desempenho, baixa complexidade computacional, fácil aplicação e alta robustez, o algoritmo LMS (do inglês *Least-Mean Squares*) tem sido amplamente utilizado em diversas aplicações, tais como identificação de sistemas, equalização de canais e cancelamento de eco.

Os sistemas desconhecidos a serem identificados costumam ser esparsos em diversos cenários físicos, como cancelamento de eco e canais de transmissão de TV digital. Em outras palavras, a maior parte dos coeficientes das respostas ao

impulso a identificar destes sistemas são nulos ou próximos de zero [1].

O algoritmo LMS, entretanto, não aproveita uma eventual concentração de energia do sistema a identificar em poucos coeficientes. Para contornar esta deficiência, algoritmos que recorrem à esparsidade para otimizar o desempenho do processo de identificação têm sido buscados. Um desses algoritmos é o l_0 -LMS (*Norm Constraint Least-Mean Squares*) [2], o qual incrementa a taxa de convergência com relação ao LMS. Como a maioria dos coeficientes de um sistema esparsos são iguais a zero, o desempenho global de identificação do l_0 -LMS pode superar o do LMS.

O algoritmo l_0 -LMS apresenta maior robustez contra o ruído, exige menos medidas para a reconstrução perfeita [3] e pode apresentar uma aceleração da taxa de convergência em sistemas esparsos. Tais vantagens, no entanto, somente ocorrem com determinadas escolhas de seus parâmetros [4].

A parametrização incorreta não apenas pode tornar o algoritmo menos eficiente, quanto também pode engendrar um desempenho inferior ao do algoritmo LMS tradicional. Daí a importância de adotarmos um procedimento de ajuste automático dos parâmetros pré-definidos (particularmente o parâmetro k , correspondente ao peso dado ao atrator dos coeficientes para zero na função custo), de sorte a sempre garantir soluções interessantes para o processo de identificação.

Este artigo realiza uma análise de escolha do parâmetro k em função da SNR (razão sinal-ruído) e da esparsidade de um sistema, de modo a garantir a competitividade do algoritmo l_0 -LMS perante o algoritmo padrão LMS.

II. ALGORITMO LMS

O algoritmo LMS é utilizado amplamente em identificação de sistemas. A derivação deste algoritmo fundamenta-se na regra de gradiente descendente aplicada na minimização do erro quadrático instantâneo, sendo o erro obtido pela diferença entre a resposta desejada (ou de referência) e a resposta atual do sistema adaptativo [5].

Os coeficientes desconhecidos do sistema a identificar e o sinal de entrada no instante n são neste artigo denotados, respectivamente, por $\mathbf{s} = [s_0, s_1, \dots, s_{L-1}]^T$ e $\mathbf{x}_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-L+1}]^T$, onde L é o comprimento do filtro adaptativo. Neste contexto, podemos expressar o sinal de referência como:

$$d_n = \mathbf{x}_n^T \mathbf{s} + \nu_n, \quad (1)$$

onde ν_n denota um ruído aditivo oriundo de erros de medição, de interferências ou mesmo de uma modelagem deficiente. Cumpre ao algoritmo adaptativo reduzir a discrepância entre

Jéssica Bartholdy Sanson e Mariane Rembold Petraglia pertencem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil. Diego Barreto Haddad é professor do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow (CEFET-RJ), campus Nova Iguaçu, Nova Iguaçu, Rio de Janeiro. E-mails: jessikbs.37@hotmail.com, mariane@pads.ufrj.br, diego@pads.ufrj.br.

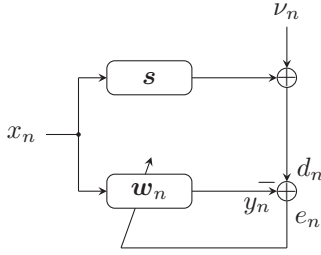


Fig. 1. Diagrama em bloco de um algoritmo de filtragem adaptativa aplicado à identificação de sistemas, com $y_n = \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n$.

a saída do sistema desconhecido e a do filtro adaptativo. Tal discrepância comumente é expressa em termos do erro e_n , dado por:

$$e_n = d_n - \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n, \quad (2)$$

onde o vetor $\mathbf{w}_n \triangleq [w_{0,n}, w_{1,n}, \dots, w_{L-1,n}]^T$ contém os L coeficientes do filtro adaptativo no instante n .

O algoritmo LMS atualiza os coeficientes adaptativos por meio do gradiente do erro quadrático instantâneo [6], de modo que sua atualização é dada por:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e_n \mathbf{x}_n, \quad (3)$$

onde μ é o passo (ou fator) de adaptação do algoritmo, cuja escolha deve contemplar o inevitável compromisso entre taxa de convergência e desempenho em regime permanente, bem como questões de estabilidade [7]. A estrutura de um algoritmo adaptativo supervisionado de identificação é mostrada na Fig. 1.

Como no LMS cada coeficiente em (3) é atualizado usando o mesmo passo de aprendizagem, não é levado em consideração o fato de que em sistemas esparsos a atração de coeficientes para zero pode ser interessante para atenuar flutuações desnecessárias em torno dos coeficientes nulos, o que permite incrementar o desempenho do sistema adaptativo de identificação.

III. SISTEMAS COM RESPOSTA AO IMPULSO ESPARSA

É sabido que a taxa de convergência dos algoritmos de filtragem adaptativa tende a se reduzir com o aumento do número de coeficientes a identificar. No entanto, em muitas aplicações, o sistema que está sendo modelado apresenta uma resposta ao impulso esparsa, de sorte que apenas um pequeno número de coeficientes da sua resposta impulsiva é considerado relevante. O apelo prático de tais aplicações tem impulsionado o desenvolvimento de muitos algoritmos de filtragem adaptativa destinados à exploração da natureza esparsa das funções de transferência envolvidas.

Conforme foi mencionado, se um algoritmo adaptativo pode identificar e explorar os coeficientes diferentes de zero do sistema a ser identificado, então é possível obter melhorias de desempenho e uma redução da complexidade computacional. Algoritmos clássicos como o LMS não aproveitam a esparsidade nos modelos do sistema, ignorando assim uma estrutura inerente ao problema capaz de ser explorada para aumentar a velocidade de convergência [8]. A fim de acelerar a taxa de convergência do processo de identificação, vários algoritmos

foram propostos recentemente que utilizam a característica dessa dispersão, resultando em uma convergência mais rápida. Uma popular medida de esparsidade de uma resposta ao impulso \mathbf{w} de comprimento L é dada por [9]:

$$\xi_{\mathbf{w}} = \frac{L}{L - \sqrt{L}} \left(1 - \frac{\|\mathbf{w}\|_1}{\sqrt{L}\|\mathbf{w}\|_2} \right), \quad (4)$$

onde $\|\mathbf{w}\|_p$ é a norma l_p do vetor \mathbf{w} . Cumpre observar que $0 \leq \xi_{\mathbf{w}} \leq 1$, e que $\xi_{\mathbf{w}} = 0$ quando todos os elementos de \mathbf{w} são iguais em amplitude (indicando uma resposta ao impulso maximamente dispersa) e $\xi_{\mathbf{w}} = 1$ quando apenas um dos elementos de \mathbf{w} é diferente de zero (referente a uma resposta ao impulso maximamente esparsa).

IV. ALGORITMO l_0 -LMS

Um novo algoritmo da família LMS com penalização de respostas não esparsas, abordado neste artigo, acelera a identificação de sistemas esparsos. Especificamente, inserindo o termo penalizador na função-custo padrão do LMS, a recursão do gradiente descendente vai acelerar a convergência dos coeficientes cujos valores são nulos ou quase nulos [10]. Importa incorporar tal penalização quando a função de transferência a identificar é esparsa. A função-custo do l_0 -LMS é definida como [2]:

$$\xi_n = e_n^2 + \gamma \|\mathbf{w}_n\|_0, \quad (5)$$

onde a norma l_0 reflete o número de coeficientes diferentes de zero em \mathbf{w}_n e $\gamma > 0$ é um fator que controla a magnitude do termo de penalização a aplicar. Tomando alguma aproximação $F_\beta(\mathbf{w}_n)$ da norma l_0 (capaz de torná-la diferenciável), temos que

$$\|\mathbf{w}_n\|_0 \approx F_\beta(\mathbf{w}_n), \quad (6)$$

e a equação de atualização do algoritmo l_0 -LMS é dada por:

$$w_{i,n+1} = w_{i,n} + \mu e_n x_{n-i} + \kappa f_\beta(w_{i,n}) \quad (7)$$

onde $\kappa = \mu\gamma$ e uma escolha popular [2] para $f_\beta(w_n)$ que aproxima com baixo custo computacional a derivada $-\frac{\partial F_\beta(\mathbf{w}_n)}{\partial w_n}$, é dada por:

$$f_\beta(x) = \begin{cases} 2\beta^2 x - 2\beta \operatorname{sgn}(x), & |x| \leq \frac{1}{\beta}; \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (8)$$

onde $\operatorname{sgn}(\cdot)$ é a função sinal definida como:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (9)$$

ou, equivalentemente:

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \beta^2 x + \beta, & \frac{-1}{\beta} \leq x < 0 \\ \beta^2 x - \beta, & 0 < x \leq \frac{1}{\beta} \\ 0, & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (10)$$

A Fig. 2 compara as versões exata e aproximada de $-\frac{\partial F_\beta(\mathbf{w}_n)}{\partial w_n}$.

¹Em termos rigorosos, a norma l_0 é uma pseudo-norma.

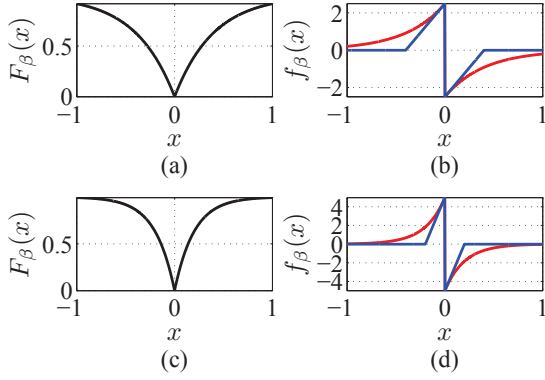


Fig. 2. Exemplos de $F_\beta(x)$ e a aproximação de baixo custo computacional $f_\beta(x)$ (em azul) da função $-\frac{\partial F_\beta(x)}{\partial x}$ (em vermelho). (a) $F_\beta(x)$ com $\beta = 2.5$; (b) função $f_\beta(x)$ e a exata $\beta = 2.5$; (c) $F_\beta(x)$ com $\beta = 5$; (d) função $f_\beta(x)$ e a exata com $\beta = 5$.

V. DESEMPENHO DO ALGORITMO l_0 -LMS COM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS k E β

À medida que os parâmetros k e β determinam o desempenho do algoritmo l_0 -LMS, a adoção de valores ótimos desses parâmetros reveste-se de grande importância. É sabido que valores elevados de β concorrem para implementar uma forte intensidade de atração para zero num intervalo estreito de valores (os quais, portanto, devem estar bem próximos de zero). Assim, a escolha de um valor alto para β pode implicar uma exploração deficiente da característica de esparsidade [1]. De todo modo, o impacto de β sobre a taxa de convergência é de difícil avaliação. Para fins práticos, como em [2], adotaremos $\beta = 5$.

A magnitude do parâmetro k reflete a importância da norma l_0 , ou a intensidade de atração para zero [11]. A escolha ideal do parâmetro k no algoritmo l_0 -LMS pode modificar profundamente o desempenho do algoritmo. Assim, um k elevado pode resultar em uma convergência mais rápida, implicando como desvantagem o aumento do desajuste em estado estacionário. Por conseguinte, o parâmetro k deve ser determinado tendo em vista o compromisso entre a velocidade de adaptação e a qualidade de adaptação em aplicações específicas [2].

Durante as simulações do algoritmo pode-se notar que os valores ótimos de k em um determinado sistema são muito dependentes da razão sinal-ruído. Portanto, ainda que o valor ótimo de k seja dependente da esparsidade da função de transferência a identificar, para respostas ao impulso suficientemente esparsas o impacto da SNR se revelou muito mais relevante.

Portanto, optamos por ajustar o valor de k em termos da SNR do sistema, de modo a prescindir de uma determinação arbitrária, por parte do usuário.

VI. ESTIMATIVA DA POTÊNCIA DE RUÍDO

O ruído tem, tipicamente, um efeito não estacionário no espectro do sinal. Então para possibilitar uma parametrização automática do algoritmo l_0 -LMS baseada na SNR, cumpre atualizar constantemente uma estimativa da razão sinal-ruído. Para isso podemos utilizar, para estimação da potência do

ruído, algoritmos como mínimos de rastreamento [12], de amostragem de média tempo-recursiva [13] ou mesmo a DFT no domínio do subespaço [14].

Pode-se também fazer essa estimação com o algoritmo NPVSS-NLMS (algoritmo não-paramétrico proposto em [15],[16]), o qual também foi desenvolvido num contexto de identificação de sistemas.

Outra solução interessante é a proposta em [17], onde um algoritmo estima a potência do ruído do sistema de filtragem adaptativa por meio da relação entre o erro quadrado médio (MSE) e o MSE em excesso (EMSE), cujas definições são fornecidas, respectivamente, pelas Eqs. (11) e (12).

$$\text{MSE} = \lim_{n \rightarrow \infty} E|e_n|^2, \quad (11)$$

$$\text{EMSE} = \lim_{n \rightarrow \infty} E|\hat{e}_n|^2, \quad (12)$$

onde \hat{e}_n é igual a

$$\hat{e}_n \triangleq \mathbf{x}_n^T (\mathbf{s} - \mathbf{w}_n). \quad (13)$$

Sob algumas condições bastante relaxadas, podemos assim escrever:

$$\text{MSE} = \text{EMSE} + \sigma_v^2, \quad (14)$$

onde σ_v^2 é a potência do ruído do sistema.

Como pode ser visto, na literatura atual há muitas formas de estimação da SNR do sistema que poderiam ser utilizadas de modo a se poder adotar a parametrização automática proposta do algoritmo l_0 -LMS.

VII. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Foi utilizado nas simulações a seguir o modelo 4 de canal, segundo as recomendações da *International Telecommunication Union* (ITU) [18], com ruído aditivo gaussiano branco, com resposta ao impulso mostrada na Fig. 3 e $\beta = 5$, para demonstrar a variação do desempenho do algoritmo l_0 -LMS.

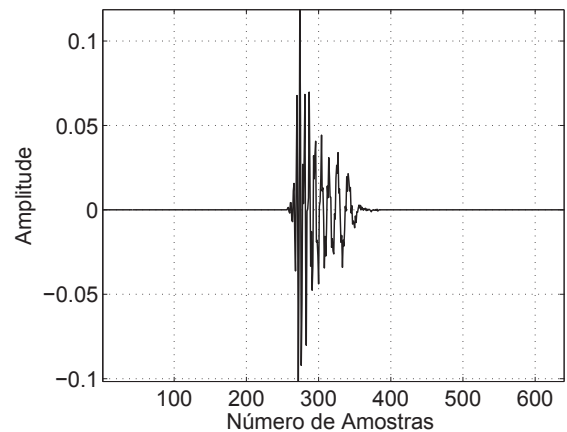


Fig. 3. Resposta ao impulso da função de transferência de comprimento $L = 640$ utilizada nas simulações.

As Figs. 4 e 5 apresentam a evolução do desvio médio quadrático dos coeficientes adaptativos em relação aos reais (denominado MSD - *Mean Squared Deviation*, definido na Eq.

15) dos algoritmos LMS e l_0 -LMS para valores de SNR iguais a 15 dB e 28 dB, respectivamente, mantendo o parâmetro k fixo e igual a 10^{-6} . Comparando os resultados dessas figuras, pode-se verificar que o desempenho do algoritmo l_0 -LMS com $k = 10^{-6}$ foi superior ao do LMS apenas para SNR igual a 15 dB.

$$\text{MSD} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L (d_n - \mathbf{x}_n^T \mathbf{w}_n)^2, \quad (15)$$

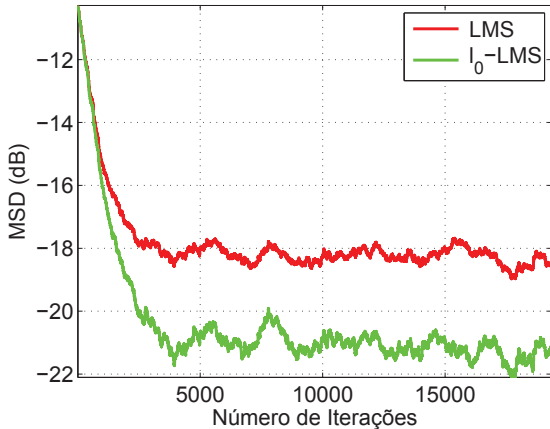


Fig. 4. Desempenho do l_0 -LMS com $k = 10^{-6}$, para SNR de 15 dB, comparado ao LMS.

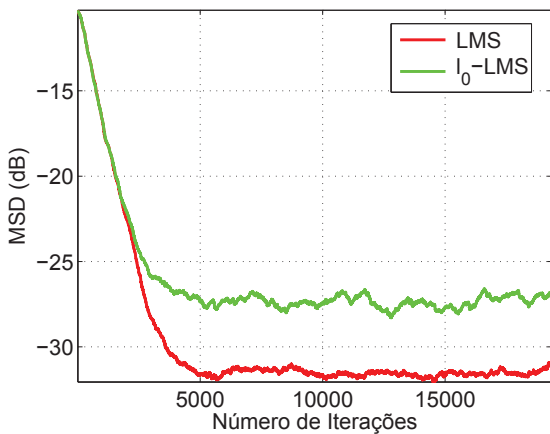


Fig. 5. Desempenho do l_0 -LMS com $k = 10^{-6}$, para SNR de 28 dB, comparado ao LMS.

Para encontrar uma regra de ajuste automático do parâmetro k , efetuou-se uma análise da variação do seu valor ótimo em função da SNR da configuração. A Fig. 6 mostra os valores do parâmetro k para os quais o algoritmo l_0 -LMS resultou no menor MSD em regime permanente para SNR variando de 5 dB a 35 dB, com passo de 5 dB. Em seguida, obteve-se uma função que permite selecionar o parâmetro k para uma determinada SNR, através da interpolação da sequência de valores ótimos da Fig. 6. A interpolação foi realizada por meio de duas funções: um polinômio de segundo grau para SNR ≤ 20 dB e uma do tipo *Power* (do tipo $y = a + b|x - c|^d$,

onde a, b, c e d , são as variáveis a se determinar) para SNR > 20 dB.

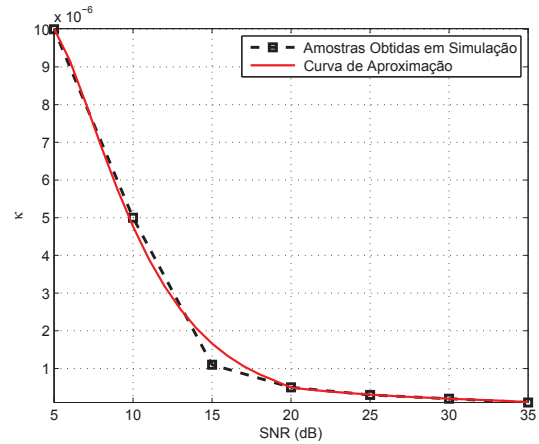


Fig. 6. Curva de amostras e curva aproximada de valores ótimos de k para valores de SNR entre 5dB e 35dB.

Com a função resultante, conseguiu-se chegar a um k adaptável em função da SNR do sistema, de modo a promover um bom resultado em regime permanente do algoritmo l_0 -LMS, sem exigir uma escolha às cegas por parte do usuário do algoritmo. A Fig. 6 mostra em vermelho a curva de valores de k em relação ao SNR obtida com o procedimento.

Utilizado-se esse procedimento para selecionar o valor de k , verifica-se na Fig. 7, que o algoritmo l_0 -LMS obteve um bom desempenho (superior ao LMS) para SNR de 28 dB. Efetuando-se diversas simulações (empregando-se todos

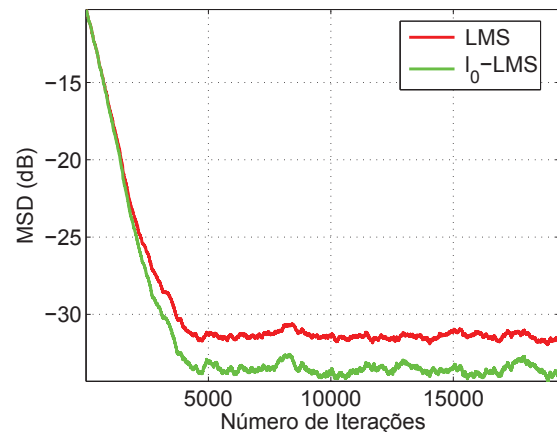


Fig. 7. Desempenho do l_0 -LMS com $k = 2.3686 \times 10^{-7}$ obtido pelo padrão proposto para SNR de 28 dB, comparado ao LMS.

os 8 modelos de canais presentes em [18] e com canais com diversos graus de esparsidade), obtivemos sempre bons resultados para valores de ξ_w (dado em (4)) superiores a 0,75. Desse modo, nossa estratégia de ajuste é adequada para respostas ao impulso esparsas, justamente aquelas para as quais o algoritmo l_0 -LMS foi projetado. Abaixo desse valor, observa-se uma alteração do desempenho para os valores de k encontrados, indicando a necessidade de uma variação dos mesmos.

Para fatores de esparsidade ξ_w menores do que 0.75, obtivemos, empiricamente, a seguinte função, que permite a seleção do parâmetro k a partir dos valores de ξ_w e da SNR estimados:

$$k_\xi = \frac{0,4kSNR}{\max(0,05, \hat{\xi}_w)}, \quad (16)$$

onde $\hat{\xi}_w = 0,75 - \xi_w$ e $\max(\cdot, \cdot)$ fornece o maior de dois valores.

Para demonstrar o bom desempenho obtido com a função proposta a Fig. 8 apresenta o MSD em regime permanente do algoritmo l_0 -LMS, com valores de SNR iguais a = 10 dB e = 15 dB, com o valor do parâmetro k obtido pela Eq. (16) e pela função da Fig. 6, variando-se a esparsidade do sistema desconhecido (através da inclusão de amostras nulas na sua resposta ao impulso). Cumpre observar que os resultados deste trabalho foram obtidos utilizando ruído branco gaussiano como sinal de entrada, sendo que um estudo do desempenho do ajuste proposto para sinais coloridos ainda merece maior atenção.

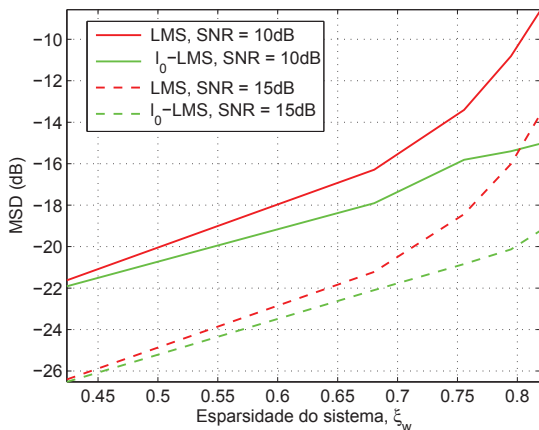


Fig. 8. Desempenho do l_0 -LMS com k obtido pelo padrão proposto versus esparsidade (ξ_w) para uma SNR de 10 dB e 15 dB, comparado ao LMS.

VIII. CONCLUSÕES

O algoritmo l_0 -LMS, proposto para melhorar o desempenho em identificação de sistemas esparsos, pode apresentar um funcionamento aquém do desejável, a depender do valor escolhido do parâmetro κ (responsável por controlar a atração dos coeficientes para zero). Este artigo propõe uma forma de ajuste automático do valor de κ para respostas esparsas, de modo que o desempenho do algoritmo l_0 -LMS se torne vantajoso, quando o sinal de entrada é um ruído branco e gaussiano.

Os resultados numéricos de simulação indicam que o κ encontrado pela função empírica proposta obteve um excelente desempenho para sistemas com fatores de esparsidade ξ_w maiores do que 0.75. Para sistemas com $\xi_w < 0,75$, verificou-se uma necessidade da alteração do valor de κ encontrado conforme o valor de ξ_w , obtendo-se uma nova função que relaciona os mesmos. Ao final, propôs-se um novo modo de

ajuste, capaz de contemplar variações da SNR e do fator de esparsidade ξ_w .

Essa melhoria pode evidentemente aumentar o uso do algoritmo l_0 -LMS, uma vez que não seria mais necessário arbitrar um valor de κ para o sistema e presumir que o mesmo apresente um bom resultado. Os trabalhos futuros poderão incluir um estudo de como tornar esse procedimento viável, através de uma função dos parâmetros de entrada do sistema, para qualquer sistema dado, e não mais utilizando um ajuste de curvas, conseguindo-se chegar automaticamente ao κ ótimo.

REFERÊNCIAS

- [1] G. Gui, A. Mehdodniya e F. Adachi, "Sparse LMS/F Algorithms With Application to Adaptive System Identification," *Wireless Communications and Mobile Computing*, Setembro 2013.
- [2] Y. Gu, J. Jin, e S. Mei, " l_0 Norm Constraint LMS Algorithm for Sparse System Identification," *IEEE Signal Processing Letters*, v. 16, no. 9, pp. 774–777, Setembro 2009.
- [3] J. Jin, Y. Gu, and S. Mei, "A stochastic gradient approach on compressive sensing signal reconstruction based on adaptive filtering framework," *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 4, no. 2, pp. 409–420, Abril 2010.
- [4] G. Su, J. Jin, Y. Gu, and J. Wang, "Performance Analysis of l_0 Norm Constraint Least Mean Square Algorithm," *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 60, no. 5, pp. 2223–2235, Maio 2012.
- [5] J.R. Zeidler, "Performance Analysis of LMS Adaptive Prediction Filters," *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, vol. 78, no. 2, pp. 1781–1806, Dezembro 1990.
- [6] F.C. RIBEIRO, *Arranjos de antenas adaptativas em sistemas OFDMA: Um comparativo entre as técnicas de filtragem pré e pós-FFT*. Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil, Dezembro 2009.
- [7] S. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Upper Saddle River, 4th ed., N.J: Prentice, 2002.
- [8] R. C. de Lamare e R. Sampaio-Neto, "Sparsity-Aware Adaptive Algorithms Based on Alternating Optimization and Shrinkage," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 21, no. 2, pp. 225–229, Fevereiro 2014.
- [9] D. B. Haddad e M. R. Petraglia, "Transient and steady-state MSE analysis of the IMPNLMS algorithm," *Digital Signal Processing*, v. 33, pp. 50–59, 2014.
- [10] G. Su, J. Jin, and Y. Gu, "Performance Analysis of l_0 -LMS With Gaussian Input Signal," *2010 IEEE 10th International Conference on Signal Processing (ICSP)*, pp. 235–238, Março 2010.
- [11] G. Gui and F. Adachi, "Improved Least Mean Square Algorithm With Application to Adaptive Sparse Channel Estimation," *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*, Agosto 2013.
- [12] R. Martin, "Noise Power Spectral Density Estimation Based on Optimal Smoothing and Minimum Statistics," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 9, no. 5, pp. 504–512, Julho 2001.
- [13] I. Cohen, "Noise Spectrum Estimation in Adverse Environments: Improved Minima Controlled Recursive Averaging," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 11, no.5, pp. 466–475, Setembro 2003.
- [14] R. C. Hendriks, J. Jensen, e R. Heusdens, "Noise Tracking Using OFT Domain Subspace Decompositions," *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process.*, vol. 16, no. 3, pp. 541–553, Março 2008.
- [15] R. M. Udrea, C. Paleologu, J. Benest e S. Ciochina, "Estimation of the Noise Power in the NPVSS-NLMS Algorithm," *Electronics and 2010 9th International Symposium on Telecommunications (ISETC)*, pp. 385–388, Novembro 2010.
- [16] J. Benesty, H. Rey, L. Rey Vega, and S. Tressens, "A nonparametric VSS NLMS algorithm," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 13, pp. 581–584, Outubro 2006.
- [17] H. Cho, S. J. Ban e S. W. Kim, "Estimation of the Power of the System Noise for Adaptive Filter Algorithms," *ICROS-SICE International Joint Conference 2009*, pp. 2514–2518, Agosto 2009.
- [18] *ITU-T Recommendation G.168*. International Telecommunication Union, 2004.