# Soma por Partes para Sinais Periódicos e Transformadas Discretas

R. J. Cintra

***Resumo*— O algoritmo de soma por partes é analisado e é proposta uma modificação para o caso de sinais periódicos. Uma expressão geral para a soma por partes iterada é obtida. A técnica proposta pode ser empregada para reescrever transformadas discretas em um formalismo alternativo, permitindo o desenvolvimento de novos algoritmos rápidos.**

***Palavras-Chave*— Soma por partes, sinais periódicos, transformadas discretas.**

***Abstract*— The summation-by-parts method is analyzed and adapted for discrete periodic signals. A general expression for the iterated summation-by-parts is derived. The proposed technique can be employed as a means to rewritten usual discrete transforms under a new mathematical structure. New algorithms can be subsequently derived.**

***Keywords*— Summation-by-parts, periodic signals, discrete transforms.**

## I. Introdução

Uma das expressões matemáticas mais encontradas na literatura consiste da seguinte formulação:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n], \tag{1}$$

em que $x[n]$ e $y[n]$ são sinais discretos. Esta expressão está presente em um vasto número de situações, tais como (i) cálculo de correlação [1], (ii) avaliação de produto interno [2], (iii) estimação de valores esperados [3], (iv) avaliação da qualidade de voz [4], (v) cálculo de momentos [5] e (vi) filtragem [6], para citar apenas alguns cenários imediatos.

Uma maneira alternativa de se calcular (1) é através da técnica de soma por partes [7], que é análoga à regra de integração por partes. Note a similaridade de (1) e a expressão $\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t)$, em que $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são funções reais bem-comportadas num intervalo $[a, b]$.

A técnica de soma por partes vem sendo aplicada em diversos contextos com ferramenta de cálculo numérico. Em [8], a soma por partes é utilizada para modificar o algoritmo de estimação de frequências introduzido por Kay [9]. No contexto de solução numérica de equações diferenciais, vários trabalhos registram a aplicação da técnica de somas por partes na análise de condições de contorno relacionadas ao problema de difusão [10], [11].

No contexto de processamento de sinais, Tretter considerou o uso de somas por partes como recurso numérico para estimação de frequências em ruído branco gaussiano aditivo [12].

R. J. Cintra, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, Brasil e *University of Akron*, OH, EUA. E-mail: rjdsc@pq.cnpq.br.

TABELA I

RELAÇÃO ENTRE NÚCLEO DE TRANSFORMAÇÃO E TRANSFORMADA

| Núcleo $\ker(n,k)$ | Transformada Discreta |
|---|---|
| $\exp\left(\frac{-2\pi jnk}{N}\right)$ | Fourier [17] |
| $\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$ | Hartley [18], [19] |
| $\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$ | Fourier-cosseno [20] |
| $\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$ | Fourier-seno [20] |
| $\cos\left(\frac{\pi(n+1/2)k}{2N}\right)$ | Cosseno [21] |
| $\sin\left(\frac{\pi(n+1/2)(k+1)}{2N}\right)$ | Seno [22] |

Particularmente, um caso de relevância é configurado quando os sinais $x[n]$ e $y[n]$ são discretos e periódicos com período $N$, tais que $x[n] = x[n+N]$ e $y[n] = y[n+N]$, para qualquer $n$. O tipo de soma descrito em (1) é encontrado em vários contextos de processamento digital de sinais [13], [14], como, por exemplo, no cálculo das transformadas discretas.

Um transformada discreta tem a seguinte formulação geral

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\ker[n,k], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

em que $N$ também é o comprimento da transformada, $x[\cdot]$ é um sinal discreto a ser analisado e $\ker[\cdot,\cdot]$ é denominado de núcleo de transformação. Por exemplo, se $\ker[n,k] = \exp(-2\pi jnk/N)$, $j = \sqrt{-1}$, então diz-se que o sinal $X[\cdot]$ é a transformada discreta de Fourier (DFT) de $x[\cdot]$. A Tabela I elenca outras transformadas relevantes [14].

Considerando-se $y[n] = \ker[n,k]$, obtem-se que as transformadas discretas são caso particulares do formalismo descrito em (1). Talvez a primeira tentativa para calcular uma transformada discreta por meio da soma por partes tenha sido feita por Boudreaux-Bartels e Parks [15], [16], em que a DFT foi alvo de análise.

Esta trabalho objetiva (i) analisar o algoritmo de soma por partes e (ii) adaptá-lo para o tratamento de sinais discretos e periódicos, sendo este último item a contribuição deste trabalho. É buscada a reformulação do algoritmo de soma por partes para que nativamente contemple sinais periódicos. Nosso trabalho é fundamentalmente *diferente* da proposta de Boudreaux-Bartels e Parks [15] em dois aspectos. Primeiramente, as expressões que propomos são matematicamente menos complexas. Em segundo lugar, conseguimos eliminar totalmente a necessidade de somatórios infinitos exigidos em [15], [16]. E, finalmente, nosso desenvolvimento é geral para qualquer tipo de sinais periódicos, em contraste com [15] em que a técnica foi adaptada pontualmente para o caso da DFT.

Este artigo tem a seguinte apresentação. Na Seção II, é derivado o método de soma por partes para sinais discretos de comprimento finito. Subsequentemente, na Seção III, modificamos a regra de soma por partes para que contemple sinais periódicos. Para tal, demonstramos uma sequência de Lamas auxiliares para construir o resultado. Um exemplo numérico ilustrativo é fornecido na Seção IV. A Seção V descreve a generalização do método para somas iteradas. Finalmente, na Seção VI, realizamos uma discussão enfatizando o resultado deste trabalho no contexto de transformadas discretas; e fornecemos uma breve conclusão.

## II. Soma por Partes

Inicialmente, vamos enunciar o algoritmo de soma por partes, que é baseado na formulação da diferença do produto de duas sequências. Note que há um paralelo entre soma por partes e integração por partes.

*Definição 1:* Seja $u[n]$ uma seqüência. A seqüência diferença de $u[n]$ é expressa por

$$\Delta u[n] \triangleq u[n+1] - u[n].$$

■

Desse modo, a diferença do produto de dois sinais $u[n]$ e $v[n]$ é fornecida por:

$$\begin{aligned}\Delta(u[n]v[n]) =& u[n+1]v[n+1] - u[n]v[n] \\ =& u[n+1]v[n+1] - u[n]v[n+1] \\ &+ u[n]v[n+1] - u[n]v[n] \\ =& u[n](v[n+1] - v[n]) \\ &+ v[n+1](u[n+1] - u[n]) \\ =& u[n]\Delta v[n] + v[n+1]\Delta u[n].\end{aligned}$$

Denotemos a operação de deslocamento à esquerda de uma unidade por $\operatorname{shift}(u[n]) \triangleq u[n+1]$. Assim,

$$\Delta(u[n]v[n]) = u[n]\Delta v[n] + \operatorname{shift}(v[n])\Delta u[n].$$

Rearranjando esta expressão e somando em ambos os lados da equação, temos que

$$\sum u[n]\Delta v[n] = \sum \Delta(u[n]v[n]) - \sum \operatorname{shift}(v[n])\Delta u[n].$$

Esta expressão resulta na fórmula de soma por partes, análoga ao método de integração por partes:

$$\sum u[n]\Delta v[n] = u[n]v[n] - \sum \operatorname{shift}(v[n])\Delta u[n].$$

Acrescentando-se os limites inferiores e superiores, obtemos a seguinte proposição.

*Proposição 1 (Soma por Partes):* Sejam $u[n]$ e $v[n]$ sequências finitas. Então

$$\sum_{n=0}^{N-1} u[n]\Delta v[n] = u[n]v[n]\Big|_0^N - \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{shift}(v[n])\Delta u[n].$$

Compare este último resultado com a regra de integração por partes [23, p. 216]:

$$\int_a^b u \, \mathrm{d}v = u\, v\Big|_a^b - \int_a^b v \, \mathrm{d}u,$$

em que $u$ e $v$ são funções diferenciáveis no intervalo $[a, b]$.

## III. Soma por Partes para Sinais Periódicos

Nesse contexto, a expressão geral da soma por partes será cuidadosamente examinada para o caso particular de sinais periódicos. Com respeito a (1) e a Proposição 1, é admitida a seguinte atribuição:

$$\begin{aligned}\Delta v[n] &\triangleq x[n], \\ u[n] &\triangleq y[n].\end{aligned}$$

No caso de transformadas discretas, a sequência $u[n]$ pode ser interpretada como o núcleo $\ker[n, k]$. Assim, vem que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n] = \sum_{n=0}^{N-1} u[n]\Delta v[n].$$

Adicionalmente, vamos admitir que o sinal $y[n]$ tenha média nula, i.e, a soma de seus elementos é zero. Novamente, esta situação é bastante típica no contexto de transformadas discretas [14]. Por simplicidade, vamos admitir, sem qualquer perda de generalidade, que o sinal em análise $x[n]$ também tem média nula. Caso um sinal original não tenha média nula, subtraia-se de todos os seus elementos a média do sinal.

Observe que a fórmula da soma por partes requer que seja calculado o vetor $v[n]$. Para isso, é necessário realizar a operação inversa a diferença finita. Isto é obtido por meio de uma estrutura matemática que forneça a anti-diferença.

*Lema 1 (Anti-diferença):* Dado um sinal diferença $\Delta v[n]$, então o sinal $v[n]$ que lhe é associado é dado por

$$v[n] = v[0] + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i], \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

*Demonstração:* Temos claramente que

$$v[n] = \Delta v[n-1] + v[n-1], \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Analisando esta recursão, podemos escrever:

$$\begin{aligned}v[n] &= \Delta v[n-1] + v[n-1] \\ &= \Delta v[n-1] + \Delta v[n-2] + v[n-2] \\ &= \Delta v[n-1] + \Delta v[n-2] + \Delta v[n-3] + v[n-3] \\ &= \cdots \\ &= \Delta v[n-1] + \cdots + \Delta v[0] + v[0] \\ &= v[0] + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i],\end{aligned}$$

para $n = 1, 2, \ldots, N$. ■

Note que o sinal $v[n]$ não é unicamente especificado pelo sinal diferença $\Delta v[n]$. Há uma família de sinais que satisfazem o par diferença $v[n]$ e $\Delta v[n]$ a depender da escolha de $v[0]$.

Apesar dessa aparente dificuldade em inequivocamente se identificar $v[n]$, mostraremos que a fórmula de soma por partes não é afetada por esta aparente dificuldade. Mas, antes disso, precisamos de alguns resultados preliminares fornecidos pelos próximos lemas.

*Lema 2:* Seja $c$ uma constante. Então $\operatorname{shift}(v[n] + c) = \operatorname{shift}(v[n]) + c$.

*Demonstração:* Claramente, vem que

$$\begin{aligned}\operatorname{shift}(v[n] + c) &= v[n+1] + c \\ &= \operatorname{shift}(v[n]) + c.\end{aligned}$$

■

Cabe um breve comentário acerca do operador $\mathrm{shift}(\cdot)$. No caso de sinais periódicos, o deslocamento por ele fornecido torna-se cíclico.

*Lema 3 (Diferença é Periódica):* Seja $u[n]$ um sinal periódico de período $N$. Então sua diferença $\Delta u[n]$ também é periódica de período $N$ com média nula.

*Demonstração:* A periodicidade de $\Delta u[n]$ decorre diretamente do fato de que $u[n]$ é periódico: $\Delta(u[n+N]) = \Delta u[n]$. Além disso, se $u[n]$ tem média nula, então $\sum_{n=0}^{N-1} u[n] = 0$. Logo, tem-se também que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \Delta u[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} (u[n+1] - u[n]) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u[n+1] - \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \\ &= (u[1] + u[2] + \cdots + u[N-1] + u[N]) - 0 \\ &= u[1] + u[2] + \cdots + u[N-1] + u[0] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

*Lema 4 (Anti-diferença é Periódica):* Seja $\Delta v[n]$ um sinal periódico de período $N$ com média nula. Então sua anti-diferença $v[n]$ também é periódica de período $N$.

*Demonstração:* Considerando que (i) $\sum_{i=0}^{N-1} \Delta v[i] = 0$, devido à média de $\Delta v[n]$ ser nula, e que (ii) $\Delta v[n-N] = \Delta v[n]$, vem que:

$$\begin{aligned}v[n+N] &= v[0] + \sum_{i=0}^{(n+N)-1} \Delta v[i] \\ &= v[0] + \sum_{i=0}^{N-1} \Delta v[i] + \sum_{i=N}^{n+N-1} \Delta v[i] \\ &= v[0] + 0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i-N] \\ &= v[0] + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i] \\ &= v[n], \quad \forall n.\end{aligned}$$

Denotaremos $v[0]$ por *valor inicial* e $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i]$ por *termo de reconstrução*. ■

Uma implicação imediata deste último lema é que o termo cruzado $u[n]v[n]\big|_0^N$ contido na expressão da soma por partes é nulo. Pois, tem-se que

$$\begin{aligned}u[n]v[n]\Big|_0^N &= u[N]v[N] - u[0]v[0] \\ &= u[0]v[0] - u[0]v[0] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Consequentemente, acabamos de demonstrar a seguinte proposição.

*Proposição 2 (Soma por Partes para Sinais Periódicos):* Sejam $u[n]$ e $\Delta v[n]$ sinais periódicos de período $N$. Admita que $\Delta v[n]$ tenha média nula. Então

$$\sum_{n=0}^{N-1} u[n]\Delta v[n] = -\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{shift}(v[n])\Delta u[n]. \tag{3}$$

■

Esta expressão é comparável em estrutura com as Equações (7)–(10) do trabalho de Bordeaux-Bartels and Parks [16].

Vamos agora, finalmente, mostrar que a escolha do valor inicial $v[0]$ é irrelevante para o cálculo da soma por partes.

*Proposição 3:* Sejam $u[n]$ e $\Delta v[n]$ sinais discretos periódicos de período $N$. Admita que $\Delta v[n]$ tem média nula. Então

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{shift}(v[n])\Delta u[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{shift}(v'[n])\Delta u[n],$$

em que $v[n] = v'[n] + v[0]$, em que o valor inicial $v[0]$ é uma constante arbitrária.

*Demonstração:* Este resultado é obtido após alguma manipulação algébrica e a aplicação dos Lemas 2, 3 e 4. Tem-se que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{shift}(v[n])\Delta u[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{shift}(v'[n] + v[0])\Delta u[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (\mathrm{shift}(v'[n]) + v[0])\Delta u[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{shift}(v'[n])\Delta u[n] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} v[0]\Delta u[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{shift}(v'[n])\Delta u[n].\end{aligned}$$

■

## IV. EXEMPLO

Nesta seção, fornecemos um pequeno exemplo numérico para ilustrar o ponto das ferramentas desenvolvidas.

Considere um sinal discreto periódico $x[n] = \begin{bmatrix}13 & -5 & -8\end{bmatrix}^T$ e um núcleo periódico $\ker[n,k] = \begin{bmatrix}2 & 4 & -3\end{bmatrix}^T$. Façamos $\Delta v[n] = x[n]$ e $u[n] = \ker[n,k]$. Inicialmente, calculemos a expressão original:

$$\sum_{n=0}^{2} u[n]\Delta v[n] = 2 \times 13 + 4 \times (-5) + (-3) \times (-8) = 30.$$

Encontremos agora o sinal $v[n]$ como se segue:

$$\begin{aligned}v[1] &= v[0] + \Delta v[0] = v[0] + 13, \\ v[2] &= v[0] + \Delta v[0] + \Delta v[1] = v[0] + 8, \\ v[3] &= v[0] + \Delta v[0] + \Delta v[1] + \Delta v[2] = v[0].\end{aligned}$$

Fazendo $v[0] = 0$, obtemos que $\begin{bmatrix} 0 & 13 & 8 \end{bmatrix}$. Aplicando o operador diferença ao sinal $u[n]$, implica que:

$$\begin{aligned} \Delta u[0] &= u[1] - u[0] = 2, \\ \Delta u[1] &= u[2] - u[1] = -7, \\ \Delta u[2] &= u[3] - u[2] = 5. \end{aligned}$$

Note que, pela periodicidade dos sinais, $u[3] = u[0]$. Aplicando a soma por partes como descrita na Proposição 2, obtemos que a expressão acima tem que ser igual a:

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{N-1} \text{shift}(v[n])\Delta u[n] &= -(13 \times 2 + 8 \times (-7) + 0 \times 5) \\ &= 30. \end{aligned}$$

Este exemplo nos leva ao seguinte lema que diz como realizar a operação inversa do operador diferença.

*Lema 5 (Anti-diferença):* Adote $v[0] = 0$. Então

$$v[n] = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i], \quad n = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{4}$$

## V. Somas por Partes Iterada

O procedimento de soma por partes pode ser recursivamente iterado, podendo-se obter expressões em termos de diferenças de ordens mais elevadas e somatórios múltiplos. Para ilustrar o processo, realizaremos inicialmente apenas uma iteração. Posteriormente, uma generalização será fornecida para uma quantidade arbitrária de iterações.

Já foi mostrado que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} u[n]\Delta v[n] = -\sum_{n=0}^{N-1} \text{shift}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i]\right) \Delta u[n].$$

Para realização uma iteração do algoritmo proposto, basta definir novos sinais auxiliares da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta v_2[n] &= \text{shift}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i]\right) \\ u_2[n] &= \Delta u[n]. \end{aligned}$$

Assim, o desenvolvimento algébrico completo assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} u[n]\Delta v[n] &= -\sum_{n=0}^{N-1} \text{shift}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta v[i]\right) \Delta u[n] \\ &= -\sum_{n=0}^{N-1} \Delta v_2[n] u_2[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{shift}(v_2[n])\Delta u_2[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\text{shift}\left(v_2[0] + \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta v_2[i]\right)\right] \Delta(\Delta u[n]) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\text{shift}\left(v_2[0] + \sum_{i_1=0}^{n-1} \text{shift}\left(\sum_{i_2=0}^{i-1} \Delta v[i_2]\right)\right)\right] \\ &\quad \times \Delta_2 u[n], \end{aligned}$$

em que $\Delta_k(x[n])$ é a diferença de ordem $k$ dada por $\Delta_k(x[n]) = \Delta(\Delta_{k-1}(x[n]))$ e $\Delta_0 x[n] = x[n]$.

Cabe agora uma observação. Foi comentado anteriormente que, durante a reconstrução de $v[n]$ a partir de $\Delta v[n]$, a escolha de $v[0]$ não era importante. Entretanto, quando o procedimento de soma por partes é iterado, essa escolha é crucial. O valor inicial deve ser tomados de tal maneira que o sinal reconstruído tenha média nula. Isso pode ser obtido ao se atribuir a $-v[0]$ o valor da média do *termo de reconstrução* $\sum_{i_k=0}^{i_{k-1}-1} \Delta v[i_k]$. Para simplificar a notação, definamos $\overline{\text{shift}}(x[n]) = \text{shift}(x[n] - \bar{x})$, em que $\bar{x}$ é a média de $x[n]$. Assim, vem que:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{N-1} u[n]\Delta v[n] = \\ &\qquad \sum_{n=0}^{N-1} \left[\overline{\text{shift}}\left(\sum_{i_1=0}^{n-1} \overline{\text{shift}}\left(\sum_{i_2=0}^{i_1-1} \Delta v[i_2]\right)\right)\right] \Delta_2 u[n]. \end{aligned}$$

No caso geral, após $r$ iterações, tem-se o seguinte resultado.

*Proposição 4:* Vide expressão (4).

Em última análise, uma soma é trocada por uma outra que pode ser computacionalmente mais atrativa. Por exemplo, na soma original, tem-se multiplicações por $u[n]$, ao passo que a soma por partes oferece multiplicações por $\Delta_k u[n]$, para algum $k$ a depender do número de iterações empregadas. O vetor $\Delta_k u[n]$ pode possuir elementos computacionalmente mais simples de serem manipulados. Ou seja, em situações em que o operador diferença oferecer vetores de complexidade aritmética multiplicativa decrescente, a aplicação da soma por partes é considerável. Por outro lado, é claro que quantidade de adições é significativamente aumentada, quando se compara com a soma original que só apresenta $N-1$ adições. Entretanto, o ponto consiste em possivelmente trocar multiplicações por adições, fenômeno típico da implementação de algoritmos rápidos [14], [24]. É reconhecido que multiplicações são operações mais lentas que adições, exigindo maior quantidade de ciclos de máquina num computador binário.

## VI. Discussão e Conclusão

Nesta exposição, foi realizada uma análise da aplicação da propriedade de soma por partes para o caso particular de sinais discretos periódicos. Foram enunciadas condições necessárias e suficientes para uma versão simplificada da soma por partes.

Essencialmente, a técnica aqui descrita permite reescrever o produto interno de dois sinais em uma forma alternativa. O estado atual dessa pesquisa aponta para a identificação de situações em que aplicação da soma por partes ofereça ganhos computacionais. Uma possibilidade promissora é aplicar esta técnica para o cálculo de transformadas discretas.

De fato, aplicando-se (3) em (2), temos:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \ker[n,k] = -\sum_{n=0}^{N-1} \text{shift}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x[i]\right) \Delta(\ker[n,k]). \tag{5}$$

Fundamentalmente, uma transformada foi reescrita em outra. Note que a complexidade computacional multiplicativa da transformada original (lado esquerdo de (5)) é governada pela

$$\sum_{n=0}^{N-1} u[n]\Delta v[n] = (-1)^r \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \overline{\text{shift}} \left( \sum_{i_1=0}^{n-1} \overline{\text{shift}} \left( \sum_{i_2=0}^{i_1-1} \overline{\text{shift}} \left( \sum_{i_3=0}^{i_2-1} \cdots \left( \sum_{i_r=0}^{i_{r-1}-1} \Delta v[i_r] \right) \right) \right) \right) \right] \Delta_r u[n]. \tag{4}$$

natureza dos elementos de $\ker[n,k]$. Assim, se os elementos de $\Delta(\ker[n,k])$ forem computacionalmente mais simples que os elementos de $\ker[n,k]$, então o método de soma por partes torna-se atrativo. Em trabalho futuro, a técnica descrita neste trabalho será aplicada em diversas transformadas (e.g., transformadas trigonométricas) a fim de identificar casos emque a soma por partes traz significativa vantagem numérica.

Em termos de complexidade computacional, o custo desta "transformação" de transformadas é apenas aditivo, representado pelas operações de diferença (Definição 1) e antidiferença (Lema 5). Estas operações representam custos computacionais de $N$ e $N-1$ adições, respectivamente. Este tipo de "trade-off" aditivo-multiplicativo é frequentemente observado na área de projeto de algoritmos rápidos [25]–[28].

Cabe também observar que o desenvolvimento realizado aqui é diretamente aplicável a sinais e transformadas definidos sobre corpos finitos [29], [30].

Adicionalmente, foi identificada uma conexão entre os elementos fornecidos pelas somas em cascata e os números de Stirling [7], que serão alvo da continuação dessa pesquisa. E, finalmente, os resultados aqui descritos serão levados ao formalismo matricial para maior flexibilidade de implementação em pacotes numéricos, tais como MATLAB/GNU Octave [31] ou R [32].

## AGRADECIMENTOS

O autor registra o apoio financeiro parcial do CNPq e da FACEPE.

## REFERÊNCIAS

[1] M. Bilal and S. Masud, "Efficient computation of correlation coefficient using negative reference in template matching applications," *IET Image Processing*, vol. 6, pp. 197–204, Mar. 2012.

[2] T.-K. Truong, J.-H. Jeng, I. S. Reed, P. C. Lee, and A. Q. Li, "A fast encoding algorithm for fractal image compression using the DCT inner product," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, pp. 529–535, Apr. 2000.

[3] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory*. Signal Processing Series, Prentice Hall, 1998.

[4] Y. Hu and P. C. Loizou, "Evaluation of objective quality measures for speech enhancement," *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 16, pp. 229–238, Jan. 2008.

[5] A. Krishnamurthy and S. McMains, "Accurate GPU-accelerated surface integrals for moment computation," *Computer-Aided Design*, vol. 43, pp. 1284–1295, Oct. 2011.

[6] S. Haykin, ed., *Kalman Filtering and Neural Networks*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[7] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Reading: Addison-Wesley, 1989.

[8] S. W. Lang and B. R. Musicus, "Frequency estimation from phase differences," in *Proceedings of the 1989 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 4, pp. 2140–2143, May 1989.

[9] S. Kay, "Statistically/computationally efficient frequency estimation," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 4, pp. 2292–2295, Apr. 1988.

[10] K. Mattsson, "Boundary procedures for summation-by-parts operators," *Journal of Scientific Computing*, vol. 18, pp. 133–153, Feb. 2003.

[11] K. Mattsson and J. Nordström, "Summation by parts operators for finite difference approximations of second derivatives," *Journal of Compuational Physics*, vol. 199, pp. 503–540, Sept. 2004.

[12] S. Tretter, "Estimating the frequency of a noisy sinusoid by linear regression," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, pp. 832–835, Nov. 1985.

[13] S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: A Computer-based Approach*. McGraw-Hill series in electrical engineering. Communications and signal processing, 1998.

[14] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1999.

[15] G. F. Boudreaux-Bartels and T. Parks, "Discrete Fourier transform using summation by parts," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing* (1827-1830, ed.), vol. 12, Apr. 1987.

[16] G. F. Boudreaux-Bartels, D. W. Tufts, P. Dhir, G. Sadasiv, and G. Fischer, "Analysis of errors in the computation of Fourier coefficients using the arithmetic Fourier transform (AFT) and summation by parts (SBP)," in *Proceedings of the 1989 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 2, pp. 1011–1014, May 1989.

[17] W. L. Briggs and V. E. Henson, *The DFT: An Owners' Manual for the Discrete Fourier Transform*. Society for Industrial Mathematics, 1987.

[18] H. Sorensen, "On computing the discrete Hartley transform," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, pp. 1231–1238, Oct. 1985.

[19] R. N. Bracewell, *The Hartley Transform*. Oxford University Press, 1986.

[20] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, ch. FFT of Real Functions, Sine and Cosine Transforms, pp. 504–515. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2 ed., 1992.

[21] V. Britanak, P. Yip, and K. R. Rao, *Discrete Cosine and Sine Transforms*. Academic Press, 2007.

[22] V. Britaňák, "A unified discrete cosine and discrete sine transform computation," *Signal Processing*, vol. 43, pp. 333–339, May 1995.

[23] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 3 ed., 2000.

[24] R. E. Blahut, *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison-Wesley Pub. Co., 1985.

[25] R. J. Cintra and V. S. Dimitrov, "The arithmetic cosine transform: Exact and approximate algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, pp. 3076–3085, June 2010.

[26] X.-J. Ge, N.-X. Chen, and Z.-D. Chen, "Efficient algorithm for 2-D arithmetic Fourier transform," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, pp. 2136–2140, Aug. 1997.

[27] I. S. Reed, D. W. Tufts, X. Yu, T. K. Truong, M. T. Shih, and X. Yin, "Fourier analysis and signal processing by use of the Möbius inversion formula," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-38, pp. 458–470, Mar. 1990.

[28] I. S. Reed, M. T. Shih, T. K. Truong, E. Hendon, and D. W. Tufts, "A VLSI architecture for simplified arithmetic Fourier transform algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1122–1133, May 1992.

[29] J. M. Pollard, "The fast Fourier transform in a finite field," *Mathematics of Computation*, vol. 25, pp. 365–374, Apr. 1971.

[30] M. M. Campello de Souza, H. M. de Oliveira, R. M. Campello de Souza, and M. M. Vasconcelos, "The discrete cosine transform over prime finite fields," *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3124, pp. 482–487, 2004.

[31] J. W. Eaton, D. Bateman, and S. Hauberg, *GNU Octave Version 3.0.1 Manual: A High-Level Interactive Language For Numerical Computations*. CreateSpace, 2009.

[32] M. J. Crawley, *The R Book*. West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd., 2007.