

Estimação de Frequência Usando Transformadas Warped

Alam Silva Menezes e Moisés Vidal Ribeiro

Resumo—O presente trabalho aborda o problema de estimação de frequência de sinais monocomponentes. Nesse sentido, o presente trabalho propõe a combinação de técnicas de interpolação em frequência com as transformadas baseadas no mapeamento *warped*, sendo propostas duas transformadas *warped* (WDHT e WMCLT) inéditas na literatura. As técnicas de estimação de frequência propostas foram avaliadas comparando a variância de estimação em função do número de amostras em frequência (N) e o valor da relação sinal ruído (SNR). Verifica-se que a técnica proposta no presente trabalho chamada de MI-WDFT apresenta o melhor desempenho para os três cenários avaliados, evidenciando a capacidade de proporcionar elevada precisão de estimação, além de baixo custo computacional.

Palavras-Chave—Estimação de frequência, transformada *warped*, WDHT, WMCLT.

Abstract—The present work introduces new techniques to the problem of frequency estimation for single component signals. Essentially, this work proposes the combination of interpolation based techniques with warped transforms in order to achieve low estimation variance and reduced computational complexity. In order to assess the propose techniques we have used computer simulations to compare the variance of estimation as a function of number of frequency samples (N) and signal to noise ratio (SNR). The simulations results have shown that the proposed technique, which is called MI-WDFT, achieve better performance for the three chosen and representative scenarios. The attained results indicate that it is possible to achieve high accuracy in estimation with low complexity.

Keywords—Frequency estimation, warped transform, WDHT, WMCLT.

I. INTRODUÇÃO

Estimar a frequência de um sinal senoidal corrompido por ruído aditivo é um problema largamente estudado em processamento de sinais [1]. Basicamente, as técnicas de estimação de frequência utilizam dois passos fundamentais. O primeiro passo consiste em obter as amostras do sinal no domínio da frequência, utilizando transformadas discretas, por exemplo a *Discrete Fourier Transform* (DFT). O segundo passo fundamenta-se na interpolação das amostras do sinal no domínio da frequência, localizados no entorno do ponto de máxima amplitude dos valores absolutos das amostras em frequência do sinal.

O desempenho dos estimadores de frequência baseados na interpolação das amostras em frequência aumenta consideravelmente para valores elevados de N , o que impacta o custo computacional das transformadas. Por outro lado, reduzir o número de amostras N , aumenta a variância de estimação

em frequência. O principal desafio é desenvolver técnicas de estimação proporcionando elevada precisão e baixo custo computacional, concomitantemente.

As principais técnicas baseadas na interpolação em frequência demandam transformadas com elevado número de pontos para garantir uma boa precisão [2], [3] e [4]. Para contornar esse problema, [5] propõe uma técnica de estimação de frequência baseada na transformada *warped* DFT (WDFT). Essencialmente, [5] deriva uma técnica baseada na WDFT e na interpolação das amostras em frequência com baixo custo computacional, ou seja, reduzido número de amostras em frequência e elevada precisão espectral. Entretanto, o procedimento proposto em [5] utiliza na etapa inicial uma estimação grosseira da frequência para ajustar a WDFT. Verifica-se que essa estratégia degrada o desempenho da técnica em termos de precisão e custo computacional, posto que o algoritmo demanda mais iterações para convergir para solução desejada.

O presente trabalho propõe uma modificação na etapa inicial do procedimento proposto [5] visando aumentar a precisão na etapa inicial do procedimento de estimação, diminuindo assim o número de iterações necessárias para convergência. Adicionalmente, propomos duas transformadas *warped* baseadas nas transformadas *discrete Hartley transform* (DHT) e *modulated complex lapped transform* (MCLT), ambas inéditas na literatura. Incorporamos as técnicas de interpolação propostas em [2] e [3] ao procedimento proposto em [5], assim como utilizamos as transformadas *warped* propostas no presente trabalho para derivar três novas técnicas de estimação de frequência com reduzido custo computacional e elevada precisão de estimação, mesmo para baixas condições de relação sinal ruído (SNR).

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O processo de estimação de frequência apresentado em [5] dá-se da seguinte forma.

Seja o sinal monocomponente dado por

$$y[n] = Ae^{i(\omega_1 n + \phi)} + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

em que $A \in \mathbb{R}$ é a amplitude do sinal, $\omega_1 \in \mathbb{R}$ é a frequência em radianos por amostra que se deseja estimar, $\phi \in \mathbb{R}$ é a fase do sinal em radianos ($-\pi < \phi \leq \pi$) e $w[n] \in \mathbb{C}$ é o ruído aditivo gaussiano e branco de variância σ_w^2 e média nula. O sinal é levado para o domínio da frequência, aplicando uma transformada genérica, mapeando o sinal no domínio do tempo para o domínio da frequência com o operador $T\{\cdot\}$, ou seja,

$$Y[k] = T\{y[n]\}, \quad (2)$$

em que $Y[k] \in \mathbb{C}$ é o sinal no domínio da frequência, com $k = 0, 1, \dots, N-1$, sendo k o índice associado à k -ésima frequência discreta normalizada, $\omega_k = 2\pi k/N$.

Na sequência, assumindo

$$m = \arg \max_k |Y_T[k]|, \quad (3)$$

em que m é o índice da frequência discreta associado ao maior valor absoluto de $\{|Y[k]|\}_0^{N-1}$, pode-se obter uma estimativa inicial da frequência ω_1 dada por

$$\hat{\omega}_1 = \frac{2\pi}{N}m. \quad (4)$$

A frequência ω_1 pode ser parametrizada em função do índice m e $\Delta \in \mathbb{R}$ tal como apresentado na sequência

$$\omega_1 = (m + \Delta) \frac{2\pi}{N}, \quad (5)$$

em que $|\Delta| < 0,5$.

Analisando as equações (4) e (5), verifica-se que o erro de estimação pode se aproximar assintoticamente de zero à medida que $N \rightarrow \infty$, o que significa aumentar a resolução em frequência ($2\pi/N$) da transformada discreta $T\{\cdot\}$. Por outro lado, sabe-se que aumentar o valor N , implica em aumento do custo computacional, sobretudo para as transformadas que não dispõem de versões rápidas.

III. TRANSFORMADAS *Warped*s

A. *Warped Discrete Fourier Transform (WDFT)*

Uma modificação na transformada z utilizando um filtro passa tudo para distribuir as amostras em frequência de maneira não uniforme sobre o círculo de raio unitário é proposta originalmente em [6]. Baseado na proposta apresentada [6], [5] introduz a *warped discrete Fourier Transform (WDFT)*. Para derivar a WDFT, [5] propõe amostrar o círculo de raio unitário em N pontos igualmente espaçado, considerando a transformada z modificada expressa por

$$\bar{Y}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] B(z)^n, \quad (6)$$

em que z^{-1} é substituído pelo filtro passa-tudo $B(z)$. Com a introdução do filtro passa-tudo, a escala em frequência é deformada, consequentemente as amostras uniformemente obtidas no círculo de raio unitário de $Y(z)$ são mapeadas em amostras não uniformemente espaçadas, ou seja, as amostras são concentradas ao redor de uma frequência específica. Para a WDFT,

$$B(z) = \frac{a^* + z^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad (7)$$

em que $a \in \mathbb{C} \mid a = \alpha e^{i\varphi}$ é o parâmetro do filtro passa-tudo $B(z)$ de primeira ordem e a^* seu conjugado, conforme proposto em [5]. Sendo o nível de concentração das amostras, isto é, a resolução em frequência e a frequência onde deseja-se concentrar as amostras determinados pelos parâmetros α e φ , respectivamente.

Assumindo $\omega = \arg\{e^{i\omega}\}$, similarmente define-se $\varpi = \arg\{B(z)^{-1}\}$, sendo ϖ a frequência *warped* em radianos por amostra. Desta forma, o mapeamento entre as frequências normalizada ω e a frequência *warped* é expresso por

$$\begin{aligned} \varpi &= \arg\left\{\frac{1 + az^{-1}}{a^* + z^{-1}}\right\} \\ &= \omega + 2 \tan^{-1}\left(\frac{\alpha \sin(\varphi - \omega)}{1 + \alpha \cos(\varphi - \omega)}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

B. *Proposição: Warped Discrete Hartley Transform*

A transformada Discreta Hartley (DHT) de uma sequência no domínio do tempo discreto $\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$ é definida por:

$$Y_{DHT}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \text{cas}\left(\frac{2\pi}{N}kn\right), \quad (9)$$

em que $\{Y_{DHT}[k]\}_{k=0}^{N-1}$ são as amostras reais no domínio da frequência de discreta da sequência $\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$ e $\text{cas}(\cdot) \triangleq \cos(\cdot) + \sin(\cdot)$.

Neste trabalho, derivamos duas versões da *warped-DHT (WDHT)*. Para tal, utilizando a identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$, pode-se expressar a transformada definida em (9) em termos do parâmetro z^{-1} , conforme apresentado na sequência

$$\begin{aligned} Y_{DHT}[k] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \left[\frac{e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} + e^{i\frac{2\pi}{N}kn}}{2} + \frac{e^{i\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \left[(i+1)e^{i\frac{2\pi}{N}kn} + (i-1)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

sendo a forma como a DHT é expressa em (10) a principal diferença da abordagem apresentada em [7] para derivar a WDHT.

Expressando a equação (10) em termos do parâmetro z^{-1} da transformada z , chega-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} Y_{DHT}\left[\frac{N}{2\pi} \arg\{z\}\right] &= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \left[(i+1)(z^{-1})^{-n} + (i-1)(z^{-1})^n \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo o parâmetro z^{-1} na equação (11) por $B(z)$ obtém-se a primeira versão da WDHT:

$$\begin{aligned} Y_{WDHT}\left(\frac{N}{2\pi} \varpi_k\right) &= \frac{1}{2i\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \left[(i+1) \times \right. \\ &\left. \left(\frac{a^* + e^{-i2\pi k/N}}{1 + ae^{-i2\pi k/N}}\right)^{-n} + (i-1) \left(\frac{a^* + e^{-i2\pi k/N}}{1 + ae^{-i2\pi k/N}}\right)^n \right], \end{aligned} \quad (12)$$

em que $\varpi_k \triangleq \arg\left\{B(z)\Big|_{z=e^{i\frac{2\pi k}{N}}}\right\}$.

Considerando que os tons estão sobre o círculo de raio unitário, tem-se que $z = \exp(i2\pi k/N)$ e $\arg\{z\} = 2\pi k/N$.

Desta forma, a equação (9) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Y_{DHT} \left[\frac{N}{2\pi} \arg \{z\} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \operatorname{cas}(\arg \{z\} n). \quad (13)$$

Substituindo o parâmetro z por $B(z)^{-1}$, tem-se

$$Y_{WDHT} \left[\frac{N}{2\pi} \arg \{B(z)^{-1}\} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \operatorname{cas} \left(\arg \{B(z)^{-1}\} n \right). \quad (14)$$

Empregando o mapeamento obtido em (8), deriva-se a segunda versão da WDHT:

$$Y_{WDHT} \left(\frac{N}{2\pi} \varpi_k \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \operatorname{cas} \left[\left(\frac{2\pi}{N} k + 2 \tan^{-1} \left(\frac{\varphi \operatorname{sen} \left(\varphi - \frac{2\pi}{N} k \right)}{1 + \alpha \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{N} k \right)} \right) \right) n \right], \quad (15)$$

em que a frequência *warped* é expressa por

$$\varpi_k = \frac{2\pi}{N} k + 2 \tan^{-1} \left(\frac{\alpha \sin(\varphi - 2\pi k/N)}{1 + \alpha \cos(\varphi - 2\pi k/N)} \right), \quad (16)$$

para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Note que a segunda versão (15) requer apenas operações com números reais, ao passo que a versão proposta em [7] necessita de operações com números complexos para o cálculo da transformada.

C. Proposição: Warped Modulated Complex Lapped Transform

A transformada *Modulated Complex Lapped* (MCLT) de uma sequência $\{y[n]\}_{n=0}^{N-1}$ proposta em [8] é definida por:

$$Y_{MCLT}[k] = \sqrt{\frac{4}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] y[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} [(k+\frac{1}{2})(n+\frac{N/2+1})]}, \quad (17)$$

em que $h[n] = -\operatorname{sen}[(n+1/2)\pi/2N]$.

Rearranjando a equação (17) em termos do parâmetro $e^{-i \frac{2\pi}{N} k}$, chega-se ao seguinte resultado

$$Y_{MCLT}[k] = \sqrt{\frac{4}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] y[n] \left(e^{-i \frac{2\pi}{N} k} \right)^{(n+\frac{N/2+1})} e^{-i \frac{\pi}{N} (n+\frac{N/2+1})}. \quad (18)$$

Expressando a equação (18) em termos do parâmetro z^{-1} tem-se

$$Y_{MCLT} \left[\frac{N}{2\pi} \arg \{z\} \right] = \sqrt{\frac{4}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] y[n] (z^{-1})^{(n+\frac{N/2+1})} e^{-i \frac{\pi}{N} (n+\frac{N/2+1})}. \quad (19)$$

Substituindo o parâmetro z^{-1} pelo filtro passa-tudo $B(z)$, tem-se a *warped-MCLT*:

$$Y_{WMCLT} \left(\frac{N}{2\pi} \varpi_k \right) = \sqrt{\frac{4}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} h[n] y[n] \times \left(\frac{a^* + e^{-i \frac{2\pi}{N} k}}{1 + a e^{-i \frac{2\pi}{N} k}} \right)^{(n+\frac{N/2+1})} e^{-i \frac{\pi}{N} (n+\frac{N/2+1})}, \quad (20)$$

para $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

IV. TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO DE FREQUÊNCIA

A. Métodos Baseados em Interpolação

Utilizando as amostras em frequência no entorno do índice m definido em (3), é possível empregar técnicas de interpolação para estimar o parâmetro Δ e refinar o estimador. Neste sentido, [2] propôs a técnica baseada nos valores absolutos da DFT no entorno do índice m ($|Y_{DFT}[m-1]|$ e $|Y_{DFT}[m+1]|$) para estimar o parâmetro Δ , ou seja,

$$\hat{\Delta} = \zeta \frac{|Y_{DFT}[m+1]|}{|Y_{DFT}[m+1]| + |Y_{DFT}[m]|}, \quad (21)$$

em que $\zeta = 1$ para $|Y_{DFT}[m+1]| > |Y_{DFT}[m-1]|$ ou $\zeta = -1$ para $|Y_{DFT}[m+1]| < |Y_{DFT}[m-1]|$. Obtendo assim o estimador dado por

$$\hat{\omega}_1 = \left(m + \hat{\Delta} \right) \frac{2\pi}{N}. \quad (22)$$

Verifica-se que o estimador (22) não explora a informação de fase das amostras do sinal em frequência, obtidas a partir da DFT.

Em [3], é apresentado um estimador que utiliza a informação de fase do sinal em frequência, empregando cinco amostras do sinal centradas no índice m . O estimador proposto em [3] utiliza $r_e = Y_{DFT}[m]$, o valor de pico da DFT, como referência tal como apresentado na sequência

$$C_m[k] = \Re \{ Y_{DFT}[k+m] r_e^* \}, \quad (23)$$

em que $k = \{-2, -1, 0, +1, +2\}$ e $\Re \{ \cdot \}$ é operador que retorna a parte real do argumento.

A partir da sequência (23), [3] propõe o estimador expresso por:

$$\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_c + \frac{(2, 5\hat{\Delta}_c + 0, 15\operatorname{sen}(2\pi\hat{\Delta}_c))}{N^2}, \quad (24)$$

em que $\hat{\Delta}_c$ é definido como sendo

$$\hat{\Delta}_c = 0,4041 \arctan(2,93\gamma), \quad (25)$$

sendo γ definido como

$$\gamma = \frac{4(C_m[-1] - C_m[1]) + 2(C_m[-2] - C_m[2])}{12C_m[0] + C_m[-2] + C_m[2] + 8(C_m[-1] + C_m[1])}. \quad (26)$$

A partir de $\hat{\Delta}$, equação (24), deriva-se o estimador proposto em [3] como sendo

$$\hat{\omega}_1 = \left(m + \hat{\Delta} \right) \frac{2\pi}{N}. \quad (27)$$

B. Método Baseado na WDFT

A técnica proposta em [5] consiste nos seguintes passos:

- 1) Obtém-se uma estimativa grosseira da frequência identificando o maior valor absoluto da DFT do sinal:

$$\hat{\omega}_1 = \frac{2\pi}{N}m. \quad (28)$$

- 2) Aplica-se a transformada *warped* com o parâmetro $a = \alpha e^{i\hat{\omega}_1}$ centrado exatamente na frequência estimada no passo anterior. Em [5] é apresentado uma fórmula empírica para determinar o valor de α em função de N e do percentual de concentração dos tons no entorno da frequência $\hat{\omega}_1$. Com os valores do sinal em frequência *warped* concentrados próximos ao lóbulo principal, obtém-se uma estimativa mais refinada ao identificar a frequência com maior valor absoluto, a qual é dada por

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{2\pi}{N}p, \quad (29)$$

em que $p = \arg \max_k |Y_{WT}[k]|$.

- 3) Repete-se o passo anterior com o parâmetro a centrado no valor máximo identificado no passo 2, caso a diferença entre a estimativa do passo 2 e a estimativa do passo 1 seja maior que um determinado limiar.

V. PROPOSIÇÃO DE NOVAS TÉCNICAS DE ESTIMAÇÃO DE FREQUÊNCIA

A técnica proposta em [5] utiliza uma estimativa grosseira para ajustar o parâmetro a da transformada WDFT. A fim de melhorar essa estimativa inicial, propomos aplicar a técnica de interpolação descrita em [3] para obter uma estimativa inicial mais apurada. Com o valor de $\hat{\omega}_1$ obtido pelo processo de interpolação (27), obtém-se uma estimativa mais refinada, centrando os tons da WDFT mais próximos da frequência a ser estimada, ω_1 . Utilizou-se esse procedimento para as transformadas WDHT e WMCLT, gerando novas técnicas para estimação de frequência. Contudo, dado que o interpolador proposto em [3] necessita de uma referência de fase (23), verifica-se experimentalmente que o mesmo não apresenta bons resultados quando utilizado com as transformadas DHT e MCLT. Assim sendo, empregou-se o interpolador proposto em [2], equação (21), para refinar a estimativa inicial e na sequência aplicar a transformada *warped* equivalente. Adicionalmente, limitamos o número de interações do algoritmo impondo uma condição de parada ($s = 2$).

O **Algoritmo 1** é proposto, no qual $Y_T[k]$ é a k -ésima amostra em frequência do sinal $y[n]$, obtida com uma das transformadas DFT, DHT ou MCLT, representadas genericamente pela transformada $T\{\cdot\}$. Ao passo que o termo $T_W^a\{\cdot\}$ representa WDFT, WDHT ou WMCLT, ajustadas com o parâmetro a . Em outras palavras, o presente trabalho propõe as seguintes técnicas:

- MI-WDFT: estimador baseado no interpolador Macleod (27) e nas DFT e WDFT;
- AI-WDHT: estimador baseado no interpolador Abatzoglou (21) e nas DHT e WDHT;
- AI-WMCLT: estimador baseado no interpolador Abatzoglou (21) e nas MCLT e WMCLT.

Algoritmo 1: Estimador de Frequência

Entrada: $\{y[n]\}_0^{N-1}$

Saída: $\tilde{\omega}_1$

início

$Y_T[k] = T\{y[n]\};$

$m = \arg \max_k \{|Y_T[k]|\}_0^{N-1};$

$\hat{\Delta} = \text{interp}(|Y_T[m-1]|, |Y_T[m]|, |Y_T[m+1]|);$

$\hat{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1 = (m + \hat{\Delta})2\pi/N;$

$s = 0;$

repita

$a = \alpha e^{i\hat{\omega}_1};$

$Y_{WT}[k] = T_W^a\{y[n]\};$

$p = \arg \max_k |Y_{WT}[k]|;$

$\hat{\omega}_p = \frac{2\pi}{N}p + 2 \arctan\left(\frac{|a| \text{sen}(\varphi - p2\pi/N)}{1 + |a| \cos(\varphi - p2\pi/N)}\right);$

$\tilde{\omega}_1 = \text{interp}(\hat{\omega}_{p-1}, \hat{\omega}_p, \hat{\omega}_{p+1});$

$s = s + 1;$

até $|\hat{\omega}_1 - \tilde{\omega}_1| \leq \frac{\pi}{N}$ ou $s = 2;$

fim

VI. RESULTADOS

Para avaliar quantitativamente as técnicas propostas para estimação de frequência utilizou-se o sinal complexo mono-componente expresso em (1).

O inverso do *Cràmer-Rao lower bound* (CRLB) foi utilizado como parâmetro de comparação de desempenho entre as técnicas. Para estimadores envolvendo processos com amostras complexas [5], tal qual formulado em (1), o CRLB é expresso por:

$$CRLB = \frac{6}{(A/\sigma_w^2)(2\pi)^2 N(N^2 - 1)}. \quad (30)$$

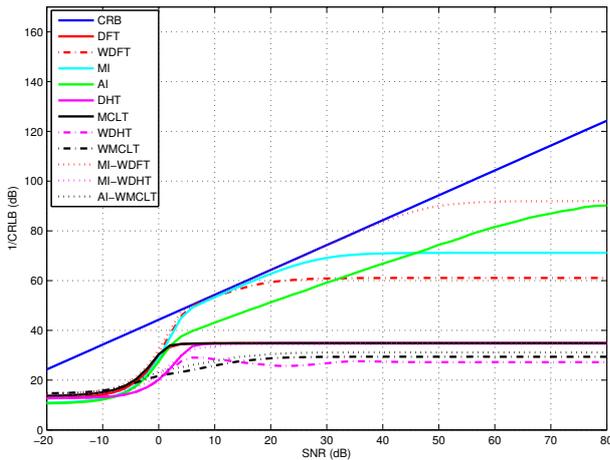
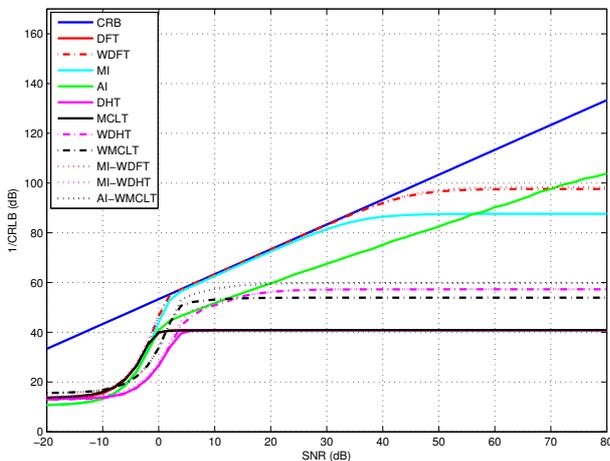
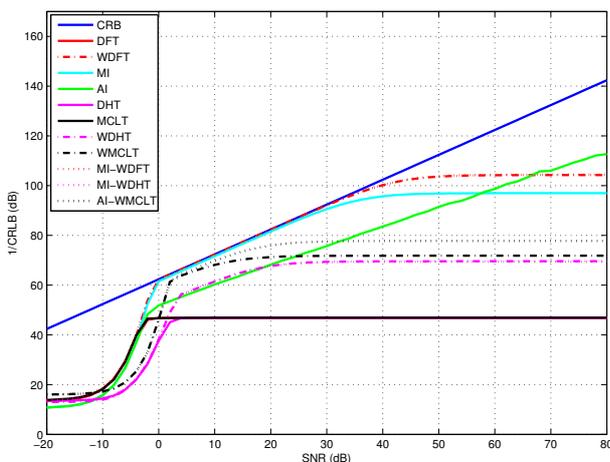
O desempenho das técnicas foram avaliados comparando o erro quadrático médio (*mean square error* - MSE) de estimação em função da SNR para alguns valores de N . Para cada SNR, foi realizado uma simulação de Monte Carlo com 10^5 realizações. A fim de avaliar as técnicas de forma justa, foi considerado em cada realização associada a uma SNR, um valor aleatório da frequência ω_1 a ser estimada, conforme formulado na sequência

$$\omega_1 = \left(\frac{N}{\delta} + v\right) \frac{2\pi}{N}, \quad (31)$$

em que $v \in \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $-0,5 < v < 0,5$ e $\delta \in \mathbb{N}$ é uma constante escolhida de tal sorte que a frequência ω_1 esteja dentro do intervalo $0 < \omega_1 < \pi$. Similarmente, para cada rodada de simulação Monte Carlo, foi empregado um valor aleatório da fase ϕ , tal como formulado na sequência

$$\phi = \varsigma\pi, \quad (32)$$

em que $\varsigma \in \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $-0,5 < \varsigma < 0,5$.

Fig. 1. Desempenho dos estimadores para $\omega_1 = 0, 8\pi$ e $N = 16$.Fig. 2. Desempenho dos estimadores para $\omega_1 = 0, 8\pi$ e $N = 32$.Fig. 3. Desempenho dos estimadores para $\omega_1 = 0, 8\pi$ e $N = 64$.

Verifica-se analisando os resultados apresentados nas Figs. 1, 2 e 3 que a técnica MI-WDFT proposta neste trabalho apresenta o melhor desempenho para as três condições avaliadas.

Na medida em que N cresce, as técnicas baseadas em interpolação das amostras em frequência (AI [2] e MI [3]) melhoram o desempenho. Porém, para valores elevados de N , maior o esforço computacional das técnicas de interpolação.

Nota-se que para $N = 16$, as técnicas baseadas em interpolação são afetadas pela baixa resolução em frequência das transformadas tempo-frequência. Por outro lado, a técnica proposta no presente trabalho MI-WDFT apresenta o melhor desempenho em termos de CRLB, proporcionando baixo custo computacional (número reduzido de amostras das transformadas N) com elevada precisão de estimação.

VII. CONCLUSÕES

O presente trabalho propôs um melhoramento na etapa inicial do procedimento descrito em [5] para estimação de frequência de sinais monocomponentes. A partir do refinamento na estimativa inicial do procedimento, obtido com as técnicas de interpolação em frequência, derivamos uma nova técnica de estimação de frequência (MI-WDFT) com reduzido custo computacional e elevada resolução em frequência. Ademais, apresentamos duas transformadas inéditas baseadas no mapeamento *warped* (WDHT e WMCLT). Ao aplicar as transformadas WDHT e WMCLT ao procedimento proposto no presente trabalho, derivamos novas técnicas de estimação de frequência (AI-WDHT e AI-MCLT) que podem ser de grande utilidade para aplicações em que as DHT e MCLT são empregadas.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à FINEP, INERGE, CNPq, CAPES, FAPEMIG e Smarti9 pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] E. Jacobsen, P. Kootsookos, "Fast, accurate frequency estimators," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 3, pp. 123-125, May 2007.
- [2] T. J. Abatzoglou, "A Fast maximum likelihood algorithm for frequency estimation of a sinusoid based on Newton's method," *IEEE Trans. Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 1, pp. 77-89, Feb. 1985.
- [3] M. D. Macleod, "Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 1, pp. 141-148, Jan. 1998.
- [4] Ç. Candan, "A method for fine resolution frequency estimation from three DFT samples," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 18, no. 6, pp. 351-354, Jun. 2011.
- [5] S. Franz, S. K. Mitra, and G. Doblinger, "Frequency estimation using warped discrete Fourier transform," *Signal Processing*, vol. 83, no. 8, pp. 1661-1671, Dec. 2003.
- [6] A. Oppenheim, D. Johnson, K. Steiglitz, "Computation of spectra with unequal resolution using the fast Fourier transform," *Proceedings of the IEEE*, vol. 59, no. 2, pp. 299-301, Feb. 1971.
- [7] R. Muralishankar, A. Sangwan, "Complex cepstrum of discrete Hartley and warped discrete Hartley filters," in *Proc. 12th Digital Signal Processing Workshop - 4th Signal Processing Education Workshop*, Teton National Park, WY, Sep. 2006, pp. 392-397.
- [8] H. S. Malvar, "A modulated complex lapped transform and its applications to audio processing," in *Proc. International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Phoenix, AZ, Mar. 1999, pp. 1421-1424.