Filtragem Ótima de Wiener pelo Critério da Entropia Gaussiana

Leonardo S. Resende

***Resumo*—Este trabalho apresenta uma solução de forma fechada para o problema de filtragem de Wiener utilizando o critério da entropia gaussiana. Mostra-se que o filtro ótimo pode ser obtido a partir de uma equação normal que leva em conta a caracterização estatística de segunda ordem completa dos sinais.**

***Palavras-Chave*—Filtragem ótima de Wiener, critério da entropia Gaussiana, não-circularidade de segunda ordem (impropriedade).**

Abstract—**This work presents a closed-form solution to the Wiener filtering problem using the Gaussian entropy criterion. It is shown that the optimum filter can be obtained from a normal equation that takes into account the full second-order statistics of the signals.**

***Keywords*—Optimal Wiener filtering, Gaussian entropy criterion, second-order noncircularity (impropriety).**

I. INTRODUÇÃO

Processamento largamente linear (*WL – Widely-Linear*) é uma técnica de processamento de sinais complexos que vem sendo empregada para considerar a não-circularidade de segunda ordem (ou impropriedade) de sinais aleatórios [1-4]. Exemplos de esquemas de modulação digital que produzem sinais de banda base complexos e impróprios são: *BPSK* (*Binary Phase Shift Keying*), *PAM* (*Pulse Amplitude Modulation*), *GMSK* (*Gaussian Minimum Shift Keying*) e *OQPSK* (*Offset Quaternary Phase Shift Keying*) [5-6].

Em termos de filtragem de Wiener, utilizam-se dois filtros lineares com resposta impulsiva finita (*FIR – Finite Impulse Response*) para processar simultaneamente o sinal de entrada e seu conjugado complexo. Deste modo, uma caracterização estatística de segunda ordem completa dos sinais aleatórios envolvidos é obtida ao se utilizar o critério do erro quadrático médio (*MSE – Mean Square Erro*). Semelhante à filtragem estritamente linear de Wiener, o filtro *WL* ótimo (o vetor resultante da concatenação dos vetores de coeficientes dos dois filtros ótimos) é também obtido a partir de uma equação normal que leva em conta as informações de covariância e pseudo-covariância dos sinais.

Com base no conceito de modelagem largamente linear, a versão *WL* do algoritmo *LMS* (*Least Mean Squares*) foi introduzida para filtragem adaptativa de sinais impróprios [7]. Sua equação recursiva de adaptação do vetor de coeficientes concatenado é idêntica à do algoritmo *LMS* convencional [8-10].

Recentemente, o critério de otimização da entropia gaussiana foi proposto para filtragem adaptativa de sinais impróprios , sem a necessidade de se utilizar a modelagem *WL* [11]. Um algoritmo baseado no gradiente estocástico foi introduzido, cuja equação recursiva para atualizar o vetor de coeficientes é semelhante à do algoritmo *LMS*, e reduz a essa quando os sinais são próprios. Vale observar que o esquema de filtragem de Wiener conserva sua estrutura convencional, com apenas um filtro transversal.

Neste artigo, o filtro ótimo de Wiener segundo o critério da entropia gaussiana é determinado. Verifica-se que o filtro ótimo pode ser obtido a partir de uma equação normal, tendo em conta as estatísticas de segunda ordem de covariância e pseudo-covariância dos sinais. Observa-se também que quando os sinais são próprios o critério da entropia gaussiana é equivalente ao *MSE*.

II. CRITÉRIO DA ENTROPIA GAUSSIANA

Considere o esquema de filtragem de Wiener mostrado na Figura 1, na forma de diagrama de blocos [8-10]. O sinal de erro $e(t)$ é definido pela diferença entre o sinal desejado $d(t)$ e sua estimativa $y(t)$ na saída do filtro:

$$\begin{aligned} e(t) &= d(t) - y(t) \\ &= d(t) - \mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

onde

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \cdots, w_{N-1}]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

e

$$\mathbf{x}(t) = [x(t), x(t-1), \cdots, x(t-N+1)]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

denotam respectivamente os vetores Nx1 de coeficientes do filtro transversal, de ordem N-1, e das amostras do sinal de entrada presentes no filtro no instante de tempo discreto t.

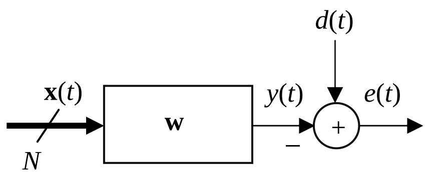

Figura 1: Filtragem de Wiener

Considerando que o sinal de erro $e(t)$ é um processo aleatório complexo, Gaussiano, estacionário, e de média zero, sua entropia é definida como:

$$\begin{aligned} H\{e(t)\} \triangleq{}& 1 + \log(\pi) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\log[\,(E\{|e(t)|^2\})^2 - |E\{e^2(t)\}|^2]. \end{aligned} \tag{4}$$

Logo, minimizar a entropia de $e(t)$ consiste em minimizar o argumento do logaritmo no terceiro termo do lado direito de (4). Isto é:

Leonardo S. Resende¸ Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica (EEL), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis-SC, Brasil, E-mails: leonardo@eel.ufsc.br, resende@ieee.org.

$$J_e = (E\{|e(t)|^2\})^2 - |E\{e^2(t)\}|^2, \tag{5}$$

onde $E\{|e(t)|^2\}$ é o *MSE* (*Mean Square Error*), ou a covariância de *e*(*t*), e $E\{e^2(t)\}$ é conhecida como pseudo-covariância, ou covariância complementar, ou ainda função de relação de *e*(*t*) [1-3]. De (5), tem-se que:

$$\begin{aligned} J_e &= [1 - \frac{|E\{e^2(t)\}|^2}{(E\{|e(t)|^2\})^2}](E\{|e(t)|^2\})^2 \\ &= [1 - |\rho_e|^2](E\{|e(t)|^2\})^2, \end{aligned} \tag{6}$$

onde

$$\rho_e \triangleq E\{e^2(t)\}/E\{|e(t)|^2\} \tag{7}$$

é definido como coeficiente de circularidade e $|\rho_e|$ como grau de não circularidade de *e*(*t*) ($0 \leq |\rho_e| \leq 1$). Quando $|\rho_e| = 0$, a fdp de *e*(*t*) é circular – *e*(*t*) é dito ser circular ou próprio, já que neste caso $E\{e^2(t)\} = 0$; e quando $|\rho_e| = 1$, além de ser não circular, *e*(*t*) é dito ser retilíneo ou maximamente impróprio (dos termos em inglês *rectilinear* e *maximally improper*, respectivamente) [2]. Observa-se aqui que no caso extremo, em que $|\rho_e| = 1$, $J_e = 0$ e o critério de minimização da entropia de *e*(*t*) perde o sentido.

III. FILTRO *LME* ÓTIMO

A função custo do critério da entropia média mínima (*LME – Least Mean Entropy*) em (5) pode ser reescrita como:

$$J_e = [E\{|e(t)|^2\} - \rho_e (E\{e^2(t)\})^*] E\{|e(t)|^2\}, \tag{8}$$

onde

$$E\{|e(t)|^2\} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^{\mathrm{H}}\mathbf{w} - \mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{p} + \mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}\mathbf{w} \tag{9}$$

e

$$E\{e^2(t)\} = \gamma_d - 2\mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{q} + \mathbf{w}^{\mathrm{H}}\mathbf{C}\mathbf{w}^*. \tag{10}$$

Em (9), $\sigma_d^2 = E\{|d(t)|^2\}$ denota a covariância de *d*(*t*), $\mathbf{p} = E\{\mathbf{x}(t)d^*(t)\}$ o vetor de covariância cruzada entre **x**(*t*) e *d*(*t*), e $\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^{\mathrm{H}}(t)\}$ a matriz de covariância de **x**(*t*). Já em (10), $\gamma_d = E\{d^2(t)\}$ é a pseudo-covariância de *d*(*t*), $\mathbf{q} = E\{\mathbf{x}(t)d(t)\}$ o vetor de pseudo-covariância cruzada entre **x**(*t*) e *d*(*t*), e $\mathbf{C} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)\}$ a matriz de pseudo-covariância de **x**(*t*). Logo, o vetor gradiente do critério *LME*, com respeito à **w**, é dado por:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial J_e}{\partial \mathbf{w}^*} = -2E\{|e(t)|^2\}[\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w} - \rho_e^*\mathbf{q} + \rho_e^*\mathbf{C}\mathbf{w}^*]. \tag{11}$$

Define-se o vetor aumentado de **g**:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^* \end{bmatrix} &= -2E\{|e(t)|^2\} \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{w} - \rho_e^*\mathbf{q} + \rho_e^*\mathbf{C}\mathbf{w}^* \\ \mathbf{p}^* - \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}^* - \rho_e\mathbf{q}^* + \rho_e\mathbf{C}^{\mathrm{H}}\mathbf{w} \end{bmatrix} \\ &= -2E\{|e(t)|^2\}[\mathbf{p}_a - \mathbf{R}_a\mathbf{w}_a], \end{aligned} \tag{12}$$

onde

$$\mathbf{w}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^* \end{bmatrix} \tag{13}$$

denota o vetor aumentado de coeficientes do filtro,

$$\mathbf{p}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{p} - \rho_e^*\mathbf{q} \\ \mathbf{p}^* - \rho_e\mathbf{q}^* \end{bmatrix} \tag{14}$$

o vetor aumentado de covariância e pseudo-covariância cruzadas entre **x**(*t*) e *d*(*t*), e

$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & -\rho_e^*\mathbf{C} \\ -\rho_e\mathbf{C}^{\mathrm{H}} & \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{15}$$

a matriz aumentada de covariância e pseudo-covariância de **x**(*t*). Igualando $\mathbf{g}_a$ ao vetor nulo $\mathbf{0}_{2N\mathrm{x}1}$, chega-se à equação normal aumentada da filtragem de Wiener *LME*:

$$\mathbf{R}_a\mathbf{w}_a = \mathbf{p}_a. \tag{16}$$

Logo, assumindo que $\mathbf{R}_a$ é definida positiva, encontra-se a solução ótima de forma fechada para $\mathbf{w}_a$:

$$\mathbf{w}_{a_{\mathrm{opt}}} = \mathbf{R}_a^{-1}\mathbf{p}_a. \tag{17}$$

Usando a fórmula de Aithen para inversão de matrizes particionadas [12], tem-se que:

$$\mathbf{R}_a^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_a/\mathbf{R}^{\mathrm{T}})^{-1} & (\mathbf{R}_a/-\rho_e^*\mathbf{C})^{-1} \\ (\mathbf{R}_a/-\rho_e\mathbf{C}^{\mathrm{H}})^{-1} & (\mathbf{R}_a/\mathbf{R})^{-1} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

onde $(\mathbf{R}_a/[\bullet])^{-1}$ denota o complemento de Schur de $\mathbf{R}_a$ com respeito à $[\bullet]$. Substituindo (18) em (17), chega-se à solução de forma fechada do filtro ótimo de Wiener *LME*:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\mathrm{opt}} = (\mathbf{R}_a/\mathbf{R}^{\mathrm{T}})^{-1}[\mathbf{p} - \rho_e^*\mathbf{q}] + \\ (\mathbf{R}_a/-\rho_e^*\mathbf{C})^{-1}[\mathbf{p}^* - \rho_e\mathbf{q}^*], \end{aligned} \tag{19}$$

onde

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_a/\mathbf{R}^{\mathrm{T}})^{-1} &= \mathbf{R}^{-1} + \\ &+ |\rho_e|^2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{R}^{\mathrm{T}} - |\rho_e|^2\mathbf{C}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^{\mathrm{H}}\mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

e

$$(\mathbf{R}_a/-\rho_e^*\mathbf{C})^{-1} = \rho_e^*(\mathbf{R}_a/\mathbf{R}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{R}^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{21}$$

A entropia média mínima de *e*(*t*) do filtro ótimo é dada por:

$$\begin{aligned} J_{e_{\min}} &= J_e(\mathbf{w})|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\mathrm{opt}}} \\ &= (\sigma_{e_{\min}}^2)^2 - |\gamma_{e_{\min}}|^2, \end{aligned} \tag{22}$$

onde

$$\sigma_{e_{\min}}^2 = E\{|e(t)|^2\}|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\mathrm{opt}}} \tag{23}$$

e

$$\gamma_{e_{\min}} = E\{e^2(t)\}|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_{\mathrm{opt}}}. \tag{24}$$

Em se tratando de sinais próprios, ρ_e=0. De (19), observa-se que:

$$\mathbf{w}_{\mathrm{opt}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}. \tag{25}$$

Isto vale dizer que os critérios *LME* e *MSE* são equivalentes para sinais próprios.

IV. CONCLUSÕES

O filtro ótimo de Wiener segundo o critério da entropia gaussiana foi determinado, e é obtido a partir de uma equação normal, de forma fechada, levando-se em conta as estatísticas de segunda ordem de covariância e pseudo-covariância dos sinais. Observou-se também que para sinais próprios os critérios *LME* e *MSE* se equivalem.

Referências

[1] B. Picinbono and P. Chevalier, “Widely linear estimation with complex data,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 43, pp. 2030–2033, Aug. 1995.

[2] B. Picinbono and P. Bondon, “Second-Order Statistics of Complex Signals,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, pp. 411–420, Feb. 1997.

[3] P.J. Schreier and L.L. Scharf, *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: The Theory of Improper and Noncircular Signals*. Cambridge, U.K., Cambridge Univ. Press, 2010.

[4] T. Adali, P.J. Schreier, and L.L. Scharf, “Complex-valued signal processing: The proper way to deal with impropriety," *IEEE Trans. Signal Process.* (overview paper), vol. 59, no. 11, pp. 4516–4528, Nov. 2011.

[5] P. Chevalier and F. Pipon, “New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK, and GMSK interferences—application to SAIC,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 3, pp. 870–883, 2006.

[6] A. Mirbagheri, N. Plataniotis, and S. Pasupathy, “An enhanced widely linear CDMA receiver with OQPSK modulation,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, pp. 261–272, 2006.

[7] R. Schober, W. H. Gerstacker, and L. H.-J. Lampe, "A widely linear LMS algorithm for MAl suppression for OS-COMA," *Proc. IEEE Int. Conf. on Communications*, 2003, pp. 2520- 2525.

[8] B. Widrow and S.D. Stearns, *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall, New Jersey, 1985.

[9] M.G. Bellanger, *Adaptive Digital Filters and Signal Analysis*, 2nd edition. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 2001.

[10] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th edition. Prentice-Hall, New Jersey, 2002.

[11] Xi-Lin Li and T. Adali, “Complex-Valued Linear and Widely Linear Filtering Using MSE and Gaussian Entropy, ” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 11, pp. 5672–5684, Nov. 2012.

[12] F. Zhang, Ed., *The Schur Complement and Its Applications*. Springer, New York, 2005.