

Caracterização Espectral de Sinais Caóticos Gerados pelo Mapa de Bernoulli com 2 e 3 Segmentos

Rafael Alves da Costa, Murilo Bellezoni Loiola e Marcio Eisenkraft

Resumo— Nas últimas décadas, inúmeras pesquisas envolvendo aplicações práticas de sinais caóticos em Telecomunicações tem sido realizadas. Embora a análise espectral seja de relevância nessa área, poucos estudos analíticos se preocupam com a caracterização espectral de sinais caóticos. Neste trabalho, estende-se o estudo de trabalhos anteriores, obtendo-se resultados analíticos para sequência de autocorrelação, densidade espectral de potência e banda essencial de sinais caóticos gerados por uma família de mapas lineares por partes com número arbitrário de segmentos. Esses resultados são relevantes para aplicações práticas de sinais caóticos em sistemas de modulação digital.

Palavras-Chave— geradores caóticos, comunicação usando caos, análise espectral, banda essencial.

Abstract— In recent decades, researches involving with practical applications of chaotic signals in Telecommunications have been carried out. Although the spectral analysis is of relevance in this field, few analytical studies concerning the spectral characterization of chaotic signals were published. In this work, we extend previous works, by obtaining analytical results for the autocorrelation sequence, the power spectral density and the essential bandwidth of chaotic signals generated by a family of piecewise linear maps with an arbitrary number of segments. These findings are relevant for practical applications of chaotic signals in digital modulation systems.

Keywords— Chaos generators, chaotic communication, spectral analysis, essential bandwidth.

I. INTRODUÇÃO

Um sinal caótico é limitado em amplitude, aperiódico, determinístico e apresenta dependência sensível às condições iniciais [1]. De forma simplificada, essa última condição implica que sinais gerados por condições iniciais arbitrariamente próximas separam-se exponencialmente assumindo valores bastante distintos após algumas iterações [1].

Atualmente existe um grande número de áreas desenvolvendo pesquisas envolvendo sinais caóticos. Diversos exemplos podem ser encontrados em [20]. Na Engenharia de Telecomunicações, o artigo [16], sobre sincronização de sistemas caóticos e o artigo [8] sobre comunicação com caos, são considerados o marco inicial da pesquisa nessa área. Desde a publicação desses trabalhos, vêm surgindo numerosas possibilidades de aplicações em modulações analógicas e digitais, codificação e criptografia, entre outras áreas [2], [4], [17].

Diversos artigos e livros caracterizam sinais caóticos com tendo “banda larga” e sequência de autocorrelação (SAC) impulsiva [11], [14], [19]. Entretanto, essa caracterização não é suficiente quando se pensa em aplicações práticas. Trabalhos

Rafael Alves da Costa e Murilo Bellezoni Loiola, Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do ABC, Santo André-SP, Brasil, E-mails: fael1928@gmail.com, murilo.loiola@ufabc.edu.br. Marcio Eisenkraft, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, Brasil. E-mails: marcio@lcs.poli.usp.br.

recentes já mostraram também que essa caracterização pode não ser correta em alguns casos. Veja, por exemplo, [3], [5], [6].

No projeto de sistemas de comunicação é fundamental conhecer a Densidade Espectral de Potência (DEP) e a banda essencial dos sinais envolvidos. Nos últimos anos houve algum progresso na determinação da DEP de sinais caóticos gerados por algumas famílias de mapas [6], [7], [9], [10], porém, resultados mais gerais ainda precisam ser encontrados. Neste trabalho, busca-se generalizar esses resultados, obtendo-se fórmulas fechadas para a DEP de mapas unidimensionais lineares por partes com r inclinações distintas. Como forma de verificar os resultados obtidos, verifica-se computacionalmente os casos particulares $r = 2$ e $r = 3$.

O artigo é estruturado da seguinte forma: na Seção 2 define-se o mapa estudado e na Seção 3 deduzem-se sua SAC, sua DEP e sua banda essencial. Na Seção 4, particularizam-se os resultados para o caso $r = 2$ e na Seção 5 o caso $r = 3$. Para esses casos particulares, são mostradas simulações que validam os resultados teóricos. Por fim, na Seção 6 tecem-se as conclusões.

II. O MAPA DE BERNOULLI COM r SEGMENTOS

O mapa de Bernoulli $f_{B_r}(\cdot)$ com r inclinações, em que $r \geq 2$, definido no intervalo $U = [-1, 1]$, é dado por

$$S(n+1) = f_{B_r}(S(n)), \quad (1)$$

em que

$$f_{B_r}(s) = \frac{2s - (\alpha_j + \alpha_{j-1})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}, \quad \alpha_{j-1} \leq s < \alpha_j, \quad (2)$$

sendo $\alpha_0 = -1$, $\alpha_r = 1$ e $\alpha_j \in (-1, 1)$, $j = 1, \dots, r$.

Na Figura 1(a) é mostrado um exemplo do mapa de Bernoulli com $r = 7$ inclinações com $\alpha_1 = -0.5$, $\alpha_2 = -0.3$, $\alpha_3 = -0.1$, $\alpha_4 = 0.2$, $\alpha_5 = 0.7$ e $\alpha_6 = 0.8$. Na Figura 1(b) são mostrados dois trechos de sinais gerados por esse mapa com condições iniciais muito próximas, $S(0) = 0.3$ e $S(0) = 0.300000001$, deixando-se explícita a dependência sensível às condições iniciais.

A densidade invariante $p_*(s)$ do mapa $f_{B_r}(\cdot)$, isto é, a forma com que os pontos dos sinais gerados por esse mapa distribuem-se no intervalo $U = (-1, 1)$, podem ser obtidas pela iteração do operador de Frobenius-Perron $\mathcal{P}(\cdot)$ [12] aplicado a uma densidade inicial qualquer $p(s)$. Sendo $s_1, s_2, \dots, s_{r-1}, s_r$ as contra-imagens de um ponto s , como ilustrado na Figura 2, obtém-se

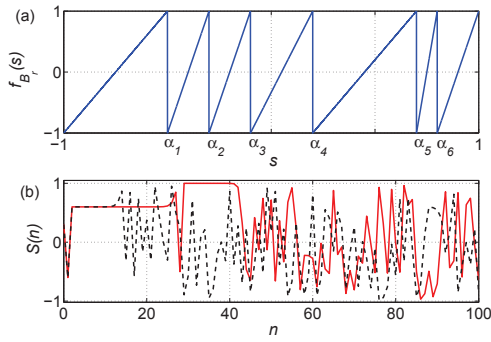


Fig. 1. (a) Mapa de Bernoulli com $r = 7$ inclinações (b) trecho de órbitas do mapa de Bernoulli com $r = 7$ inclinações com $\hat{S}(0) = 0.3$ (linha contínua) e $\hat{S}(0) = 0.300000001$ (linha tracejada).

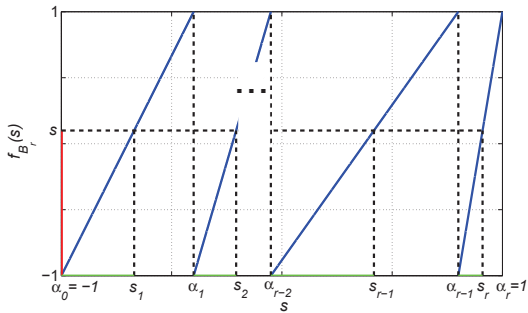


Fig. 2. A contra-imagem do intervalo $[-1, s]$ da família de mapas de Bernoulli com r inclinações é dada por $[-1, s_1] \cup [\alpha_1, s_2] \cup \dots \cup [\alpha_{r-2}, s_{r-1}] \cup [\alpha_{r-1}, s_r]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p(s)) &= \frac{d}{ds} \int_{f^{-1}([-1, s])} p(u) du \\ &= \frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1)p(s_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)p(s_2) + \dots + (1 - \alpha_{r-1})p(s_r)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Note que para $p(s) = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(p(s)) = \frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1)\frac{1}{2} + \dots + (1 - \alpha_{r-1})\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$ [12]. Assim, a densidade invariante para o mapa $f_{B_r}(\cdot)$ é uniforme e dada por

$$p_*(s) = \frac{1}{2}, \text{ para } -1 \leq s \leq 1, \quad (4)$$

independente dos valores escolhidos dos parâmetros.

O valor esperado das órbitas geradas pelo mapa $f_{B_r}(\cdot)$ é

$$\bar{s} = E[s] = \int_{-1}^1 s p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s ds = 0 \quad (5)$$

e sua potência média

$$P_m = E[s^2] = \int_{-1}^1 s^2 p_*(s) ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s^2 ds = \frac{1}{3}. \quad (6)$$

Sabendo que a densidade invariante de sinais gerados pela família de mapas de Bernoulli com r inclinações é uniforme e considerando-se que estes mapas são lineares por partes, os cálculos da SAC e da DEP desses sinais são facilitadas, como é discutido nas seções subsequentes.

III. SEQUÊNCIA DE AUTOCORRELAÇÃO E DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA

Sinais caóticos gerados por mapas unidimensionais como $f_{B_r}(\cdot)$ podem ser tratados como funções amostras de um processo estocástico ergódico [12]. Para um conjunto fixo de parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, o sinal caótico gerado pelo mapa a partir de uma condição inicial $S(0)$ pode ser interpretado como uma função amostra de um processo estocástico definido por $f_{B_r}(\cdot)$. A dedução da SAC para $f_{B_r}(\cdot)$, inspirada na referência [18], é apresentada a seguir.

A SAC $R(k)$ do sinal $S(n)$ para um atraso k é definida por

$$R(k) = E[S(n)S(n+k)]. \quad (7)$$

A esperança matemática $E[\cdot]$ é tomada sobre todas as condições iniciais. Neste cálculo, considera-se $S(n) = 0$ para $n < 0$. Para facilitar a notação define-se

$$x = S(n) \text{ e } y = S(n+k) = f_{B_r}^k(x). \quad (8)$$

Assim, a densidade conjunta $p(x, y)$ é dada por

$$p(x, y) = p_*(x) \delta(y - f_{B_r}^k(x)), \quad (9)$$

em que $p_*(\cdot)$ é a densidade invariante do mapa $f_{B_r}(\cdot)$ e $\delta(\cdot)$ representa a função delta de Dirac. Desta forma, como $U = [-1, 1]$, utilizando-se (7), tem-se para os mapas $f_{B_r}(\cdot)$

$$\begin{aligned} R(k) &= E[xy] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xyp(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f_{B_r}^k(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Dessa forma, para obter $R(k)$ é necessário encontrar uma fórmula fechada para $f_{B_r}^k(x)$.

A imagem de cada um dos r segmentos que formam o mapa $f_{B_r}(\cdot)$ é igual ao domínio U do mapa. Assim, o gráfico $f_{B_r}^k(\cdot)$ consiste de r^k segmentos. Na Figura 3(a), tem-se o mapa $f_{B_r}(x)$. Na Figura 3(b) é apresentado o gráfico de $f_{B_r}^2(x)$ e na Figura 3(c) é mostrado um trecho do gráfico de $f_{B_r}^k(x)$ para um k genérico. Representa-se a m -ésima solução da equação $f_{B_r}^k(x) = 1$ por $a_k(m)$, em que $1 \leq m \leq r^{k-1}$.

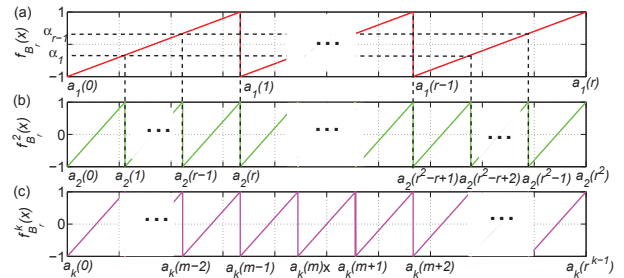


Fig. 3. (a) Mapa Bernoulli com r inclinações $f_{B_r}(x)$; (b) $f_{B_r}^2(x)$; (c) $f_{B_r}^k(x)$

O segmento que passa por $(a_k(m-1), -1)$ e $(a_k(m), 1)$ é dado por

$$y = \frac{2x - (a_k(m) + a_k(m-1))}{a_k(m) - a_k(m-1)}. \quad (11)$$

Substituindo-se (11) em (10) obtém-se

$$R(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r^{k-1}} \left[\int_{a_k(m-1)}^{a_k(m)} \left(\frac{2x^2 - (a_k(m) + a_k(m-1))x}{a_k(m) - a_k(m-1)} \right) dx \right]. \quad (12)$$

Resolvendo a integral (12) tem-se

$$R(k) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^{k-1}} [(a_k(m) - a_k(m-1))^2]. \quad (13)$$

Procurando-se obter uma fórmula mais simples para $R(k)$, busca-se uma forma recursiva para $R(k+1)$ em função de $R(k)$.

Ao iterar uma vez o mapa, passa-se de $f_{B_r}^k(x)$ para $f_{B_r}^{k+1}(x)$, cuja generalização pode ser feita a partir das Figuras 4(a) e 4(b), em que $w_{m,1}, w_{m,2}, \dots$ e $w_{m,r-1}$ são as raízes das equações $f_{B_r}^k(x) = \alpha_1, f_{B_r}^k(x) = \alpha_2, \dots$ e $f_{B_r}^k(x) = \alpha_{r-1}$, respectivamente, no intervalo $[a_k(m-1), a_k(m)]$.

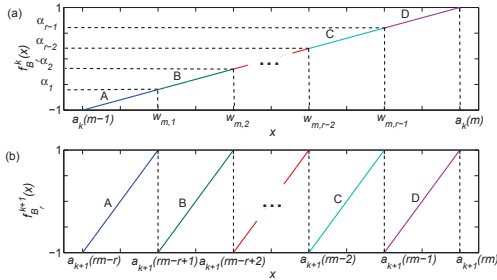


Fig. 4. (a) Trecho do mapa genérico $f_{B_r}^k(x)$ e (b) trecho desse mapa após uma iteração $f_{B_r}^{k+1}(x)$.

Para determinar $w_{m,1}, w_{m,2}, \dots$ e $w_{m,r-1}$ substitui-se y por $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e x por $w_{m,1}, w_{m,2}, \dots$ e $w_{m,r-1}$ em (11). Desta forma, tem-se

$$w_{m,j} = \frac{(a_k(m) - a_k(m-1))\alpha_j + (a_k(m) + a_k(m-1))}{2}. \quad (14)$$

Relacionando-se os gráficos da Figura 4, observa-se que $a_{k+1}(rm-r) = a_k(m-1)$, $a_{k+1}(rm-r+1) = w_{m,1}$, $a_{k+1}(rm-r+2) = w_{m,2}, \dots$ e $a_{k+1}(rm) = a_k(m)$.

Calculando-se $R(k+1)$ a partir de (13), obtém-se

$$R(k+1) = \frac{1}{12} \sum_{m=1}^{r^k} [(a_{k+1}(m) - a_{k+1}(m-1))^2]. \quad (15)$$

Pelas relações inferidas da Figura 4 obtém-se

$$R(k+1) = \frac{\psi}{12} \sum_{m=1}^{r^{k-1}} [(a_k(m) - a_k(m-1))^2], \quad (16)$$

em que

$$\psi_r = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{r-1} (\alpha_j^2 - \alpha_j \alpha_{j+1}). \quad (17)$$

Comparando-se (13) e (16), observa-se que

$$R(k+1) = \psi_r R(k). \quad (18)$$

Dessa forma, resolvendo a equação a diferenças (18) com a condição inicial dada em (6) $R(0) = P_m = \frac{1}{3}$ e usando a simetria de $R(k)$, obtém-se

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi_r^{|k|}. \quad (19)$$

A DEP $P(\omega)$ é obtida calculando-se a Transformada de Fourier de Tempo Discreto de $R(k)$, considerando-se k a variável temporal [15]. Assim, a DEP de (19), é dada por

$$P(\omega) = \frac{1 - \psi_r^2}{3(1 + \psi_r^2 - 2\psi_r \cos(\omega))}. \quad (20)$$

A partir da DEP (20), é possível obter a banda essencial B do sinal, que é definida como o comprimento do intervalo de frequência em que $q = 95\%$ da potência do sinal está concentrada [13]. Para calcular a banda essencial B utiliza-se o mesmo procedimento utilizado em [10], obtendo-se

$$B = 2 \arctan \left[\tan \left(\frac{q\pi}{2} \right) \left| \frac{\psi_r - 1}{\psi_r + 1} \right| \right]. \quad (21)$$

A fim de validar numericamente os resultados analíticos obtidos, nas próximas duas seções são analisadas a SAC, a DEP e a banda essencial para os casos particulares em que $r = 2$ e $r = 3$. Para esses casos já foram obtidos resultados similares na literatura [3], [6].

IV. VALIDAÇÃO NUMÉRICA: CASO $r = 2$

Para o caso $r = 2$, $f_{B_r}(\cdot)$ reduz-se ao mapa estudado em [3]. Substituindo $r = 2$ nas expressões (17) e (19), tem-se

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi_2^{|k|}, \quad (22)$$

com $\psi_2 = \frac{(1+\alpha_1^2)}{2}$. Este resultado é equivalente a (16) de [3].

Na Figura 5 são ilustrados gráficos da SAC para alguns valores de α_1 . Nota-se que os resultados analíticos coincidem com os obtidos numericamente.

Na Figura 6 são mostradas curvas da DEP para alguns valores de α_1 e na Figura 7 é apresentado, de forma normalizada, o comportamento geral da DEP para todos os valores de α_1 .

Nota-se nas Figuras 6 e 7 que, no caso do mapa $f_{B_2}(\cdot)$ a DEP para todos os valores de α_1 é passa-baixas, diferente do que ocorre com a DEP para o mapa tenda inclinada, por exemplo [10]. Nota-se também que para nenhum α_1 obtém-se um espectro plano. Assim, pelos gráficos apresentados observa-se que o parâmetro da família controla a forma como a potência está distribuída na frequência.

A Figura 8 mostra gráficos da banda essencial B em função do módulo de α_1 . Observa-se sinais caóticos passa-baixas com banda estreita para $|\alpha_1| \approx 1$.

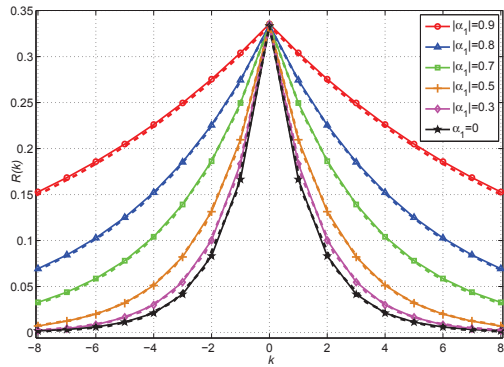


Fig. 5. SAC para sinais do mapa $f_{B_2}(\cdot)$ para alguns valores de $|\alpha_1|$. Em linha tracejada estão as curvas analíticas e em linha cheia, as curvas obtidas via simulação numérica.

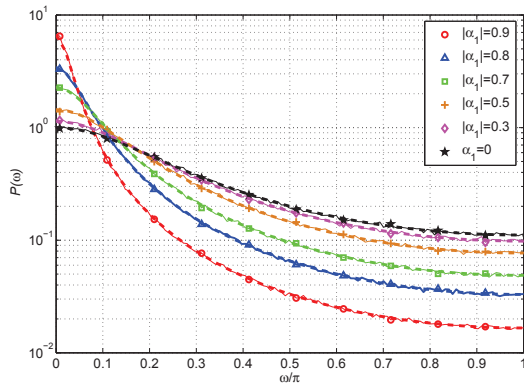


Fig. 6. DEP para sinais do mapa $f_{B_2}(\cdot)$ para alguns valores de α_1 . Em linha tracejada estão as curvas analíticas e em linha cheia as curvas obtidas via simulação numérica.

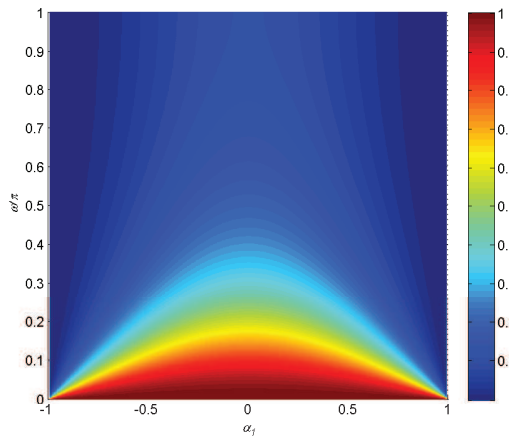


Fig. 7. Comportamento geral da DEP normalizada para os valores admissíveis de α_1 .

V. VALIDAÇÃO NUMÉRICA: CASO $r = 3$

Para $r = 3$,

$$R(k) = \frac{1}{3} \psi_3^{|k|}, \quad (23)$$

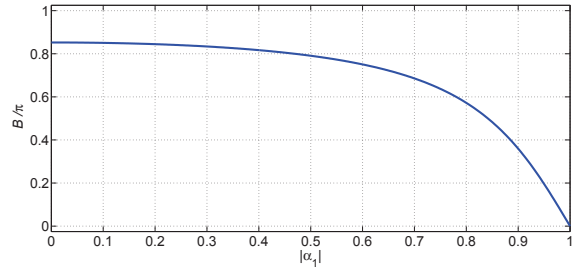


Fig. 8. Banda essencial em função de $|\alpha_1|$.

com

$$\psi_3 = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1 - \alpha_2 + 1)}{2}. \quad (24)$$

Considerando-se $\alpha_2 = -\alpha_1$, obtém-se um mapa semelhante ao estudado em [6]. Nesse caso, tem-se $\psi_3 = \frac{(3\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1)}{2}$.

Utilizando (23) e (24) em (20) e (21) obtêm-se, respectivamente, a DEP e a banda essencial para esse mapa.

Na Figura 9 é ilustrada a SAC para alguns valores de α_1 . Nota-se que a SAC para o mapa $f_{B_3}(\cdot)$, quando $\alpha_1 \approx 1$, decai de forma lenta e quando $\alpha_1 \approx \frac{1}{3}$, decai de forma mais rápida. Nota-se, também, que os resultados numéricos na Figura 9 validam a expressão (23).

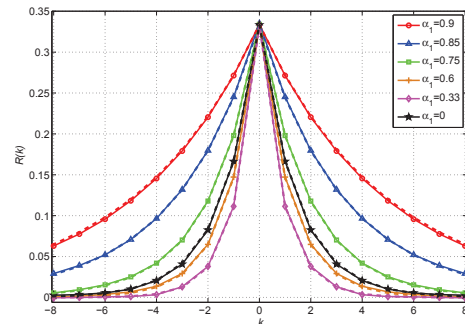


Fig. 9. SAC para sinais do mapa $f_{B_3}(\cdot)$ para alguns valores de α_1 no intervalo $(0, 1)$. Em linha tracejada estão as curvas analíticas e em linha cheia, as curvas obtidas via simulação numérica.

Na Figura 10 são mostrados gráficos da DEP do mapa $f_{B_3}(\cdot)$ para alguns valores de α_1 e na Figura 11 é apresentado o comportamento geral da DEP normalizada para todos os valores de $\alpha_1 \in (0, 1)$. Nota-se que o espectro da DEP, para qualquer valor de α_1 , assume a forma de passa-baixas. Dessa forma, quanto mais próximo o parâmetro da família estiver de um, mais estreita é a banda do sinal resultante e, quanto mais próximo de $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, mais uniforme é a distribuição espectral da potência. Para esse valor de α_1 as três inclinações possuem mesmo coeficiente angular. Observa-se na Figura 10 a equivalência entre os resultados analíticos e os numéricos.

Na Figura 12 é mostrada a banda essencial em função de α_1 no intervalo $(0, 1)$. Nota-se que com $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ a potência está com máxima distribuição espectral na banda B . Já para $\alpha_1 \approx 1$, as órbitas são funções amostras de um processo de banda estreita.

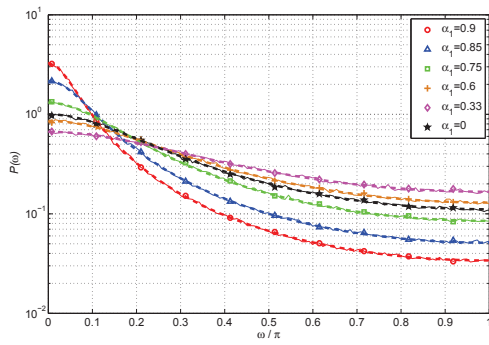


Fig. 10. DEP para sinais do mapa $f_{B_3}(\cdot)$ para alguns valores de α_1 . Em linha tracejada estão as curvas analíticas e em linha cheia as curvas obtidas via simulação numérica.

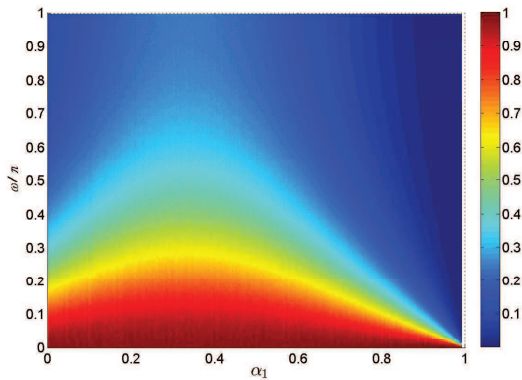


Fig. 11. Comportamento geral da DEP normalizada para os valores admissíveis de α_1 .

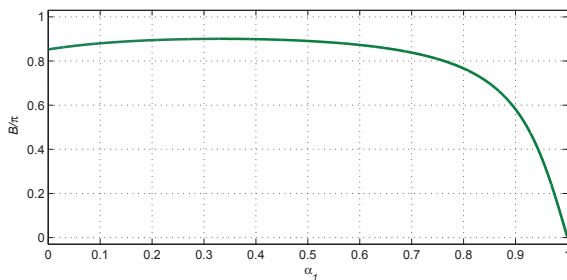


Fig. 12. Banda essencial em função de α_1 .

VI. CONCLUSÕES

Para aplicações práticas na área de Telecomunicações é fundamental conhecer e controlar as características espectrais dos sinais envolvidos. Neste artigo, deduzem-se a SAC, a DEP e a banda essencial para as órbitas do mapa de Bernoulli com r inclinações. Em particular, foram analisados, teórica e numericamente, os casos com $r = 2$ e $r = 3$ inclinações. Esses resultados podem ser úteis no projeto e implementação de sistemas de comunicação baseados em caos que venham a utilizar esses mapas. No momento, os autores estão trabalhando nesse aspecto.

AGRADECIMENTOS

ME gostaria de agradecer ao suporte financeiro do CNPq, processos 479901/2013-9 e 311575/2013-7 e da FAPESP, processo 2014/04864-2. MBL gostaria de agradecer ao suporte financeiro da FAPESP processo 2013/25977-7.

REFERÊNCIAS

- [1] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer, 1997.
- [2] M. Baptista. Cryptography with chaos. *Physics Letters A*, 240:50 – 54, 1998.
- [3] R. A. da Costa, M. B. Loiola, and M. Eisencraft. Spectral properties of chaotic signals generated by the bernoulli map. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, 8(2):12–16, 2015.
- [4] M. Eisencraft, R. R. F. Attux, and R. Suyama, editors. *Chaotic Signals in Digital Communications*. CRC Press, Inc., 2013.
- [5] M. Eisencraft and D. M. Kato. Spectral properties of chaotic signals with applications in communications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(12):e2592 – e2599, 2009.
- [6] K. Feltekh, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Analytical expressions for power spectral density issued from one-dimensional continuous piecewise linear maps with three slopes. *Signal Processing*, 94(0):149 – 157, 2014.
- [7] K. Feltekh, Z. B. Jemaa, D. Fournier-Prunaret, and S. Belghith. Border collision bifurcations and power spectral density of chaotic signals generated by one-dimensional discontinuous piecewise linear maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(8):2771–2784, 2014.
- [8] C. Grebogi and E. Ott. Communicating with chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 70(20):3031–3034, 1993.
- [9] D. M. Kato and M. Eisencraft. Caracterização espectral de sinais caóticos. In *Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, volume 1. Sociedade Brasileira de Telecomunicações, 2007.
- [10] D. M. Kato and M. Eisencraft. Caracterização espectral de sinais caóticos: resultados analíticos. In *Anais do XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Rio de Janeiro, 2008. Sociedade Brasileira de Telecomunicações.
- [11] M. P. Kennedy, G. Setti, and R. Rovatti, editors. *Chaotic Electronics in Telecommunications*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2000.
- [12] A. Lasota and M. MacKey. *Probabilistic properties of deterministic systems*. Cambridge University Press, 1985.
- [13] B. P. Lathi. *Modern Digital and Analog Communication Systems*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 4.ed edition, 2009.
- [14] F. C. M. Lau and C. K. Tse. *Chaos-based digital communication systems*. Springer, Berlin, 2003.
- [15] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice Hall Press, Upper Saddle River, NJ, USA, 3rd edition, 2009.
- [16] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64(8):821–824, Feb. 1990.
- [17] H.-P. Ren, M. S. Baptista, and C. Grebogi. Wireless communication with chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 110:184101, Apr 2013.
- [18] H. Sakai and H. Tokumaru. Autocorrelations of a certain chaos. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 28(5):588–590, Oct. 1980.
- [19] P. Stavroulakis, editor. *Chaos Applications in Telecommunications*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2005.
- [20] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus Books Group, January 2001.