Reduzindo a Complexidade Aditiva de Transformadas Lineares

G. Jerônimo da Silva Jr., R. M. Campello de Souza e R. C. de Oliveira

***Resumo*— Este artigo reapresenta a teoria da complexidade aditiva para transformadas lineares e introduz uma nova abordagem para a redução desta complexidade. Um novo algoritmo para reduzir o número de adições em uma transformada linear, em comparação com o número de adições expresso pela matriz de transformação, é proposto. Exemplos desta redução são apresentados.**

***Palavras-Chave*— Complexidade aditiva, matriz bielementar, matriz adição, redutibilidade aditiva.**

***Abstract*— This paper revisits the theory of additive complexity for linear transforms and introduces a new approach to reduce this complexity. A new algorithm for reducing the number of additions over a linear transform, in comparison with the number of additions indicated by the transformation matrix, is proposed. Examples of such reduction are presented.**

***Keywords*— Additive complexity, bielementary matrix, addition matrix, additive reducibility.**

I. INTRODUÇÃO

Existe um conjunto de definições bem estabelecidas para conceituar o que são multiplicações e adições em algoritmos aritméticos [1], [2]. Tais definições são aplicáveis na engenharia no momento em que existe uma representação dos números em máquinas digitais. Sabendo que tais máquinas possuem limitações sobre esta representação, é importante quantificar a complexidade da implementação de multiplicações e adições.

Um caso particular são os algoritmos rápidos para a transformada discreta de Fourier (DFT, do inglês *discrete Fourier transform*), popularmente conhecidos como transformada rápida de Fourier (FFT, do inglês *fast Fourier transform*) [3]. Algumas FFTs são produzidas realizando-se a fatoração da matriz da DFT na forma CBA, em que C e A são matrizes com números racionais, geralmente potências de dois, e a matriz B é diagonal [2],[4]-[6].

A decomposição em bases numéricas e a decomposição de um conjunto de matrizes em matrizes de posto unitário possibilita que qualquer transformada discreta linear possa ser simplificada para a forma CBA [7], [8]. Nesse contexto, a complexidade multiplicativa é o número de elementos não racionais da matriz B e a complexidade aditiva depende das matrizes com números racionais C e A, matrizes que representam uma transformada linear racional, de uma maneira heurística não elementar [2], [4], [9].

G. Jerônimo da Silva Jr. e R. M. Campello de Souza, Grupo de Processamento de Sinais, Departamento de Eletrônica e Sistemas, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, E-mails: gilsonjr@gmail.com, ricardo@ufpe.br

R. C. de Oliveira, Grupo de Engenharia de Computação, Coordenação de Engenharia de Computação, Universidade do Estado do Amazona, Manaus, AM, E-mails: rcoliveira@uea.edu.br

Em transformadas lineares racionais, considera-se que multiplicações por números racionais são triviais e apresentam complexidade menor que a complexidade aditiva. Na prática, esse resultado é facilmente visualizado para números da forma 2^m, $m \in \mathbb{Z}$ [8], [10], [11].

O primeiro método sistemático para obter a complexidade aditiva de transformadas racionais foi a fatoração em matrizes bielementares [12]. Tal método se mostrou eficiente para implementações de transformadas racionais com complexidade aditiva reduzida, entretanto, não resulta no algoritmo com menor complexidade aditiva para alguns casos.

Considere, por exemplo, a complexidade aditiva da computação do vetor

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

em que x_0, x_1, x_2 e x_3 são variáveis. Considerando apenas a computação de y_0, existem várias opções, por exemplo $y_0 = ((x_0 + x_1) + x_2) + x_3$ ou $y_0 = (x_0 + x_2) + (x_1 + x_3)$ são opções diferentes para computar apenas y_0. Observa-se que, não importando a ordem ou arranjo das adições, o número mínimo de adições para se computar apenas a componente y_i depende do número de variáveis envolvidas na computação, denotado por N_V, e é dado por

$$\mathrm{C_A}(y_i) = N_V - 1. \tag{2}$$

Realizando a computação isoladamente de cada y_i, a computação de (1) é realizada com 9 adições. Utilizando a fatoração em matrizes bielementares, é possível computar (1) com 7 adições. Entretanto, é possível computar (1) com 6 adições. Essa limitação foi observada por R. C. de Oliveira [13], levando a fatoração por matriz adição introduzida na Seção III.

A próxima seção apresenta, de forma resumida, os principais resultados da teoria da complexidade aditiva para transformadas [12]. A Seção IV apresenta duas maneiras de sintetizar a implementação resultante da fatoração por matriz adição. As conclusões são apresentadas na Seção V.

II. PRELIMINARES

Uma transformada linear pode ser representada de forma matricial por

$$V = \Psi v, \tag{3}$$

em que

$$V \triangleq \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{M-1} \end{bmatrix},$$

$$\Psi \triangleq \begin{bmatrix} \varphi_{0,0} & \varphi_{0,1} & \cdots & \varphi_{0,N-1} \\ \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{M-1,0} & \varphi_{M-1,1} & \cdots & \varphi_{M-1,N-1} \end{bmatrix}$$

e

$$v \triangleq \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Na condição particular em que $\varphi_{i,j} \in \mathbb{Q}$, isto é, a matriz de transformação Ψ contém apenas elementos racionais, a transformada não contém multiplicações. Neste caso, tem-se apenas multiplicações triviais e adições.

Teorema 1: Seja Ψ uma matriz racional $M \times N$, sem linhas nulas e com Z elementos nulos. Se $\mathrm{C_A}(\Psi)$ denota a complexidade aditiva de se computar (3) através do método direto, então

$$\mathrm{C_A}(\Psi) = M(N-1) - Z. \tag{4}$$

Demonstração: Utilizando a Equação (2) para a linha i, tem-se

$$A_i = N - 1 - z_i,$$

em que z_i é o número de elementos nulos na linha i. Assim

$$\mathrm{C_A}(\Psi) = \sum_{i=1}^{M}(N-1-z_i),$$

$$\mathrm{C_A}(\Psi) = M(N-1) - \sum_{i=1}^{M} z_i,$$

e, desde que $\sum_{i=1}^{M} z_i = Z$, o teorema esta demonstrado. ∎

Teorema 2: Se Ψ_a e Ψ_b são matrizes racionais e $(\Psi_a\ \Psi_b)$ denota a transformada racional dada por $V = \Psi_a(\Psi_b v)$. Então

$$\mathrm{C_A}(\Psi_a\Psi_b) = \mathrm{C_A}(\Psi_a) + \mathrm{C_A}(\Psi_b). \tag{5}$$

Demonstração: Por definição, $\mathrm{C_A}(\Psi_a\Psi_b)$ é a complexidade aditiva de se computar

$$V = \Psi_a(\Psi_b v).$$

Denotando

$$V_b \triangleq \Psi_b v,$$

que é computada com $\mathrm{C_A}(\Psi_b)$ adições, então pode-se computar V por

$$V = \Psi_a V_b,$$

com $\mathrm{C_A}(\Psi_a)$ adições, totalizando $\mathrm{C_A}(\Psi_a) + \mathrm{C_A}(\Psi_b)$ adições. ∎

É importante fatorar a matriz da transformada linear racional em matrizes com certas características. A definição a seguir, introduzida em [12], é utilizada para fatorar matrizes de transformadas racionais lineares e obter algoritmos com número de adições reduzidas.

Definição 1: Define-se como *matriz bielementar* uma matriz sobre o corpo dos racionais, em que todas as suas linhas devem ter no máximo dois elementos não nulos; além disso, as linhas com dois elementos, consideradas como vetores no R^N, em que N é o número de colunas, devem apresentar direções distintas.

Essa definição é utilizada para o refinamento da abordagem apresentada na próxima seção.

III. Fatoração em Matrizes Adição

Definição 2: Uma *matriz adição* de ordem N, $N \geq 2$, é uma matriz sobre o corpo dos racionais $[(N+1) \times N]$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} I_N \\ a^T \end{bmatrix},$$

em que I_N é a matriz identidade de ordem N e a é uma matriz coluna $(N \times 1)$ com exatos dois elementos não nulos. A última linha de A, a^T, é chamada de *vetor adição*.

Pela Definição 2, se A é uma matriz adição, então $\mathrm{C_A}(A) = 1$. A definição seguinte mostra como qualquer matriz com N colunas pode ser escrita como um produto matricial envolvendo uma matriz adição de ordem N.

Definição 3: A divisão (*divisão por matriz adição*) de uma matriz B, $(L \times N)$, pela matriz adição A_1 de ordem N é a matriz B_1, $[L \times (N+1)]$, em que

$$B = B_1 A_1.$$

Do mesmo modo, diz-se que a matriz B pode ser *fatorada* em B_1A_1. Para realizar essa operação, define-se a matriz linha binária $p = w(a_1^T)$ e $\bar{p} = I - p$, em que a_1^T é o vetor adição de A_1, I é a matriz linha $(1 \times N)$ com elementos unitários e a função $w(.)$ é a função *peso de Hamming*, definida por $w([a_{ij}]_{M\times N}) \triangleq [w_{ij}]_{M\times N}$,

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{ij} = 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo b_l^T a l-ésima linha de B, a matriz B_1 é a matriz com l-ésima linha dada por $[\bar{p} \odot b_l^T | \beta_l]$ se $\beta_l a_1 = b_l$, $\beta_l \in \mathbb{Q}$, e linha $[b_l^T|0]$ caso contrário, em que $\odot$ denota a multiplicação termo a termo.

Exemplo 1: Dividir a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

pela matriz adição

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se dos procedimentos descritos na Definição 3, obtem-se a matriz

$$B_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

A matriz B_1 é obtida zerando-se as posições referentes ao vetor adição de A_1, [0 0 2 1], da matriz B na linha l quando a matriz B_1 possui elemento não nulo na última coluna da linha l. Pode ser observado que para cada linha de B_1 em que as posições referentes ao vetor adição são nulas, o último elemento da linha é não nulo.

Denota-se por *perfuração* o procedimento de zerar as posições da matriz B adequadamente para obter a matriz B_1. A divisão de uma matriz B pela matriz adição A é simplesmente a obtenção da matriz B_1 através da perfuração da matriz B e do acréscimo da última coluna adequadamente.

Definição 4: Define-se como *redução aditiva*, de uma fatoração em matriz adição dada por $B = B_1A_1$, sendo A_1 uma matriz adição, o número de elementos não nulos da última coluna de B_1.

Exemplo 2: A fatoração da matriz B, apresentada no Exemplo 1, apresenta redução aditiva $r_1 = 3$, pois existem três elementos não nulos na última coluna da matriz B_1. Pode-se dividir a matriz B pela matriz A_2, dada por

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, o resultado da divisão da matriz B pela matriz adição A_2 é

$$B_2 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

Essa nova fatoração apresenta redução aditiva $r_2 = 2$.

Teorema 3: Seja C uma matriz $(M \times N)$, A uma matriz adição e $C = BA$ a fatoração em matriz adição de C com redução aditiva r, obtida pela divisão por matriz adição de C por A. Então

$$\mathrm{C_A}(B) = \mathrm{C_A}(C) - r. \tag{6}$$

Demonstração: A matriz B, $[M \times (N + 1)]$, possui as primeiras N colunas da matriz C com alguns elementos substituídos por zero. Usando (4),

$$\mathrm{C_A}(B) = M(N) - Z_B, \tag{7}$$

em que Z_B é o número de zeros em B. A última coluna de B possui r elementos não nulos (redução aditiva) e $M - r$ elementos nulos. Para cada elemento não nulo, adiciona-se dois zeros nas primeiras N colunas de B em relação a C; assim, se Z_C denota o número de zeros da matriz C, então

$$Z_B = Z_C + 2r + M - r = Z_C + M + r. \tag{8}$$

substituindo (8) em (7), tem-se

$$\mathrm{C_A}(B) = M(N - 1) - Z_C - r = \mathrm{C_A}(C) - r.$$

■

Definição 5: Define-se como *redutibilidade aditiva* de uma matriz qualquer, B, o valor da máxima redução aditiva possível por uma fatoração de B por matriz adição.

Exemplo 3: Testando várias fatorações possíveis na matriz B, apresentada no Exemplo 1, chega-se a conclusão que a máxima redução aditiva ocorre quando se divide B por A_1 (Exemplo 1), assim, a redutibilidade de B é 3 (três).

Para uma matriz B com redutibilidade aditiva R, existe uma fatoração por matriz adição dada por $B = B_1A_1$ com redução aditiva R. Isso significa que existe uma implementação para $V = Bv$ através de $V = B_1(A_1v)$, algoritmo com complexidade aditiva

$$A_R = \mathrm{C_A}(B_1) + \mathrm{C_A}(A_1),$$

por (6),

$$A_R = \mathrm{C_A}(B) - R + 1.$$

Se $R > 1$, existe uma redução de complexidade aditiva em realizar o algoritmo através da fatoração $B = B_1A_1$. Se $R = 1$, não existe ganho mas também não existem prejuízos. Se $R = 0$, mostra-se que $\mathrm{C_A}(B) = 0$. Assim, se $\mathrm{C_A}(B) \geq 1$, então

$$\mathrm{C_A}(B_1) < \mathrm{C_A}(B).$$

Isso significa que se B possui redutibilidade aditiva maior que um, pode-se reduzir o número de adições por meio da fatoração em matriz adição. Se B possui redutibilidade aditiva unitária, pode-se utilizar a fatoração em matriz adição, mas não vai ocorrer redução da complexidade. Esse resultado inspira a Proposição a seguir.

Proposição 1: Fatoração recursiva de uma matriz racional B por matrizes adição:

- Calcule a redutibilidade, R, de B e encontre as J fatorações $B = \tilde{B}_j\tilde{A}_j$, em que $\tilde{A}_j$ são matrizes adição, $j = 1, 2, \ldots, J$.
- Escolha a fatoração com $\tilde{B}_j$ com máxima redutibilidade, denote $A_1 = \tilde{A}_j$ e $B_1 = \tilde{B}_j$ e fatore $B = B_1A_1$. Se existir mais de uma opção para $\tilde{B}_j$ com máxima redutibilidade, deve-se analisar os quocientes com máxima redutibilidade da divisão por matriz adição recursivamente.
- Sendo $B = B_1A_1$, se a redutibilidade de B_1 é $R_1 > 1$, repita o item 1 e 2 para fatorar B_1 em $B_1 = B_2A_2$ e sucessivamente para fatorar B_i em $B_i = B_{i+1}A_{i+1}$, até que a redutibilidade R_1 de B_i seja menor ou igual a um.
- A fatoração resultante é $B = B_L \prod_{l=L}^{1} A_l$, com redutibilidade de B_L, R_L, menor ou igual a um.

A fatoração em matrizes adição produz algoritmos com complexidade aditiva menor que a fatoração bielementar [12], porém, que necessitam de mais passos em alguns casos. Alguns procedimentos diminuem o número de matrizes e a ordem das matrizes na fatoração por matrizes adição. Esses procedimentos são apresentados na próxima seção.

IV. Refinamento da Fatoração

Existem dois procedimentos que simplificam a fatoração em matrizes adição. O primeiro procedimento é chamado de *redução de ordem* e ocorre quando a matriz B_1 da fatoração $B = B_1A$, A sendo uma matriz adição, possui uma ou mais colunas nulas. Se isso ocorre, pode-se eliminar as colunas nulas juntamente com as respectivas linhas de A. O exemplo a seguir mostra como é feita a redução de ordem.

Exemplo 4: Considere o resultado da divisão da matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

pela matriz adição

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O resultado é

$$C_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

A terceira coluna de C_1 é nula, pode-se então cancelar essa coluna e cancelar a terceira linha de A_1, assim

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O segundo refinamento é o *agrupamento bielementar*, que pode ser feito quando o produto de duas matrizes adjacentes da fatoração resulta em uma matriz bielementar. Nesse caso, pode-se substituir as duas matrizes por uma única matriz bielementar, que é equivalente a executar duas adições independentes simultaneamente no mesmo passo da implementação do algoritmo. O exemplo a seguir mostra como o agrupamento bielementar é realizado.

Exemplo 5: A fatoração da matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

em matrizes adição é

$$D = D_2 A_2 A_1, \tag{9}$$

em que

$$D_2 = \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \multicolumn{5}{c}{I_5} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A_1 = \begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{I_4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que $A_2 A_1$ resulta na matriz bielementar

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{I_4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, a fatoração $D = D_2 \Phi_1$ possui a mesma complexidade aditiva de (9), mas é mais indicada para implementação pois realiza a computação de $V = Dv$ com apenas dois passos (duas transformações racionais).

Utilizando a fatoração em matrizes adição em conjunto com os refinamentos, pode-se produzir boas implementações de transformadas racionais.

Proposição 2: Algoritmo para computar a transformada racional $V = Bv$:

- Fatorar a matriz B utilizando a Proposição 1 para obter $B = B_L \prod_{l=L}^{1} A_l$
- Fatorar a matriz B_L em matrizes bielementares [12].
- Realizar o refinamento na fatoração de B para minimizar o número de passos da implementação, $B = \Delta_P \Delta_{P-1} \ldots \Delta_2 \Delta_1$.
- A implementação do algoritmo é feita por $V = \Delta_P(\Delta_{P-1} \ldots (\Delta_2(\Delta_1 v)) \ldots)$.

Exemplo 6: Aplicar a Proposição 2 para implementar $V = Dv$, em que D é a matriz apresentada no Exemplo 5. O primeiro passo resulta em (9). O segundo passo é fatorar a matriz D_2 em matrizes bielementares; esse passo não reduz a complexidade aditiva, apenas melhora a implementação da transformada racional. Uma das possíveis soluções é a fatoração $D_2 = \Phi_2 \Phi_1$, em que

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \multicolumn{6}{c}{I_6} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi_2 = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, $D = \Phi_2 \Phi_1 A_2 A_1$. No terceiro passo, verifica-se que a matriz $A_2 A_1$ é bielementar e, sucessivamente, $\Delta_1 = \Phi_1(A_2 A_1)$ também é bielementar. Assim, temos a fatoração agrupada $D = \Phi_2 \Delta_1$, em que

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} \multicolumn{4}{c}{I_4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda no terceiro passo, pode-se reduzir a ordem das matrizes fatoradas, pois Φ_2 possui duas colunas nulas. Assim

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

A partir de (10), implementa-se a computação de V com 6 somadores distribuídos em dois estágios, como mostra a Figura 1.

A Proposição 1 é útil para calcular a complexidade aditiva de qualquer transformada discreta linear, a partir das matrizes racionais A e C da forma CBA da transformada, obtidas a partir da decomposição do núcleo da transformada em bases numéricas e da decomposição de um conjunto de matrizes em matrizes de posto unitário [7], [8]. A Proposição 2 é usada para gerar implementações com o número de adições reduzido.

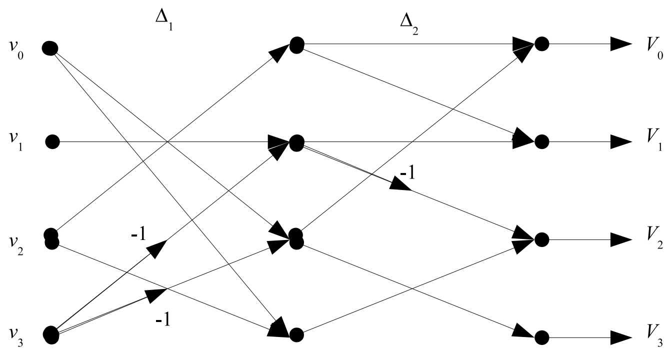

Fig. 1. Implementação de $V = Dv$ utilizando (10).

Entretanto, não existe prova de que tal proposição leva ao algoritmo com menor complexidade.

Exemplo 7: A fatoração em matrizes bielementares, como descrito em [12], implementa (1) com, no mínimo, 7 adições e dois estágios. Utilizando a Proposição 2, pode-se calcular os y_i através de

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \Delta_3 \left(\Delta_2 \left(\Delta_1 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) \right),$$

em que

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} & & I_4 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} & & I_5 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com 6 adições e três estágios.

V. Conclusões

Um novo método para a redução da complexidade aditiva para se computar umatransformada discreta linear foi apresentado. Tal método não apresenta limitações na redução da complexidade aditiva, como ocorre em alguns casos utilizando a fatoração em matrizes bielementares. Neste trabalho, as matrizes adição foram definidas e utilizadas no desenvolvimento de duas proposições importantes para calcular a complexidade aritmética e auxiliar a implementação de algoritmos. Exemplos da aplicação deste método foram apresentados, em que se obtêm uma redução da complexidade aditiva, quando comparado com o método direto e com a fatoração em matrizes bielementares.

Referências

[1] S. Winograd, *Arithmetic Complexity of Computations*. Bristol: SIAM Publications, 1980.

[2] M. T. Heideman, *Multiplicative Complexity, Convolution, and the DFT*. New York: Springer-Verlag, 1988.

[3] M. Heideman, D. Johnson, and C. Burrus, "Gauss and the history of the fast Fourier transform," *IEEE ASSP Magazine*, vol. 1, no. 4, pp. 14–21, October 1984.

[4] R. E. Blahut, *Fast Algorithms for Signal Processing*, 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

[5] S. Winograd, "On computing the discrete Fourier transform," *Mathematics of Computation*, vol. 32, pp. 175–199, Jan. 1978.

[6] H. Sorensen, D. Jones, C. Burrus, and M. Heideman, "On computing the discrete Hartley transform," *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 33, no. 5, pp. 1231–1238, 1985.

[7] G. J. da Silva Jr. and R. M. Campello de Souza, "Transformada rápida de Fourier otimizada," *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, p. 5, Outubro 2011.

[8] G. J. da Silva Jr., "A teoria da complexidade aritmética aplicada à otimização de transformadas lineares," tese PPGEE, Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife, 2012.

[9] G. J. da Silva Jr. and R. M. Campello de Souza, "Cyclotomic basis for computing the discrete Fourier transform," *International Telecommunications Symposium*, pp. 1–5, September 2010.

[10] W. T. Padgett and D. V. Anderson, "Fixed-point signal processing," *Synthesis Lectures on Signal Processing*, vol. 4, no. 1, pp. 1–133, 2009.

[11] J. P. C. Cajueiro and G. J. da Silva Jr., "Análise e implementação da transformada rápida de Fourier otimizada," *XXXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pp. 1–4, Setembro 2013.

[12] G. J. da Silva Jr. and R. M. Campello de Souza, "Teoria da complexidade aditiva para transformadas," *XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pp. 1–5, Outubro 2011.

[13] R. C. de Oliveira, "Novos algoritmos rápidos para computação de transformadas discretas," tese PPGEE, Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife, 2013.