

Distribuição α - μ / γ generalizada: investigação experimental

Gabriel Rocha Ferreira, Sérgio Pinho Piretti e Ugo Silva Dias

Resumo— Este trabalho apresenta investigações experimentais para testar o uso da distribuição composta α - μ / γ generalizada em ambientes práticos. Dados coletados em campo são confrontados com estatísticas de primeira ordem e excelentes resultados são obtidos. Notadamente, a distribuição α - μ / γ generalizada apresenta excelentes ajustes aos cenários medidos.

Palavras-Chave— Investigação experimental, modelos de desvanecimento, distribuição α - μ / γ generalizada.

Abstract— This article present experimental investigations to test the usage of the α - μ / γ generalized distribution on practical environments. Data were collected on the field are checked with first order statistics and very good results are achieved. Notably, the distribution α - μ / γ generalized show great results on the measured scenarios.

Keywords— Experimental investigation, fading models, α - μ / γ generalized distribution.

I. INTRODUÇÃO

Diversas distribuições estão disponíveis na literatura para descrever o comportamento da propagação de sinais de rádio. A função LogNormal [1] é uma das utilizadas para distribuições de longo-prazo, isto é, o desvanecimento do sinal que acontece ao longo de sua propagação. Apesar de ocorrer em todo o trajeto, seus efeitos se tornam mais claros conforme a distância aumenta. No entanto, no curto prazo, há muitas outras distribuições conhecidas. Este é o foco do presente trabalho. Cada distribuição possui sua particularidade e cenário de aplicação ideal. São exemplos: Rayleigh [2], Rice [3], Nakagami-m [4] e Weibull [5], [6] e [7]. Tais distribuições têm aplicação em cenários de pequenas distâncias, em que são considerados diversos fatores, tais como a reflexão, a absorção, a difração e a refração do sinal.

A distribuição de Rayleigh [2] descreve a natureza estatística variável no tempo da envoltória recebida de um sinal de atenuação uniforme ou a envoltória de um componente de multipercurso individual. Ou seja, é aplicada em casos onde não há linha de visada.

Uma das generalizações da distribuição de Rayleigh é a de Rice [3]. É utilizada para componentes de sinal estacionário dominante (sem atenuação) e com linha de visada. Isto é, abrange os mesmo casos da anterior e acrescentam-se os casos em que há visada direta. O parâmetro K representa a razão entre a potência da componente dominante pela potência total das componentes de multipercurso, sendo que K e Ω podem ser lidos como parâmetros de forma e escala, respectivamente.

Gabriel, Sérgio e Ugo, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Brasília, Brasília, Brasil, E-mails: gabrielferreira@ieec.org, sergiopiretti@gmail.com, ugodias@ieec.org

Outra generalização da distribuição de Rice é a de Nakagami-m [4], desenvolvida para o uso em grandes centros urbanos, onde não há linha de visada. Difere de Rice por considerar que componentes de multipercurso podem ter diferentes intensidades. Quanto mais componentes fortes existirem, maior é o parâmetro m .

Mais uma generalização das distribuições de multipercurso, a κ - μ [8] possui dois parâmetros a serem ajustados de acordo com cada cenário. Leva em conta que um sinal é composto por *clusters* de ondas de multipercurso sendo propagadas em um ambiente homogêneo. Em cada cluster as fases das ondas são aleatórias, têm mesma potência e atrasos de propagação similares, porém, cada cluster têm uma componente dominante de potência arbitrária e diferentes atrasos de propagação. O parâmetro κ representa a razão entre a potência total das componentes dominantes pela potência total das ondas espalhadas. Já o parâmetro μ relaciona-se à quantidade de *clusters* de multipercurso.

A distribuição α - μ [9] também representa uma distribuição de multipercurso. O seu uso é adequado em sinais compostos de *clusters* propagando-se em meios não-homogêneos. Os *clusters* seguem a mesma definição da distribuição κ - μ , com a diferença na existência da componente dominante. A envoltória resultante desta distribuição é obtida de uma função não linear do somatório dos módulos das componentes de multipercurso, sendo a não linearidade representada pelo parâmetro de potência $\alpha > 0$. Portanto, o sinal resultante não é obtido pela simples soma dos módulos das componentes espalhadas, mas sim dos módulos elevados a uma potência.

Durante o estudo, não foram encontradas investigações e distribuições de desvanecimento que melhor se adaptassem aos cenários em que as medidas foram realizadas. Dessa forma, foi feita uma análise utilizando diferentes métodos matemáticos, resultando em uma fórmula fechada de distribuição, que possibilita o ajuste de até três parâmetros. Os novos resultados estatísticos são comparados com as medidas de campo, evidenciando um estudo mais completo e preciso da situação proposta.

II. MODELO MATEMÁTICO

Com o fim de se obter uma nova equação matemática com múltiplos parâmetros de ajustes para melhor se adaptar aos casos reais, foram combinadas duas distribuições conhecidas. A distribuição α - μ e a distribuição γ generalizada de três parâmetros.

A. Distribuição α - μ

$$f_{\alpha-\mu}(r) = \frac{\alpha\mu^\mu r^{\alpha\mu-1}}{r_b^{\alpha\mu}\Gamma(\mu)} \exp\left(-\mu\frac{r^\alpha}{r_b^\alpha}\right), \quad (1)$$

em que $r_b = \sqrt[\alpha]{E(R^\alpha)}$ e $E(\cdot)$ é a Função Esperança.

Nota-se que a distribuição α - μ contém as distribuições Nakagami-m ($\alpha = 2$), Weibull ($\mu = 1$) e Rayleigh ($\alpha = 2, \mu = 1$).

B. Distribuição gamma generalizada de 3 parâmetros [10].

$$f_{\text{gamma}}(r) = \frac{\gamma\beta^{\lambda/\gamma}r^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda/\gamma)} \exp(-\beta r^\gamma). \quad (2)$$

Note que a distribuição é um caso especial da distribuição gamma generalizada quando

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma, \\ \mu &= \lambda/\gamma, \\ r_b &= \left(\frac{\lambda}{\gamma\beta}\right)^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (3)$$

Para o caso limite, em que a distribuição gamma se reduz à lognormal, $k \rightarrow \infty$ com os parâmetros

$$\begin{aligned} \lambda &= k^{1/2}/\sigma, \\ \gamma &= k^{-1/2}/\sigma, \\ \beta &= k \exp\left(-\mu_L k^{-1/2}/\sigma\right). \end{aligned} \quad (4)$$

A distribuição lognormal obtida tem parâmetro de locação μ_L e parâmetro de escala σ . Comparando a distribuição α - μ com o caso limite lognormal, quando $k \rightarrow \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha &= k^{-1/2}/\sigma, \\ \mu &= k, \\ r_b &= \exp(\mu_L \sigma/2). \end{aligned} \quad (5)$$

Assim, a distribuição combinada é

$$f(r) = \frac{\alpha\mu^\mu r^{\alpha\mu-1} \gamma\beta^{\lambda/\gamma}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda/\gamma)} \int_0^\infty y^{\lambda-\mu-1} \exp\left(-\mu\frac{r^\alpha}{y} - \beta y^\gamma\right) dy. \quad (6)$$

Ou ainda, utilizando-se da função Fox H [11] para substituir a integral,

$$f(r) = \frac{\alpha\mu^\mu r^{\alpha\mu-1} \beta^{\lambda/\gamma}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda/\gamma)} H_{0,2}^{2,0} \left[r^\alpha \mu \beta^{1/\gamma} \middle| (0, 1); \left(\frac{\lambda-\mu}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right) \right]. \quad (7)$$

Para a função acumulada, tem-se

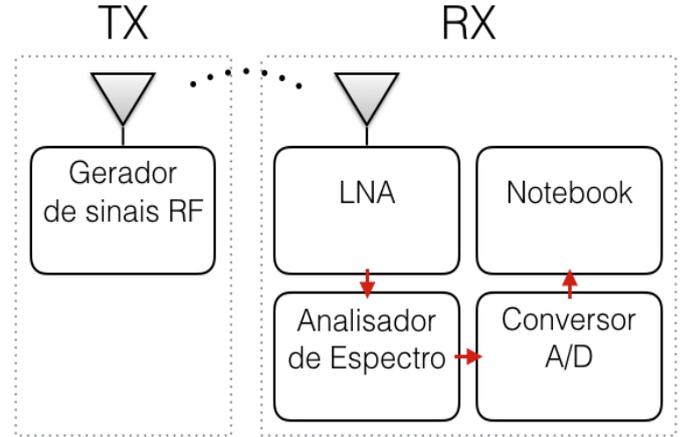


Fig. 1. Esquema de montagem dos equipamentos de medição de campo.

$$F(r) = \frac{\alpha\mu^\mu r^{\alpha\mu} \beta^{\lambda/\gamma}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda/\gamma)} H_{1,3}^{2,1} \left[r^\alpha \mu \beta^{1/\gamma} \middle| (1-\alpha\mu, \alpha); (0, 1); \left(\frac{\lambda-\mu}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right); (-\alpha\mu, \alpha) \right]. \quad (8)$$

No caso em que há normalização, considere que a pdf de R seja $f(r)$, assim a normalização $R\beta^{1/\gamma\alpha}$ fornece

$$f_N(\rho) = \frac{\alpha\mu^\mu \rho^{\alpha\mu-1} \gamma}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda/\gamma)} \int_0^\infty x^{\lambda-\mu-1} \exp\left(-\mu\frac{\rho^\alpha}{x} - x^\gamma\right) dx, \quad (9)$$

ou ainda

$$f_N(\rho) = \frac{\alpha\mu^\mu \rho^{\alpha\mu-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda/\gamma)} H_{0,2}^{2,0} \left[\rho^\alpha \mu \middle| (0, 1); \left(\frac{\lambda-\mu}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right) \right]. \quad (10)$$

Para a função acumulada tem-se

$$F_N(\rho) = \frac{\alpha\mu^\mu \rho^{\alpha\mu}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\lambda/\gamma)} H_{1,3}^{2,1} \left[\rho^\alpha \mu \middle| (0, 1); \left(\frac{\lambda-\mu}{\gamma}, \frac{1}{\gamma}\right); (-\alpha\mu, \alpha) \right]. \quad (11)$$

III. MEDIDAS DE CAMPO

As medidas experimentais foram feitas na Universidade de Brasília. Uma antena foi posicionada no topo do prédio SG11, transmitindo na frequência de 700 MHz, e um receptor, montado em um automóvel, simulando um terminal móvel, que recebia o sinal e armazenava os dados para posterior análise. O esquema da montagem é representado na Figura 1.

No topo do edifício, mostrado na Figura 2, estava o sistema de transmissão, composto por uma antena e um gerador de onda contínua. A antena foi colocada sobre um tripé para



Fig. 2. Trajeto do receptor e prédio onde estava o transmissor.

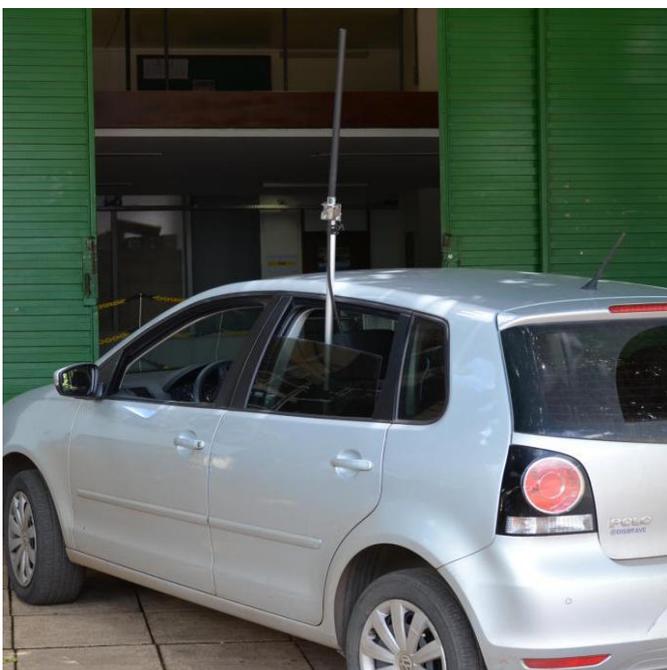


Fig. 3. Receptor instalado no automóvel.

simular uma situação real, em que uma antena fica a 09 metros do chão. A antena era do tipo omnidirecional e foi projetada para operar em 700 Mhz.

Já no automóvel estava montado o sistema de recepção a 1,5 metros do chão, como mostrado na Figura 3. Tal sistema tinha como ponto inicial um inversor de tensão, que transformava os 12V DC da bateria veicular em 110V AC para que fossem ligados os equipamentos. No inversor estavam ligados um analisador de espectro e um notebook, que armazenava todos os dados coletados. A antena de recepção, colocada sobre o carro, era conectada a um amplificador de baixo ruído, LNA, de saída analógica. Sua alimentação era feita diretamente pela bateria veicular. O sinal amplificado era então conectado a um conversor de sinal analógico/digital. Finalmente, o conversor era conectado ao notebook, responsável pelo armazenamento dos dados.

As medidas foram realizadas mantendo-se o veículo em uma

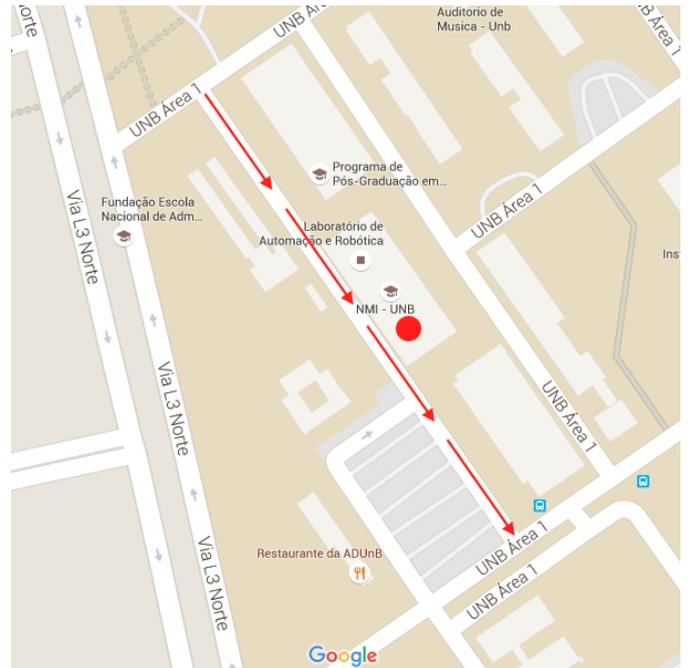


Fig. 4. Mapa da primeira medida. Frequência de 700 MHz.

velocidade constante durante todo o trajeto. Foi utilizado um dispositivo de posicionamento global, *GPS*, para controlar a velocidade do carro. Era de extrema importância manter a velocidade constante para que o sistema coletasse as amostras uniformemente, sempre a uma mesma relação de amostras por distância e amostras por tempo. As amostras eram exibidas em um gráfico em tempo real no analisador de espectro e gravadas no computador.

A primeira medida, realizada no campus da UnB e representada pela Figura 4, foi feita no trajeto indicado pelas setas no mapa. A antena é representada pelo círculo. A velocidade do veículo era de 18 km/h e a frequência de transmissão de 700 MHz. Tal cenário representava uma estação móvel em um ambiente externo, *outdoor*.

Já para a frequência de 1800 MHz este trabalho contou com a colaboração de colegas da Unicamp (Universidade de Campinas), que gentilmente cederam suas medidas de campo realizadas em 1800 MHz para que a nova distribuição fosse testada. Ainda, para aumentar a complexidade do teste e validação da distribuição, tal medida foi feita em um cenário interno de um edifício, ou seja, foi uma medida *indoor*. Foram montados componentes análogos aos da UnB, porém, em vez de se utilizar um automóvel, foi utilizado um carrinho de empurrar para movimentar o receptor. A Figura 5 apresenta no mapa a disposição dos equipamentos. A antena transmissora encontrava-se no topo da Faculdade de Engenharia Elétrica, círculo do mapa, e o receptor teve seu deslocamento todo feito no corredor do DEMIC (Departamento de Eletrônica e Microeletrônica), indicado pela seta.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após coletados os dados, gráficos foram gerados com o fim de ilustrar e facilitar a análise. Dentre as diversas medidas

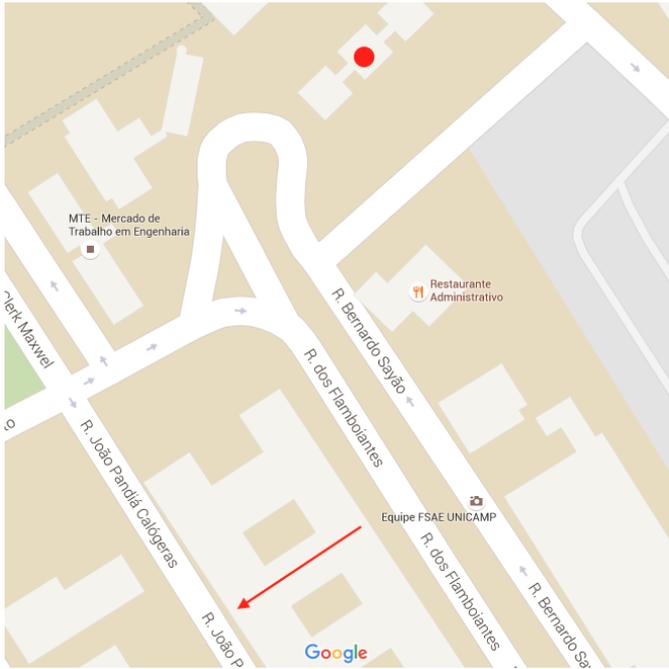


Fig. 5. Mapa da medida cedida pela Unicamp. Frequência de 1800 MHz.

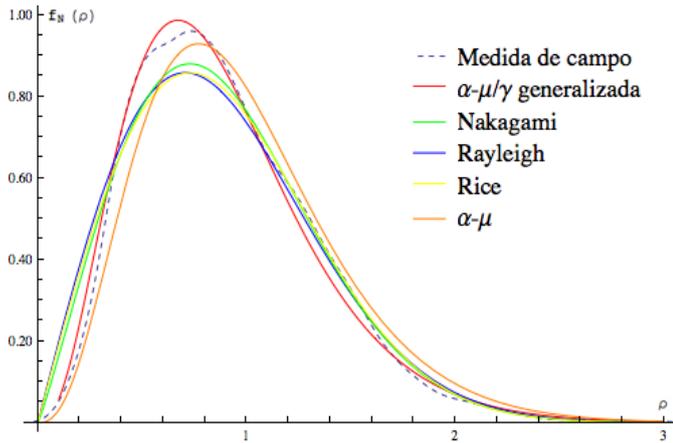


Fig. 6. PDF dos dados obtidos na frequência de 700 MHz.

feitas, este trabalho apresenta apenas duas, suficientes para ilustrar o comportamento geral dos dados colhidos.

Primeiramente, em 700 MHz, foi analisada a Função Densidade de Probabilidade, *PDF*, ilustrada na Figura 6, e a Função Distribuição Acumulada, *CDF*, presente na Figura 7. O parâmetro *m* de Nakagami foi estimado em 1.06647. *k* de Rice teve o valor 0.332716. α igual a 1.2328 e μ igual a 2.94656 para a distribuição α - μ . Por fim, no uso da nova distribuição foram utilizados os mesmos parâmetros da α - μ e σ igual à 0.1.

Para as medidas feitas em ambiente *indoor* e em 1800 MHz, o valor de *m* de Nakagami foi de 1.06647. Para Rice, o parâmetro *k* foi de 0.332716. Em α - μ tivemos os valores 1.2328 e 2.94656 respectivamente. Já na nova proposta, os valores foram ajustados em relação à estimativa para se tornarem mais próximos da medida. O parâmetro α teve o valor de 1.1355, μ de 2.7969 e σ de 0.05. O gráfico da PDF

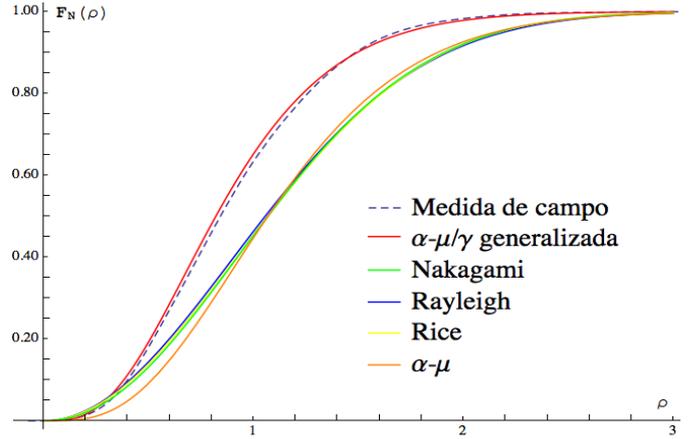


Fig. 7. CDF dos dados obtidos na frequência de 700 MHz.

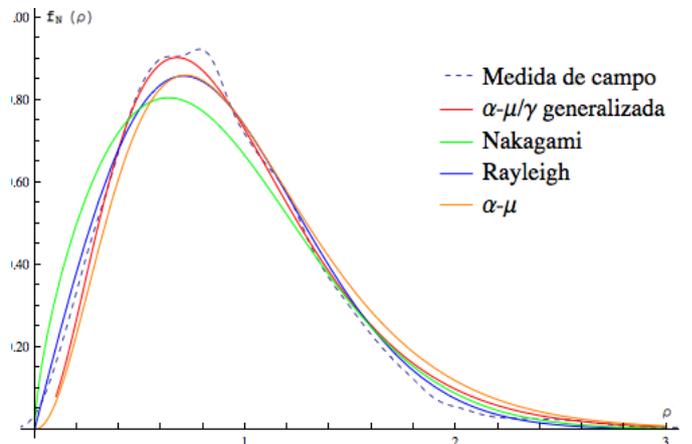


Fig. 8. PDF dos dados obtidos na frequência de 1800 MHz.

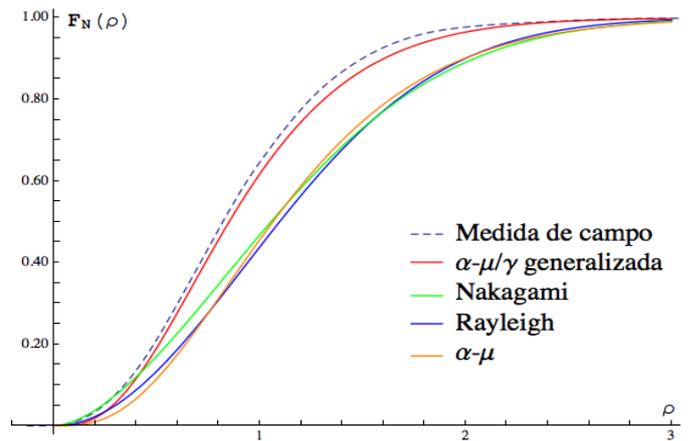


Fig. 9. CDF dos dados obtidos na frequência de 1800 MHz.

é mostrado na Figura 8 e o da CDF na Figura 9.

Em ambos os casos, o desvanecimento rápido foi separado do desvanecimento de longo prazo utilizando o método da média pela janela móvel [12], com tamanho ótimo de janela de 45λ a 60λ . Ou seja, do sinal medido foi calculado o desvanecimento de longo prazo utilizando o método descrito e, em seguida, foi subtraído do sinal medido o sinal calculado, resultando no desvanecimento de curto prazo.

$$\epsilon_{PDF} = E[f_{exp} - f_{dist}] \quad (12)$$

em que f_{exp} é a medida de campo e f_{dist} representa a função α - μ / γ .

Analisado-se os dados obtidos e comparando os erros por intermédio da fórmula 12, é possível fazer duas afirmações. A primeira é que os modelos mais famosos e mais usados atualmente não são precisos na estimativa do desvanecimento de sinais em 700 MHz e 1800 MHz em ambientes urbanos, *indoor* e *outdoor* (com obstáculos e árvores no percurso). A segunda é a vantagem de se utilizar a distribuição proposta no trabalho. Em 700 MHz os erros na PDF foram de 4.10894%, 3.27908%, 3.27908% e 3.89815% para Rayleigh, Nakagami, Rice e α - μ respectivamente. Já em 1800 MHz os erros na PDF foram de 2.77038%, 2.77038%, 4.45344% para Rayleigh, Nakagami e α - μ respectivamente. Usando-se a distribuição α - μ / γ generalizada em 700 MHz e 1800 MHz, o erro foi 0.784558% e 0.56507% respectivamente, ou seja, o modelo proposto no trabalho é consideravelmente mais preciso que as distribuições normalmente descritas na literatura.

V. CONCLUSÕES

Concluídas a coleta e a análise dos dados, é possível afirmar que a nova equação representa um ganho significativo no cálculo do desvanecimento de sinais. Ela traz um novo grau de liberdade, um novo parâmetro de ajuste, a variável σ , capaz de reduzir consideravelmente o erro, deixando a estimativa mais próxima da realidade. Tal aproximação com a realidade é útil em múltiplas aplicações, inclusive comerciais, pois pode, por exemplo, auxiliar uma operadora a planejar a sua área de cobertura com maior exatidão, diminuindo custos ocasionados por erros e posteriores correções. O trabalho foi conduzido em ambiente urbano e foram respeitadas condições reais de uso das tecnologias mais populares, foram respeitados os critérios de altura de antena e de velocidade de deslocamento da estação móvel. As frequências de 700 MHz e 1800 MHz são frequências atualmente muito estudadas, pois nelas estarão presentes as próximas tecnologias de comunicação móvel, dentre elas o 4G (*LTE*) para celular.

AGRADECIMENTOS

Todo o trabalho apresentado não seria possível sem o apoio de amigos e colegas. Alunos de graduação e mestrado da UnB que auxiliaram na coleta das medidas e discussão de resultados: Kim, Wanessa, Raquel e Hudson.

REFERÊNCIAS

- [1] G. L. Turin, *Introduction to spread-spectrum antimultipath techniques and their application to urban digital radio*, Proc. IEEE, vol 68, no 3, pp 328-353, Março 1980.
- [2] R. H. Clarke, *A statistical theory of mobile-radio reception*, Bell Syst. Tech. J., vol. 47, pp. 957,1000, Jul.Aug. 1968.
- [3] S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, Bell Syst. Tech. J., vol. 23, no. 3, pp. 282,332, Jul. 1944.
- [4] M. Nakagami, *The m-Distribution - A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading*, Statistical Methods in Radio Wave Propagation, W. C. Hoffman, Ed. Elmsford, pp. 3, 36, NY: Pergamon, 1960.
- [5] C.-X. Wang, N. Youssed e M. Patzold, *Level-crossing rate and average duration of fades of deterministic simulation models for Nakagami-Hoyt fading channels*, Proc. 5th Int. Symp. Wireless Pers. Multimedia Com, Outubro 2002.
- [6] J. D. Parsons, *The Mobile Radio Channel*, 2nd ed, vol. 1, Chichester, U.K, Wiley, 2000.
- [7] S. Stein, *Fading channel issues in system engineering*, IEEE J. Sel. Areas Commun, vol SAC-5, no. 2, pp. 68,69, Fevereiro, 1987.
- [8] S. L. Cotton e W. G. Scanlon, *High-order statistics for kappa-mu distribution*, IEEE Electron Lett, vol 43, no 22. Outubro, 2007.
- [9] M. D. Yacoub, *The kappa-mu Distribution*. IEEE Communications Letters, vol. 14, no 8, pp 728-730, Agosto, 2010.
- [10] Stacy, E. W., *A Generalization of the Gamma Distribution*. Annals of Mathematical Statistics, 1962.
- [11] Weisstein, Eric W., *Fox H-Function*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/FoxH-Function.html>
- [12] Weisstein, Eric W. *Moving Average*, From MathWorld A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/MovingAverage.html>