

# Engenharia de Tráfego Aplicada a Redes Verdes

Débora A. O. Santos

Luiz A. R. da Silva Mello

Marco A. Grivet Mattoso Maia

**Resumo**—Este artigo apresenta uma técnica de Engenharia de Tráfego aplicada a Redes Verdes que se concentra na formulação da otimização, em vez de recorrer a métodos heurísticos, como normalmente é observado na literatura, e é focada no *backbone* de uma rede IP, apresentando uma abordagem para selecionar roteadores e circuitos que podem ser desligados durante períodos de baixo tráfego na rede. O programa de otimização linear associado, embora seja em geral muito grande, pode ser desmembrado por técnicas de decomposição em vários outros menores, trazendo assim o problema original para o domínio da viabilidade prática.

**Palavras-Chave**—Decomposição, Benders, Engenharia de Tráfego, Redes Verdes.

**Abstract**—This paper presents a Traffic Engineering technique applied to Green Networks which concerns on the optimization formulation, rather than on heuristic methods, as usually observed in the literature, and is focused on the backbone of an IP network, presenting an approach to select routers and circuits to be switched off during periods of low network traffic. The associated linear optimization program, although frequently very large, can be broken by decomposition techniques into several low size ones, thus bringing the original problem to the realm of practical feasibility.

**Keywords**—Decomposition, Benders, Traffic Engineering, Green Networks.

## I. INTRODUÇÃO

O fenômeno da Internet transformou o mundo numa verdadeira aldeia global, onde as pessoas estão cada vez mais conectadas. Este sucesso foi devido, em grande parte, à rápida proliferação de aplicações baseadas nos protocolos TCP/IP, o que tornou possível o compartilhamento de informações e beneficiou também a expansão de aplicações multimídia (como jogos em rede de alto desempenho, transmissões de filmes em HD, videoconferências, telefonia IP e áudio digital) e de sistemas que requerem uma grande largura de banda [1], diminuindo as distâncias e aproximando as pessoas.

A fim de suportar este cenário de convergência, o *backbone* de redes IP tem sido projetado para garantir alta disponibilidade e resiliência em situações de múltiplas falhas de circuitos e roteadores.

Assim, é fácil perceber que, apesar dos aspectos positivos, o crescimento exponencial do uso da Internet e dos recursos de rede para suportá-la tem sido acompanhado por consequências negativas, tais como um aumento considerável no consumo de energia.

De acordo com [2], em 2007, a energia total demandada pela Internet foi de cerca de 900 bilhões de kWh, o que representava, na época, 5,5% da eletricidade do mundo, com

uma taxa de crescimento anual estimada em torno de 20 a 25%. Além disso, a eficiência energética da Internet (em outras palavras, a razão entre a energia consumida e a quantidade total de tráfego de dados) é muito baixa, cerca de 8 a 10 vezes menor do que a de redes sem fio [3, 16].

Vários segmentos contribuem para este crescente consumo, mas o principal é o das operadoras de telecomunicações.

De acordo com estimativas recentes, o consumo mundial de eletricidade das operadoras de telecomunicações era, em 2012, 260TWh ao ano, o que representava quase 3% do consumo mundial. E este número só tende a aumentar.

Esta é uma preocupação recente, que se intensificou nos últimos anos, principalmente devido às crises energéticas em muitos países ao redor do mundo.

Não se pode esquecer que, além da questão do desperdício de energia, o consumo excessivo leva a outro problema muito importante que é o aumento da poluição ambiental, devido à crescente emissão de dióxido de carbono nas operações diárias das redes de telecomunicações.

Por estas razões, as preocupações com a economia de energia em redes IP não pode mais ser negligenciada, e tornou-se de grande interesse na comunidade científica, motivando diversos estudos relacionados a Redes Verdes [4, 5, 15]. Atualmente mais de quarenta países estão envolvidos em pesquisas e programas com o intuito de desenvolver mecanismos para economizar energia.

O presente artigo focará a questão do gerenciamento de energia da rede e de seus elementos, explorando o conhecimento de que o encaminhamento do tráfego é de relevância fundamental na gestão de qualquer rede de comunicação.

Existe uma classe de protocolos de roteamento baseado na ideia simples de que os pacotes são encaminhados pelos circuitos ao longo do caminho mais curto entre os nós de origem e de destino, sendo, por esse motivo, chamada de SPF (*Shortest Path First*), cujo exemplo mais conhecido é o OSPF (*Open Shortest Path First*). Sabe-se que o administrador da rede pode gerenciar o roteamento dos pacotes, fornecendo os chamados “custos” ou “pesos administrativos” aos circuitos que compõem as redes IP. Tais custos especificam os comprimentos dos *links* e são usados pelo protocolo de roteamento para o cálculo dos caminhos mais curtos. Este é o único recurso que o administrador da rede pode usar para influenciar e controlar o processo de roteamento. Assim, uma das principais tarefas no planejamento de redes é buscar os custos administrativos que induzam a uma configuração de roteamento de tráfego globalmente eficiente.

A escolha do conjunto adequado de parâmetros de rede que garantam um comportamento ótimo levando em consideração também a redução do consumo de energia pode ser comumente modelado pela formulação de um problema de otimização MILP (*Mixed-Integer Linear Program*).

A formulação matemática deste problema de otimização é simples e pode ser encontrada em muitos artigos e livros sobre redes de telecomunicações [2, 10].

Infelizmente, mesmo para redes de tamanho moderado, esta formulação envolve um número extremamente elevado de variáveis de decisão e restrições, exigindo, portanto, em alguns casos, tempo e poder computacional muito superiores aos possíveis na prática. Na formulação apresentada nos artigos e livros supracitados, em função dos tamanhos das matrizes e vetores dos modelos matemáticos, decorre que para uma rede com  $N$  nós e  $L$  circuitos, as quantidades  $D$  de variáveis de decisão e  $C$  de restrições são dadas por:

$$D = 2 \cdot N \cdot (N + L) + 2 \cdot L \cdot N + 1 \quad (1)$$

$$C = N^2 + L + 5 \cdot L \cdot (N - 1) \quad (2)$$

Por exemplo, para uma rede com 60 nós e 80 circuitos, o número de variáveis de decisão é 17.021, e o número de restrições é 27.280, números muito acima dos níveis razoáveis.

O presente artigo, analogamente ao apresentado em [2], propõe um método capaz de minimizar o consumo de energia de uma rede em um tempo viável. Mas, diferentemente de [2] e de outros como [8], em lugar de recorrer a métodos heurísticos para obtenção da solução do problema de otimização, este trabalho, com base na natureza esparsa e na estrutura em blocos das matrizes de restrição, sugere o emprego de técnicas de decomposição [11] como meio eficaz para reduzir a complexidade computacional e o tempo de processamento na obtenção da solução ótima.

Na verdade, a técnica proposta envolve uma sequência de três estágios em que o algoritmo de Benders [12], classicamente empregado em problemas de decomposição envolvendo variáveis complicadoras, é totalmente aplicado. Ao final do processo restam apenas problemas de otimização linear com tamanho próximo ao número de circuitos da rede, e suas soluções não exigem demasiada carga computacional mesmo para programas de otimização (*solvers*) de complexidade moderada.

## II. MODELAGEM DA REDE E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere-se a topologia da rede representada por um grafo direcionado  $G = (V, E)$ , onde  $V$  corresponde ao conjunto de nós (ou roteadores) e  $E$  corresponde ao conjunto de *links* (ou circuitos). As cardinalidades de  $V$  e  $E$  são representadas, respectivamente, por  $nV$  e  $nE$ . Assume-se que o IGP (*Interior Gateway Protocol*) da rede é o OSPF, admitindo-se balanceamento de tráfego por roteamento ECMP (*Equal Cost Multi-Path*) [13], onde o tráfego é uniformemente distribuído por todos os caminhos mais curtos para o mesmo nó de destino.

Com o intuito de facilitar o entendimento, a definição de algumas variáveis e constantes é apresentada nas Tabelas I e II.

Define-se ainda  $P_e^E$  como a energia consumida pelo circuito  $e$ ,  $P_t^V$  como a energia consumida pelo nó  $t$  e a função objetivo de interesse, neste caso, é o consumo total de energia.

TABELA I. RESUMO DAS VARIÁVEIS

Notação	Descrição
$x_{et}$	Fluxo ECMP no circuito $e$ destinado ao nó $t$
$z_{st}$	Valor comum de fluxo ECMP destinado ao nó $t$ , atribuído a cada um dos circuitos provenientes do nó $s$ que pertencem aos caminhos mais curtos entre os nós $s$ e $t$
$r_{st}$	Comprimento do caminho mais curto, com custo $w$ , do nó $s$ para o nó $t$
$w_e$	Custo atribuído ao circuito $e$
$Z$	Fator de máxima superutilização dos circuitos
$u_{et}$	Variável binária que indica se o circuito $e$ pertence ao caminho mais curto até o nó $t$
$\alpha_e$	Variável binária que indica se o circuito $e$ está ou não ativo
$\beta_t$	Variável binária que indica se o nó $t$ está ou não ativo

TABELA II. RESUMO DOS PARÂMETROS

Notação	Descrição
$V$	Conjunto de roteadores da rede
$E$	Conjunto de circuitos da rede
$nV$	Cardinalidade do conjunto $V$
$nE$	Cardinalidade do conjunto $E$
$\delta^-(v)$	Conjunto de circuitos entrantes no nó $v$
$\delta^+(v)$	Conjunto de circuitos saíntes do nó $v$
$\#\delta^+(v)$	Cardinalidade de $\delta^+(v)$
$a(e)$	Nó de origem do circuito $e$
$b(e)$	Nó de destino do circuito $e$
$D_t$	Tráfego total destinado ao nó $t$
$d_{vt}$	Tráfego total do nó $v$ destinado ao nó $t$
$C_e$	Capacidade do circuito $e$
$M$	Uma constante grande o suficiente, não inferior à diferença em comprimento entre quaisquer dois caminhos no grafo da rede

A formulação completa da programação linear destinada a ser resolvida é apresentada a seguir:

$$\min z = \sum_{e \in E} P_e^E \cdot \alpha_e + \sum_{t \in V} P_t^V \cdot \beta_t \quad (3)$$

sujeito a:

$$\sum_{e \in \delta^-(t)} x_{et} = D_t \quad t \in V \quad (4)$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x_{et} - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_{et} = d_{vt} \quad (v, t) \in V, t \neq v \quad (5)$$

$$\sum_{t \in V \setminus a(e)} x_{et} \leq Z \cdot C_e \quad e \in E \quad (6)$$

$$0 \leq x_{et} \leq D_t \cdot u_{et} \quad e \in E, t \in V \setminus a(e) \quad (7)$$

$$z_{a(e),t} - x_{et} \geq 0 \quad e \in E, t \in V \setminus a(e) \quad (8)$$

$$z_{a(e),t} - x_{et} \leq D_t \cdot (1 - u_{et}) \quad e \in E, t \in V \setminus a(e) \quad (9)$$

$$w_e + r_{b(e),t} - r_{a(e),t} \geq 1 - u_{et} \quad e \in E, t \in V \setminus a(e) \quad (10)$$

$$w_e + r_{b(e),t} - r_{a(e),t} \leq M \cdot (1 - u_{et}) \quad e \in E, t \in V \setminus a(e) \quad (11)$$

$$\alpha_e \leq \beta_{a(e)} \quad e \in E \quad (12)$$

$$\alpha_e \leq \beta_{b(e)} \quad e \in E \quad (13)$$

$$u_{et} \leq \alpha_e \quad e \in E, t \in V \quad (14)$$

$$r_{st} \geq 1 \quad (s,t) \in V \quad (15)$$

As equações (4) e (5) descrevem as restrições clássicas de Preservação de Fluxo, enquanto a desigualdade (6) expressa a prevenção de violação das capacidades dos circuitos. As restrições (7), (8) e (9) são aquelas que descrevem as regras ECMP, enquanto que as restrições representadas por (10) e (11) garantem que os custos administrativos  $w$ , quando usados pelo protocolo OSPF, gerem os caminhos mais curtos entre os nós, em conformidade com a resolução ora empregada. As equações (12) e (13) descrevem a relação entre os estados *on-off* dos nós e circuitos enquanto (15) indica o valor mínimo para os comprimentos dos caminhos.

Devido à natureza binária das variáveis  $u$ ,  $\alpha_e$  e  $\beta_t$ , o problema em questão é classificado como MILP (*Mixed-Integer Linear Program*). Embora as expressões de (3) a (15) sejam de fácil compreensão, o problema de otimização de interesse pode ser transformado em outro, formalmente muito mais simples, como apresentado a seguir:

$$\min_{\underline{y}} z = \underline{c}^T \cdot \underline{y} \quad (16)$$

sujeito a:

$$\underline{A} \cdot \underline{y} = \underline{r} \quad (17)$$

$$\underline{B} \cdot \underline{y} \leq \underline{s} \quad (18)$$

$$\underline{y}_L \leq \underline{y} \leq \underline{y}_H \quad (19)$$

onde a variável de decisão  $\underline{y}$  é uma agregação adequada das variáveis  $\underline{x}, \underline{z}, \underline{r}, \underline{w}, \underline{u}, \underline{\alpha}$  e  $\underline{\beta}$ .  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$  são as matrizes que descrevem as restrições e sua representação gráfica pode ser observada na Figura 1, onde todas as restrições indicadas nas equações de (4) a (15) estão representadas visualmente.

A Figura 1 evidencia a natureza particular das matrizes  $\underline{A}$  e  $\underline{B}$ , que não são apenas muito esparsas, mas totalmente compostas por blocos de matrizes, o que sugere que técnicas de decomposição podem ser aplicadas com o intuito de fracionar o problema original em vários outros com dimensão inferior.

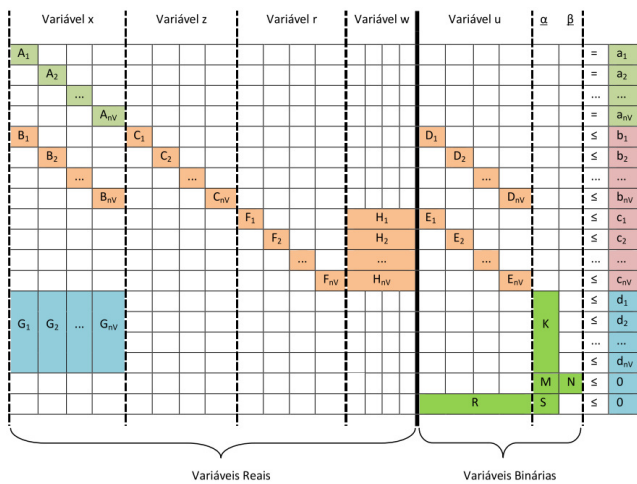


Fig. 1. Visualização das restrições MILP.

### III. TÉCNICAS DE DECOMPOSIÇÃO

O método de decomposição proposto por Benders em 1962 é um algoritmo que permite resolver certos problemas de otimização que apresentam uma estrutura bloco-diagonal em suas restrições e cuja solução por partes é impedida pelas chamadas “variáveis complicadoras”.

A ideia central do método de decomposição de Benders, cujo algoritmo é descrito em [12] e apresentado no Apêndice I, é dividir o problema original em dois subproblemas que são resolvidos iterativamente, de tal maneira que a solução de um seja inserida no outro, criando assim uma sequência de soluções alternativas de otimização que, no final, convergem para a solução do problema original. Sucintamente, a complexidade decorrente do tamanho do problema é contornada reorganizando-o de tal maneira a gerar subproblemas menores e mais fáceis de serem resolvidos.

Os dois subproblemas mais simples em que o problema original é dividido são conhecidos como:

- i. **Problema Mestre**, que consiste em uma versão relaxada do problema original, contendo um subconjunto eleito de variáveis, juntamente com suas respectivas restrições; e
- ii. **Problema Escravo**, que consiste na versão original do problema com os valores do subconjunto de variáveis eleitos para o Problema Mestre temporariamente fixados.

Considere-se a situação em que o problema de otimização descrito por (16) - (19) pode ser convenientemente reescrito como:

$$\min_{\underline{y}_1, \underline{y}_2} z = \underline{c}_1^T \cdot \underline{y}_1 + \underline{c}_2^T \cdot \underline{y}_2 \quad (20)$$

sujeito a:

$$\underline{A}_1 \cdot \underline{y}_1 + \underline{A}_2 \cdot \underline{y}_2 = \underline{r} \quad (21)$$

$$\underline{B}_1 \cdot \underline{y}_1 + \underline{B}_2 \cdot \underline{y}_2 \leq \underline{s} \quad (22)$$

$$\underline{y}_{1L} \leq \underline{y}_1 \leq \underline{y}_{1H} \quad (23)$$

$$\underline{y}_{2L} \leq \underline{y}_2 \leq \underline{y}_{2H} \quad (24)$$

De um modo geral, o algoritmo de Benders pode ser definido em quatro passos, os quais são descritos a seguir:

- **PASSO 0: Inicialização**  $\Rightarrow$  A variável  $\underline{y}_2$  juntamente com uma variável artificial  $\sigma$  são convenientemente inicializadas;
- **PASSO 1: Solução do Subproblema**  $\Rightarrow$  A variável  $\underline{y}_1$  é avaliada por meio de um problema de otimização em que se assume que a variável  $\underline{y}_2$  é conhecida;
- **PASSO 2: Verificação de Convergência**  $\Rightarrow$  Aqui um simples cálculo é feito para verificar se a solução obtida até o momento está próxima da ideal; e
- **PASSO 3: Problema Mestre**  $\Rightarrow$  Um problema de otimização é definido para obter novos valores para as variáveis  $\underline{y}_2$  e  $\sigma$ , considerando-se que se assume que a variável  $\underline{y}_1$  seja conhecida.

Pode-se observar na Figura 1 que a maneira mais conveniente de dividir as variáveis de decisão é definir as variáveis binárias como a variável complicadora  $\underline{y}_2$  e as demais variáveis como  $\underline{y}_1$ .

Assim, o **PASSO 3** do Benders está relacionado a um problema de otimização contendo apenas variáveis binárias enquanto o **PASSO 1** do Benders é um problema de otimização composto pelas variáveis reais do sistema. Com o intuito de tornar clara a descrição do método, esta primeira aplicação do algoritmo foi denominada pelos autores como BENDERS-0.

As dimensões das variáveis  $y_1$  e  $y_2$  revelam que o **PASSO 1** é o mais crítico devido ao seu tamanho. No entanto, analisando-se minuciosamente a Figura 1 é possível observar que o problema neste passo pode ser resolvido por meio de um novo algoritmo de Benders (aqui chamado de BENDERS-1) em que uma nova “variável complicadora” pode ser separada do resto. A variável  $w$  é a candidata ideal a esta nova variável complicadora. O **PASSO 1** correspondente a este BENDERS-1 envolve o que é chamado de “restrições complicadoras”. No entanto, optando-se por resolver este problema não em sua forma primal, mas em sua forma dual, as restrições são transformadas em “variáveis complicadoras”, permitindo a aplicação, então, de um novo algoritmo de Benders (aqui chamado de BENDERS-2). Felizmente, o **PASSO 1** do BENDERS-2 é composto por variáveis separáveis, uma vez que a estrutura das matrizes correspondentes  $A_1$  e  $A_2$ , depois de algum rearranjo de linhas e colunas, é claramente blocodiagonal, como ilustrado na Figura 2.

$A_1^T$	$B_1^T$	0								
0	$C_1^T$	0								
0	0	$F_1^T$								
			$A_2^T$	$B_2^T$	0					
			0	$C_2^T$	0					
			0	0	$F_2^T$					
			...						...	
			...						...	
							$A_{nV}^T$	$B_{nV}^T$	0	
							0	$C_{nV}^T$	0	
							0	0	$F_{nV}^T$	

Fig. 2. Matriz de restrições no **PASSO 1** do BENDERS-2.

O **PASSO 1** do BENDERS-2 dá origem ao que se denominou como OPTIM-0, onde  $nV$  problemas de otimização devem ser resolvidos.

Analisando-se atentamente as matrizes blocodiagonal mostradas na Figura 2, percebe-se que cada um destes problemas pode ser ainda dividido em dois outros. O primeiro relacionado ao bloco  $k$  envolve  $nV + 3 \cdot \delta^+(k)$  variáveis de decisão, enquanto o segundo envolve  $2 \cdot \delta^+(k)$  variáveis de decisão. No exemplo citado na Introdução, onde  $nV = 60$  e  $nE = 80$ , a quantidade  $nV + 3 \cdot \delta^+(k)$  é tipicamente igual a 65, enquanto a quantidade  $2 \cdot \delta^+(k)$  é tipicamente 10, valores significativamente menores que o original 17.021.

O encadeamento de todos estes algoritmos de Benders pode ser visualizado na Figura 3, onde o **PASSO 1** do algoritmo de BENDERS- $i$  dá origem ao algoritmo de BENDERS- $(i + 1)$ .

Há ainda um problema que deve ser aqui abordado visando ao pleno entendimento do método proposto. Ele está relacionado ao **PASSO 1** do algoritmo de Benders.

A formulação original do subproblema que compõe o **PASSO 1** pode ser observada no Apêndice I, onde uma variável dual  $\lambda$  precisa ser calculada de modo a ser utilizada no **PASSO 3**.

Novamente, esta formulação original não é usada porque tecnicamente a variável complicadora é fixada, mas não é removida da formulação. A sua remoção é elementar, mas nesta nova formulação perde-se a capacidade de determinar a variável dual  $\lambda$ .

Esta limitação pode ser contornada levando-se em consideração que a solução ótima para ambos os problemas é a mesma e conhecida e, então, as condições de Karush-Kuhn-Tucker podem ser usadas para obter-se  $\lambda$ .

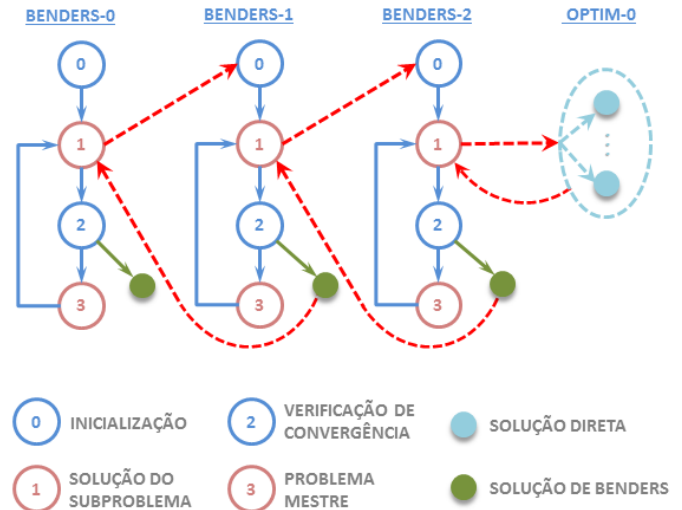


Fig. 3. Cadeia de métodos de decomposição de Benders.

#### IV. CONCLUSÕES

Este artigo propõe um procedimento de decomposição para lidar com o complexo problema de Engenharia de Tráfego (TE, sigla derivada do nome em inglês *Traffic Engineering* [6–9]) em redes IP baseadas no protocolo OSPF com suporte a ECMP, tendo como foco a economia de energia. O cerne do método apresentado consiste na resolução de um problema de TE de larga escala que define a solução ótima contendo os roteadores e circuitos que devem ser desligados para economizar o máximo possível de energia.

Uma vez que a literatura revela que este problema, quando aplicado a casos práticos demanda excessivos recursos computacionais, a maioria dos pesquisadores tem direcionado seus esforços para procedimentos heurísticos alternativos a fim de reduzir esta carga computacional.

Para ilustrar este fato, um importante trabalho apresentado por Amaldi *et al.* [2] descreveu um método alternativo para resolver o problema aqui discutido motivado pelo fato de que as soluções da formulação MILP original consomem muito tempo e recursos computacionais, como memória, por exemplo. Eles empregaram em seu trabalho exemplos de redes extraídos do SNDlib [14] e, em alguns casos, foi impossível obter um resultado em função da falta de memória. Para a rede Diyuan-30, por exemplo, com 11 nós e 42 circuitos, a solução não pôde ser alcançada mesmo após mais de 20 horas de processamento.

Embora as técnicas de decomposição estejam disponíveis há mais de quatro décadas, até onde os autores tiveram a oportunidade de investigar, a abordagem aqui apresentada, em que várias decomposições são usadas em cascata, é original.

Salienta-se que a comprovação da eficiência do método proposto prescinde de resultados numéricos, uma vez que se demonstrou a viabilidade de fracionamento do problema linear original em diversos menores, também lineares, mas de ordem infinitamente inferior, cuja solução é inegavelmente possível em tempos razoáveis.

Entretanto como sugestão para trabalhos futuros considera-se interessante a aplicação da técnica proposta em diversas redes existentes no SNDlib, com o intuito de efetuar uma análise comparativa com métodos heurísticos apresentados na literatura. Além disso, sugere-se o emprego da técnica na resolução de problemas similares, considerando-se, inclusive, a flexibilização de algumas restrições, como o balanceamento de carga por ECMP, por exemplo.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Iyer, S. Bhattacharyya, N. Taft e C. Diot, *An approach to alleviate link overload as observed on an IP backbone*. INFOCOM 2003, Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications. IEEE Societies, 2003.
- [2] E. Amaldi, A. Capone e L. G. Gianoli, *Energy-aware IP traffic engineering with shortest path routing*. Computer Networks, 57 (6), 1503–1517, 2013.
- [3] S. Lambert, W. V. Heddeghem, W. Vereecken, B. Lannoo, D. Colle e M. Pickavet, *Worldwide electricity consumption of communication networks*. Optics Express, 20 (26), B513–B524, 2012.
- [4] L. Chiaraviglio, M. Mellia e F. Neri, *Reducing energy consumption in backbone networks*. In Proceedings of IEEE ICC, 2009.
- [5] K. J. Christensen, C. Gunaratne, B. Nordman e A. D. George, *The next frontier for communications networks: power management*. Computer Communications, 27, 1758–1770, 2004.
- [6] D. Awduche, A. Chiu, A. Elwalid, I. Widjaja e X. Xiao, *Overview and principles of Internet traffic engineering*. RFC 3272, Internet Engineering Task Force, 2002.
- [7] E. Mulyana e U. Killat, *Optimization of IP networks in various hybrid IGP/MPLS routing schemes*. In Proceedings of the 3rd Polish-German Teletraffic Symposium PGTS, 295–304, Dresden Germany, 2004.
- [8] F. Skivée, S. Balon e G. Leduc, *A scalable heuristic for hybrid IGP/MPLS traffic engineering - Case study on an operational network*. In Proceedings of 14th IEEE International Conference on Networks (ICON 2006), 13–15, 2006.
- [9] H.-W. Chu, C.-C. Cheung, K.-H. Ho e N. Wang, *Green MPLS Traffic Engineering*. Atmac, 2011.
- [10] A. M. C. A. Koster e X. Muñoz, *Graphs and Algorithms in Communication Networks: Studies in Broadband, Optical, Wireless and Ad Hoc Networks*. Springer, 2010.
- [11] A. J. Conejo, E. Castillo, R. Mínguez e R. García-Bertrand, *Decomposition Techniques in Mathematical Programming: Engineering and Science Applications*. Springer, 2006.
- [12] J. F. Benders, *Partitioning methods for solving mixed variables programming problems*. Numerische Mathematik, 4, 238–252, 1962.
- [13] A. Lappeteläinen, *Equal cost multipath routing in IP networks*. Master’s Thesis, Aalto University School of Science and Technology, 2011.
- [14] S. Orlowski, M. Pióro, A. Tomaszewski e R. Wessály, *SNDlib 1.0 - Survivable Network Design library*. Networks, 55 (3), 276–286, 2010, Disponível em <http://sndlib.zib.de/home.action>.
- [15] M. Gupta e S. Singh, *Greening of the Internet*. In Proceedings of the 2003 Conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communications, SER. SIGCOMM’03, ACM, 19–26, 2003.
- [16] B. Gendron, M. G. Scutellà, R. G. Garroppo, G. Nencioni e L. Tavanti. *A Branch-and-Benders-Cut Method for Nonlinear Power Design in Green Wireless Local Area Networks*. CIRRELT, 2014.

APÊNDICE I

O algoritmo de Benders aplicado para decompor o problema anteriormente citado pode ser representado graficamente pela Figura 4 e descrito pelos seguintes passos:

**PASSO 0: Inicialização**

$$\begin{aligned}
 &v = 1 \\
 &\min_{\underline{x}, \sigma} z = \underline{a}^T \cdot \underline{x} + \sigma \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\underline{x}^{down} \leq \underline{x} \leq \underline{x}^{up} \\
 &\sigma \geq \sigma^{down}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{x}^{(v)}, \sigma^{(v)}
 \end{aligned}$$

**PASSO 1: Solução do Subproblema**

$$\begin{aligned}
 &\min_{\underline{y}} z = \underline{b}^T \cdot \underline{y} \\
 &\text{sujeito a :} \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{y} \leq \underline{s} \\
 &\underline{x} = \underline{x}^{(v)} : \underline{\lambda} \\
 &\underline{0} \leq \underline{y} \leq \underline{y}^{up}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{y}^{(v)}, \underline{\lambda}^{(v)}
 \end{aligned}$$

**PASSO 2: Verificação de Convergência**

$$\begin{aligned}
 &z_{up}^{(v)} = \underline{a}^T \cdot \underline{x}^{(v)} + \underline{b}^T \cdot \underline{y}^{(v)} \\
 &z_{down}^{(v)} = \underline{a}^T \cdot \underline{x}^{(v)} + \sigma^{(v)} \\
 &\text{Se } z_{up}^{(v)} - z_{down}^{(v)} < \varepsilon \text{ Então PARE. Solução Ótima.} \\
 &\text{Caso Contrário } v = v + 1
 \end{aligned}$$

**PASSO 3: Problema Mestre**

$$\begin{aligned}
 &\min_{\underline{x}, \sigma} z = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + \sigma \\
 &\text{sujeito a :} \\
 &\left. \begin{aligned}
 &\underline{b}^T \cdot \underline{y}^{(k)} + [\underline{\lambda}^{(k)}]^T \cdot [\underline{x} - \underline{x}^{(k)}] \geq \sigma \quad k = 1, \dots, v-1 \\
 &\underline{0} \leq \underline{x} \leq \underline{x}^{up} \\
 &\sigma \geq \sigma^{down}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma \\
 &*\text{onde } \Gamma = \underline{x}^{(v)}, \sigma^{(v)}
 \end{aligned}$$

Vá para o PASSO 1.



Fig. 4. Representação esquemática do algoritmo de Benders.