

Um Sistema de Comunicação Baseado na Topologia de Atratores Caóticos

Carlos E. C. Souza, Daniel P. B. Chaves e Cecilio Pimentel

Resumo—Este trabalho introduz uma metodologia para o projeto de sistemas de comunicações baseados em caos que faz uso da topologia de atratores caóticos. As propriedades topológicas do sistema são investigadas e sua evolução dinâmica é associada a um diagrama de estados. A sequência de informação binária é modulada em uma sequência de formas de onda caóticas (representada por transições no diagrama de estados) que é transmitida em um canal ruidoso. A decodificação da sequência de informação é realizada usando o Algoritmo de Viterbi. Por fim, analisa-se o desempenho deste sistema de comunicações em um canal com ruído aditivo Gaussiano branco. A metodologia desenvolvida pode ser aplicada em sistemas de comunicação baseados em caos empregando métodos de controle com a vantagem de baixo custo energético.

Palavras-Chave—Comunicação caótica, topologia de sistemas dinâmicos caóticos, dinâmica simbólica, controle de caos, probabilidade de erro.

Abstract—In this work we propose a communication system based on topology of chaotic attractors. The topological properties of the system are studied and its dynamical evolution is associated to a finite state machine. The binary information sequence is modulated in chaotic waveforms (represented as transitions in the finite state machine) that are transmitted through a noisy channel. The decoding process is realized using the Viterbi decoder. The proposed approach can be applied in chaos based communication systems with chaos control with the advantage of energetic efficiency,

Keywords—Chaos based communications, topology of chaotic dynamical systems, symbolic dynamics, chaos control, error probability.

I. INTRODUÇÃO

Sinais caóticos são gerados por sistemas dinâmicos não lineares e possuem características desejadas em algumas aplicações, tais como decorrelação, comportamento não periódico e espectro banda larga [1]. Aplicações de sinais caóticos ocorrem em criptografia [2], geração de números aleatórios [3], [4], marca d'água [5] e comunicações [6], [7].

A comunicação empregando sinais caóticos pode ser realizada com diferentes esquemas de modulação. Um esquema típico emprega modulação coerente, baseado na sincronização de osciladores caóticos, *e.g.*, *chaos shift keying* (CSK) [8]. Outra possibilidade é empregar esquemas não coerentes, *e.g.*, *differential chaos shift keying* (DCSK) [9], em que uma forma de onda de referência deve ser enviada adicionalmente ao sinal de informação, ocasionando diminuição na taxa de transmissão. Uma terceira abordagem, baseada no conceito de

controle de caos, utiliza as propriedades estruturais do sistema caótico e foi proposta por Ott, Grebogi e Yorke [10], [11]. Nesta proposta a evolução dinâmica de um sistema caótico é alterada aplicando-se pequenas perturbações periódicas a um parâmetro acessível do sistema. Entretanto, a modulação caótica via controle geralmente não é analisada na literatura considerando modelos típicos de canais com ruído [10].

Neste trabalho propomos empregar características topológicas de atratores caóticos para projetar um sistema de comunicação. A metodologia desenvolvida pode ser aplicada a qualquer atrator caótico tridimensional, contudo, abordaremos o atrator de Rössler como um estudo de caso. A proposta consiste em associar à evolução dinâmica do atrator caótico um diagrama de estados através do qual é possível mapear sequências binárias em órbitas do sistema dinâmico. O processo de mapeamento entre as sequências binárias de informação e as órbitas emprega métodos de controle de caos. Os sinais oriundos dessas órbitas são transmitidos através de um canal com ruído aditivo Gaussiano branco (AWGN, *additive white Gaussian noise*). A sequência binária é estimada no decodificador através do algoritmo de Viterbi e o desempenho do sistema é avaliado.

Este artigo está dividido em seis seções. Na Seção II é feita uma breve introdução às propriedades topológicas de sistemas dinâmicos caóticos. A Seção III apresenta o conceito de controle de caos e suas aplicações em comunicação caótica. Na Seção IV o sistema proposto é detalhado e tem o desempenho analisado na Seção V. Finalmente, na Seção VI são apresentadas as conclusões deste trabalho.

II. TOPOLOGIA DE SISTEMAS DINÂMICOS CAÓTICOS

Sistemas dinâmicos com evolução contínua no tempo são descritos por conjuntos de equações diferenciais (não lineares) ordinárias ou parciais de primeira ordem acopladas [1], [12], [13]. O ambiente natural para se estudar um sistema dinâmico é o espaço Euclidiano definido pelas variáveis do sistema, denominado de espaço de fase, que descreve a evolução temporal dos estados do sistema. Por exemplo, o sistema dinâmico de Rössler definido pelo sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas [14]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= -y(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) &= b + (x(t) - c)z(t). \end{cases} \quad (1)$$

O comportamento de um sistema dinâmico pode ser parcialmente descrito pelo estudo de sua estabilidade. Uma forma compacta de descrevê-la é através do espectro de expoentes de Lyapunov. Esse espectro caracteriza localmente as direções

Carlos E. C. Souza, Daniel P. B. Chaves e Cecilio Pimentel, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil. E-mails: carlos.ecsouza@ufpe.br, daniel.chaves@ufpe.br e cecilio@ufpe.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq e pela FACEPE.

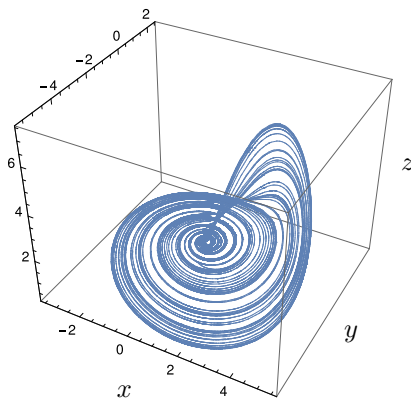


Fig. 1. Atrator de Rössler com parâmetros $a = 0.432$, $b = 2$ e $c = 4$.

de contração e expansão no espaço de fase. Para que ocorra caos, que é caracterizado pela sensibilidade às condições iniciais e por uma evolução recorrente e não periódica no espaço de fase, os mecanismos de expansão e contração devem ser identificados simultaneamente sobre este. A sensibilidade à condição inicial é atribuída ao mecanismo de expansão, enquanto que a evolução recorrente ao de contração.

Quando em caos, o sistema dinâmico apresenta um comportamento errático sobre o espaço de fase. A estrutura complexa decorrente das trajetórias do sistema é denominada atrator estranho. Consideremos o atrator de Rössler dado por (1), que exibe comportamento caótico para vários valores dos parâmetros a , b e c . O atrator estranho associado ao sistema de Rössler é ilustrado na Fig. 1 para $a = 0.432$, $b = 2$ e $c = 4$. Cada ponto do atrator indica um estado do sistema, ou seja, um ponto $(x(t), y(t), z(t))$ para um valor específico de t , obtido pela solução do sistema (1). As trajetórias caóticas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são representadas simultaneamente no espaço de fase, definindo a geometria do atrator.

No caso de atratores estranhos imersos em espaços de dimensão três, suas características estruturais são rigidamente definidas pelos mecanismos de contração e expansão responsáveis pela dinâmica caótica [15]. Assim, essas características são preponderantes para especificar as propriedades dinâmicas do sistema caótico. Portanto, a dinâmica de um sistema é regida pelas suas propriedades topológicas [16], que permitem inferir sobre as órbitas possíveis em decorrência das restrições impostas pelo fluxo.

A topologia do atrator estranho é identificada através da organização topológica das suas órbitas periódicas instáveis. Estas são trajetórias imersas no atrator estranho, com a propriedade de retornar arbitrariamente próximas do seu ponto inicial após um determinado intervalo de tempo. As órbitas periódicas instáveis formam um conjunto denso sobre o atrator, de forma que, qualquer órbita do atrator pode ser aproximada por estas.

A identificação de órbitas periódicas instáveis sobre um atrator caótico N -dimensional pode ser reduzida ao estudo da intersecção do seu fluxo com uma superfície de dimensão $(N - 1)$ no espaço de fase, que é denominada seção de

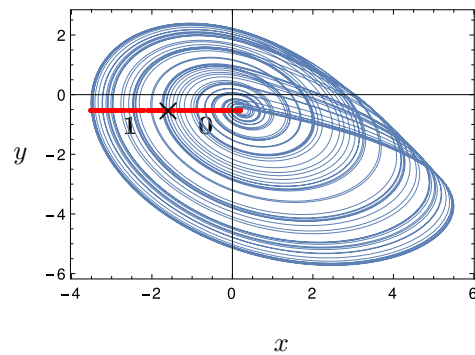


Fig. 2. Seção de Poincaré (linha horizontal) para o atrator de Rössler mostrado em projeção no eixo xy .

Poincaré [13]. No caso de atratores tridimensionais, uma seção de Poincaré ideal é uma superfície bidimensional perpendicular ao fluxo do atrator. Assim, a dinâmica pode ser avaliada pelos sucessivos cruzamentos na seção de Poincaré, o que simplifica a descrição da dinâmica, enquanto mantém as características essenciais do fluxo. A Fig. 2 mostra uma seção de Poincaré (linha horizontal) para o fluxo decorrente da projeção do atrator de Rössler sobre o plano xy .

A identificação e análise das órbitas periódicas instáveis, conseqüentemente a análise do próprio fluxo, podem ser simplificadas pela codificação das trajetórias através de um particionamento adequado da seção de Poincaré, o qual é definido como uma coleção de subconjuntos disjuntos tal que a união forma uma cobertura desta seção. Rotulando cada subconjunto da partição por um símbolo distinto, as trajetórias no espaço de fase são representadas por sequências de símbolos associados aos sucessivos subconjuntos visitados da seção de Poincaré. Um particionamento binário é feito em [16] pela divisão da seção de Poincaré em duas regiões, como mostra a Fig. 2 para o atrator de Rössler (regiões com rótulos 1 e 0 à esquerda e à direita do ponto de referência \times , respectivamente). O ponto de referência deste particionamento é estabelecido pelo valor mínimo do mapa de Poincaré, que é construído com as sucessivas intersecções do fluxo com a seção de Poincaré [17]. As sequências obtidas formam uma dinâmica simbólica, que pode ser entendida como uma descrição simbólica do mecanismo de evolução do sistema dinâmico.

Neste trabalho mostraremos como a topologia do atrator pode ser empregada para projetar um sistema de comunicação baseado em caos. A proposta é baseada em um refinamento do particionamento da seção de Poincaré e subsequente determinação de um diagrama de estados que representa simultaneamente os mecanismos de modulação e controle. Antes de descrever a proposta, introduziremos brevemente o conceito de controle de caos.

III. CONTROLE DE CAOS

O conceito de controle de caos foi proposto em [10] por Ott, Grebogi e Yorke e consiste em aplicar pequenas perturbações

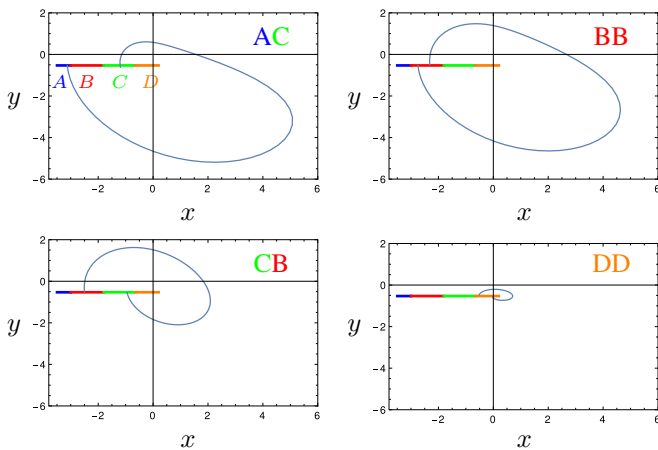


Fig. 3. Particionamento da seção de Poincaré para o atrator de Rössler mostrado em projeção no eixo xy .

periódicas em uma trajetória caótica para alterar sua evolução dinâmica. Este método é baseado na propriedade dos sistemas caóticos de possuírem um grande número de órbitas periódicas instáveis embebidas [16]. Estas órbitas podem ser estabilizadas via pequenas perturbações que aproximam as trajetórias caóticas para seu ponto inicial [10].

Para controlar um sistema caótico, um parâmetro de controle é introduzido em uma ou mais equações do sistema [10], [11]. No caso do atrator de Rössler, as equações são

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) - z(t) + f_x \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t) + f_y \\ \dot{z}(t) = b + (x(t) - c)z(t) + f_z \end{cases} \quad (2)$$

onde f_x , f_y e f_z são os parâmetros de controle em cada direção. Neste trabalho, a intervenção será apenas em $x(t)$ e, conseqüentemente, $f_y = f_z = 0$. A evolução dinâmica do sistema é monitorada e no momento em que o fluxo atravessa a seção de Poincaré o parâmetro de controle é modificado para deslocar a trajetória em direção ao ponto desejado.

IV. MODULAÇÃO BASEADA NA TOPOLOGIA DO CAOS

A. Particionamento da Seção de Poincaré

Usualmente, o controle de caos está associado a um particionamento binário da seção de Poincaré [11], [17]. Neste particionamento, são definidas duas regiões na seção de Poincaré, com rótulos 0 e 1. Estas regiões são associadas aos bits de informação 0 e 1, respectivamente, e o controle de caos induz o sistema a passar por uma delas de acordo com a sequência de informação. No demodulador, as sucessivas interseções com a seção de Poincaré são monitoradas, sendo decodificado um bit zero (um) quando a região de rótulo zero (um) é cruzada.

Uma desvantagem dessa abordagem é a vulnerabilidade do sistema ao ruído, pois a decisão do bit enviado é realizada observando o valor do sinal no instante do cruzamento com a seção de Poincaré. Visando agregar robustez contra ruído gaussiano branco, nossa proposta modula os bits com sinais gerados no decorrer da transição entre sub-regiões da seção de Poincaré, definidas em concordância com as restrições

topológicas do fluxo caótico. Portanto, ao contrário de propostas anteriores, a decisão sobre o bit transmitido é suave.

Neste trabalho empregamos um particionamento quaternário, nas regiões A , B , C e D , que segue as restrições topológicas do fluxo e pode ser interpretado como um refinamento da codificação apresentada na Seção II. Neste caso, os símbolos A e B são mapeados em um, os símbolos C e D em zero, recuperando-se a dinâmica simbólica associada ao fluxo caótico. Portanto, o código quaternário, assim como o binário, é uma descrição discreta do fluxo caótico e as restrições nessa sequência estão associadas às características topológicas do fluxo. Ao induzir o fluxo caótico, por controle de caos, a seguir trajetórias que satisfaçam essas restrições, o comportamento do sistema assemelha-se à evolução sem controle, tornando difícil distinguir deste o sistema controlado. Algumas transições entre as sub-regiões, para um particionamento quaternário, são mostradas na Fig. 3.

Idealmente, o sistema deve se comportar de tal forma que um observador externo não consiga diferenciar se o sistema está sendo controlado ou evolui naturalmente. Isto é possível quando o particionamento da seção de Poincaré é feito em várias regiões, pois a intervenção controlada se torna cada vez menor para induzir a transição desejada. Esta abordagem tem duas vantagens imediatas: (i) aproxima a dinâmica do sistema controlado do sistema original, o que é ideal para aplicações criptográficas, e (ii) diminui o custo energético necessário para o funcionamento do sistema, pois as perturbações necessárias para induzir as transições requeridas se tornam pequenas. O particionamento em mais de duas regiões também reflete com maior precisão os vínculos decorrentes da topologia, restringindo as transições entre as regiões definidas na seção de Poincaré, que é uma consequência direta da topologia do atrator.

O próximo passo é codificar os bits de informação nessas trajetórias por controle de caos. Para isto, faz-se uso da propriedade de que cada região incide em duas outras após uma revolução, o que decorre do mecanismo adotado para o particionamento da seção de Poincaré. Assim, dada uma região, como a rotulada por A , pode-se incidir em C ou D , se o primeiro caso é observado associamos o bit zero à trajetória, no segundo caso associamos o bit um. Contudo, esses bits estão vinculados à sequência de informação, que conduz a unidade de controle a gerar a sequência de sinais de controle que force a transição entre regiões em concordância com os bits de informação. O projeto do modulador que segue as restrições de transição entre regiões (imposta pela topologia do fluxo caótico) é abordado nas próximas seções.

B. O Diagrama de Estados

Conforme discutido na seção anterior, há restrições à evolução do sistema dinâmico, não sendo possível transitar arbitrariamente entre as sub-regiões da seção de Poincaré. Na Fig. 4 as possíveis transições entre sub-regiões são representadas através de um diagrama de estados. Uma transição do estado i para o estado j no diagrama equivale à trajetória interseção a sub-região i da seção de Poincaré e, em seguida, a sub-região j durante uma revolução, em que $i, j \in \{A, B, C, D\}$.

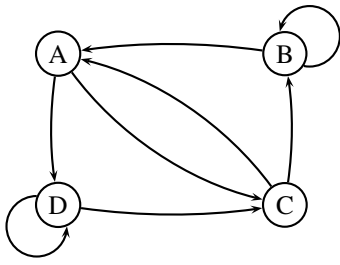


Fig. 4. Diagrama de estados do atrator de Rössler para o particionamento em quatro sub-regiões $\{A, B, C, D\}$.

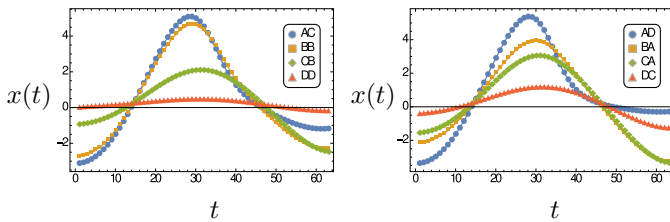


Fig. 5. Sinais $x(t)$ correspondentes às transições de estados da Fig. 4.

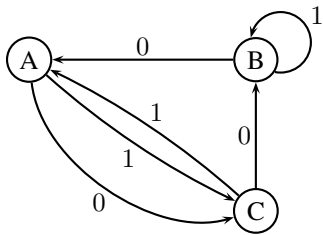


Fig. 6. Diagrama de estados do atrator de Rössler com a eliminação do estado D e a rotulação definida nas transições de estados.

Uma estratégia de controle associada ao diagrama de estados permite induzir o sistema a percorrer órbitas específicas, o que pode ser empregado como plataforma para o projeto de um modulador binário. Rotulando distintamente as duas transições que partem de cada estado com os símbolos 0 e 1, podemos associar uma sequência binária de informação a um sinal de saída que corresponde a uma trajetória específica do sistema caótico (este diagrama de estados será referenciado nas próximas seções por modulador). O sinal gerado pode provir de qualquer uma das variáveis de estado do sistema $x(t)$, $y(t)$ ou $z(t)$, a depender da disponibilidade da variável e do desempenho do sistema de comunicação resultante. Neste artigo assumiremos que o sinal provém da variável $x(t)$. A Fig. 5 apresenta um possível sinal $x(t)$ para cada uma das transições do diagrama de estados da Fig. 4, em que os sinais do gráfico à esquerda estão associado às revoluções apresentadas na Fig. 3. Convém ressaltar que o sinal efetivamente transmitido em cada transição varia com o ponto inicial da trajetória (que muda com a evolução do sistema) em cada sub-região.

C. Projeto do Modulador

Como será visto na Seção V o desempenho do sistema de comunicação baseado na estratégia de modulação apresentada

na seção anterior possui baixo desempenho em canal AWGN. Nesta seção propomos estratégias para aumentar a distância euclidiana entre os sinais associados às transições do diagrama, com consequente melhoria do desempenho do sistema.

Inicialmente, observa-se na Fig. 5 que os sinais $x(t)$ associados às transições que partem de um mesmo estado (e.g., AC e AD ou BB e BA) possuem baixa distância euclidiana entre si. Para aumentar essa distância criamos um sistema de transmissão bipolar em que a transição associada ao bit 1 corresponde à transmissão do sinal $x(t)$, enquanto transmite-se $-x(t)$ para a transição associada ao bit 0. Devido à baixa energia dos sinais associados ao estado D , utilizamos uma estratégia de controle para que as trajetórias não passem pela sub-região de A que induz a transição AD , o diagrama de estados é reescrito eliminando o estado D e as transições que partem e chegam nesse estado. Portanto, o diagrama resultante possui as transições AC , BA , BB , CA e CB . O estado A , entretanto, realiza apenas a transição AC , que rotulamos com o bit 1, e introduzimos uma transição em paralelo rotulada com o bit 0. A Fig. 6 mostra o diagrama de estados rotulado resultante.

V. O SISTEMA DE COMUNICAÇÃO

O sistema de comunicação é composto de três partes: o transmissor, o canal e o receptor. O transmissor possui três blocos como mostrado na Fig. 7: a fonte do sinal caótico, que é a onda $x(t)$ gerada pelo atrator de Rössler, um bloco de controle e um bloco de modulação bipolar que inverte os sinais caóticos de acordo com o bit a ser transmitido. O controle é feito a partir da observação da sequência binária de informação, $b_0b_1b_2b_3\dots$. Considera-se que a transmissão inicia-se em um estado fixo do diagrama de estados e o atrator de Rössler gera continuamente o sinal caótico. Então, o sistema de controle direciona as trajetórias para as sub-regiões que induzem a transição correspondente ao bit de informação de acordo com o diagrama de estados. Em seguida, o sinal caótico é multiplicado por $+1$ ou -1 dependendo do bit de informação. Como mencionado na subseção anterior, as formas de onda positivas transmitem o bit 1 e as negativas o bit 0. O sinal na saída desta modulação bipolar é denominado de $s(t)$.

O sinal caótico $s(t)$ é então transmitido em um canal AWGN $n(t)$ com densidade espectral de potência $N_0/2$ e o sinal recebido é da forma:

$$r(t) = s(t) + n(t). \quad (3)$$

A estrutura do diagrama de estados impõe restrições nas possíveis sequências transmitidas implicando na presença de memória no processo de transmissão. Para explorar esta memória na recepção, a decodificação é realizada pelo Algoritmo de Viterbi, que realiza a decodificação de máxima verossimilhança para estimar a sequência mais provável de ter sido transmitida.

Para a implementação da decodificação, forma-se uma treliça de estados a partir do diagrama da Fig. 6. O incremento de métrica calculado em cada transição de estados da treliça é dado pela distância Euclidiana entre o sinal recebido neste

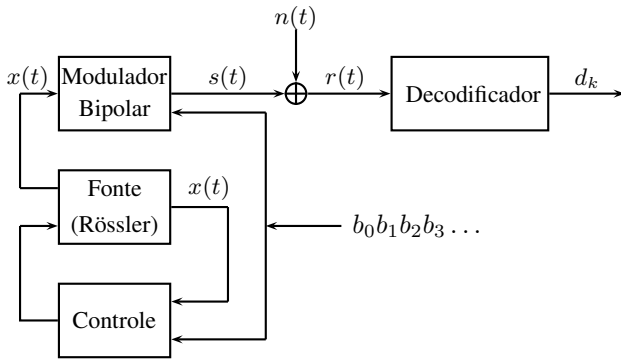


Fig. 7. Diagrama de blocos do sistema de comunicação.

intervalo e por formas de ondas médias geradas a partir de diversos sinais correspondentes à respectiva transição de sub-regiões.

A. Análise de Desempenho

Para analisar o desempenho do sistema de comunicação proposto, foram realizadas simulações computacionais para avaliar a taxa de erro de bit (BER, *bit error rate*) em um canal AWGN. A relação sinal ruído (SNR, *signal to noise ratio*) é definida por \bar{E}_s/N_0 , em que \bar{E}_s é a energia média do sinal transmitido $s(t)$. A Fig. 8 mostra a BER versus SNR para o modulador projetado com o diagrama de quatro estados (ver Fig. 4) não bipolar e com o diagrama de três estados (ver Fig. 6) bipolar, ambos decodificados pelo Algoritmo de Viterbi. Como referência, são incluídas a curva de desempenho da decodificação bit a bit do modulador com três estados (que não explora a memória do sistema), e a curva de desempenho de um sistema de modulação digital BPSK. Observa-se que as modificações propostas que conduziram ao modulador com três estados propiciaram um significativo ganho de desempenho. Para a $BER = 10^{-5}$, o sistema proposto com três estados apresenta um ganho de 2 dB em relação à decodificação bit a bit. Já em comparação com o BPSK e o mesmo valor de referência da BER, o sistema proposto tem um desempenho inferior em 1.5 dB, contudo, ganha ao herdar as características inerentes a um sistema de comunicação baseado em caos, a saber, segurança da informação em camada física, espalhamento espectral e eficiência energética. Até onde conhecemos, não há na literatura a análise de sistemas caóticos baseados em controle de caos em canais AWGN. As curvas de desempenho indicam que o sistema proposto é promissor para a implementação de sistemas de comunicação baseados em controle de caos em ambientes ruidosos.

VI. CONCLUSÕES

Um sistema de comunicação baseado na topologia de atratores caóticos foi proposto. As órbitas do sistema dinâmico foram associadas às sequências simbólicas geradas a partir de um diagrama de estados, em que as transições entre estados correspondem às transições entre sub-regiões da seção de Poincaré. Por fim, foi realizada uma análise de desempenho

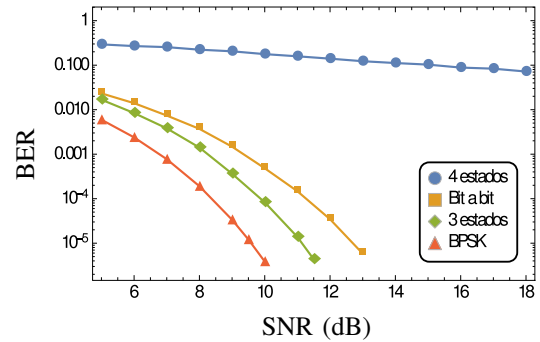


Fig. 8. BER versus SNR do sistema de comunicação baseado na topologia do atrator caótico de Rössler. A BER do sistema BPSK também é mostrada para efeito de comparação.

do sistema em um canal AWGN. A modulação por controle de caos garante boa eficiência energética por requerer apenas pequenas perturbações para mapear a sequência de informação em órbitas do sistema caótico.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies in Nonlinearity Series, Westview Press, 2001.
- [2] L. Kocarev and S. Lian, *Chaos-based Cryptography: Theory, Algorithms and Applications*. Studies in Computational Intelligence, Springer, 2011.
- [3] H. Nejati, A. Beirami, and W. H. Ali, "Discrete-time chaotic-map truly random number generators: design, implementation, and variability analysis of the zigzag map," *Analog Integr. Circuits Signal Process.*, vol. 73, pp. 363–374, June 2012.
- [4] J. A. P. de Moraes, D. P. B. Chaves, J. V. de Carvalho Evangelista, and C. Pimentel, "Uma metodologia para geração de sequências aleatórias usando mapas caóticos," in *XXXIII Brazilian Telecommunications Symposium*, pp. 1–5, Sept. 2015.
- [5] F. Liu and C. K. Wu, "Robust visual cryptography-based watermarking scheme for multiple cover images and multiple owners," *IET Information Security*, vol. 5, pp. 121–128, June 2011.
- [6] G. Kaddoum, "Design and performance analysis of a multiuser OFDM based differential chaos shift keying communication system," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 64, pp. 249–260, Jan. 2016.
- [7] R. T. Fontes and M. Eisencraft, "A digital bandlimited chaos-based communication system," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 37, pp. 374 – 385, Aug. 2016.
- [8] F. Lau and C. Tse, *Chaos-Based Digital Communication Systems*. Engineering online library, Springer, 2010.
- [9] A. P. Kurian, S. Puthusserypady, and S. M. Htut, "Performance enhancement of DS/CDMA system using chaotic complex spreading sequence," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 4, pp. 984–989, May 2005.
- [10] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, "Controlling chaos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 1196–1199, Mar. 1990.
- [11] S. Hayes, C. Grebogi, and E. Ott, "Communicating with chaos," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 3031–3034, May 1993.
- [12] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke, *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, NY, 1997.
- [13] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2011.
- [14] O. Rössler, "An equation for continuous chaos," *Physics Letters A*, vol. 57, pp. 397 – 398, Sept. 1976.
- [15] R. Gilmore, "Topological analysis of chaotic dynamical systems," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 70, pp. 1455–1529, Oct. 1998.
- [16] R. Gilmore and M. Lefranc, *The Topology of Chaos: Alice in Stretch and Squeezeland*. Wiley-VCH, second ed., 2012.
- [17] H. P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi, "Uncovering missing symbols in communication with filtered chaotic signals," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 22, p. 1250199, Aug. 2012.