

Modelo Estocástico dos Coeficientes para o Algoritmo IAF-PNLMS Operando com Dados Complexos e Reais

Eduardo Vinicius Kuhn, Francisco das Chagas de Souza e Rui Seara

Resumo—Este artigo visa derivar um modelo descrevendo o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS (*individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square*) para sinais de entrada gaussianos complexos e reais. Para tal, uma decomposição alternativa é considerada para as matrizes de distribuição de ganhos e de autocorrelação do sinal de entrada, visando estabilizar o cálculo da matriz de autocorrelação normalizada surgida no desenvolvimento do modelo. Como consequência, é obtido um modelo que prediz adequadamente o comportamento do algoritmo tanto na fase transiente quanto em regime permanente. Resultados de simulação atestam a precisão do modelo proposto.

Palavras-chave—Algoritmo IAF-PNLMS, filtragem adaptativa, modelagem estocástica, resposta ao impulso esparsa.

Abstract—This paper aims to derive a model describing the mean weight behavior of the individual-activation-factor proportionate normalized least-mean-square (IAF-PNLMS) algorithm for complex- and real-valued Gaussian input data. For such, an alternative matrix decomposition is considered for both the gain distribution and input data autocorrelation matrices, aiming to stabilize the calculus of the normalized autocorrelation-like matrix arising from the model development. As a consequence, a model that predicts adequately the algorithm behavior is obtained for both transient and steady-state phases. Simulation results attest the accuracy of the proposed model.

Keywords—IAF-PNLMS algorithm, adaptive filtering, stochastic modeling, sparse impulse response.

I. INTRODUÇÃO

Atualmente, respostas ao impulso esparsas são comumente encontradas em muitas aplicações práticas, tais como aquelas que envolvem sistemas de comunicação sem fio, comunicação acústica subaquática, cancelamento de eco, conformação de feixe em arranjo de antenas, processos sísmicos, e sistemas de radar e sonar [1]-[4]. Uma resposta ao impulso (planta) é qualitativamente classificada como esparsa se a maioria de seus coeficientes tem magnitude nula (ou próxima de zero) e apenas alguns poucos coeficientes apresentam magnitudes significativas [2]. Para tal classe de respostas ao impulso, os algoritmos adaptativos especialmente concebidos para lidar com plantas esparsas superam os algoritmos clássicos [e.g., o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*)] tanto em termos de velocidade de convergência quanto em capacidade de rastreamento [1], [2]. Como consequência, a concepção de algoritmos customizados para operar com plantas esparsas tem se tornado um tópico de pesquisa bastante ativo, como pode ser verificado pela variedade de algoritmos recentemente propostos. Dentre os principais membros dessa família, destacam-se o PNLMS (*proportionate NLMS*) padrão [5], o

IPNLMS (*improved PNLMS*) [6], o PNLMS com lei μ (μ -law PNLMS) [7] e o IAF-PNLMS (*individual-activation-factor PNLMS*) [8]. Assim, levando em consideração a ampla faixa de aplicação dos algoritmos da família PNLMS, seus modelos estocásticos se tornam importantes ferramentas para prever o comportamento desses algoritmos em diferentes condições de operação. Dessa forma, a partir de um adequado modelo, a adoção de simulações de Monte Carlo (MC) para a avaliação de desempenho do algoritmo bem como para o ajuste de seus parâmetros pode ser evitada. Além disso, o modelo pode possibilitar um entendimento mais profundo do funcionamento do algoritmo sob análise, evidenciando assim suas vantagens e limitações [9], [10].

A modelagem de algoritmos da família PNLMS tem se mostrado um tópico de pesquisa bastante desafiador, principalmente, devido à inerente complexidade matemática envolvida na derivação de modelos precisos abrangendo uma ampla faixa de condições de operação. Para tal, faz-se necessário levar em consideração (durante o desenvolvimento do modelo) tanto as características da planta (representada pela matriz de distribuição de ganhos) quanto do sinal de entrada; caso contrário, resultados bastante limitados são obtidos (e.g., [5]). Particularmente, com vistas à modelagem do algoritmo IAF-PNLMS, um modelo bastante preciso para o comportamento médio do vetor de coeficientes, considerando sinais de entrada correlacionados, tem sido recentemente apresentado em [11] e aprimorado em [12]. Contudo, assim como os demais modelos até então apresentados na literatura para os algoritmos da família PNLMS, os modelos descritos em [11] e [12] também se limitam a sinais de entrada reais. Nesse contexto, visto que em muitas aplicações práticas o sinal de entrada e o sinal desejado são complexos, o presente trabalho de pesquisa visa estender a proposta de modelagem apresentada em [12] para o caso de dados complexos. Para tal, uma abordagem alternativa para a decomposição das matrizes de distribuição de ganho e de autocorrelação do sinal de entrada é apresentada, permitindo escrever a matriz de autocorrelação normalizada (requerida para descrever o comportamento médio do vetor de coeficientes) em uma forma bastante compacta.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considerando o caso mais geral (dados complexos), a equação de adaptação dos algoritmos da família PNLMS é dada por [13]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)e^*(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \quad (1)$$

onde $\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \cdots w_M(n)]^T$ denota o vetor de coeficientes do filtro adaptativo, $\mathbf{x}(n) = [x(n) \cdots x(n-M+1)]^T$, o vetor com as amostras do sinal de entrada, $\mathbf{G}(n)$, a matriz de distribuição de ganhos, μ , o parâmetro de controle de passo, e ε , uma constante positiva de valor muito pequeno que previne divisão por zero em (1) e estabiliza a solução [2]. Para um problema de identificação de sistema (veja Fig. 1), o sinal de erro pode ser escrito como

Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara, LINSE - Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, e-mails: kuhn@linse.ufsc.br; seara@linse.ufsc.br.

Francisco das Chagas de Souza, LSAPS - Laboratório de Sistemas Adaptativos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia de Eletricidade, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, MA, Brasil, e-mail: fsouza@dee.ufma.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

$$e(n) = [\mathbf{w}^0 - \mathbf{w}(n)]^H \mathbf{x}(n) + z(n) \quad (2)$$

onde \mathbf{w}^0 representa um vetor de dimensão M contendo os coeficientes da planta e $z(n)$ denota um ruído de medição.

Nos algoritmos da família PNLMS, a matriz diagonal $\mathbf{G}(n)$ é usada para distribuir ganhos aos coeficientes do filtro de acordo com uma regra específica definida conforme o algoritmo considerado. Particularmente, para o algoritmo IAF-PNLMS [8], os elementos de $\mathbf{G}(n)$ são obtidos como segue:

$$g_i(n) = \frac{\phi_i(n)}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \phi_j(n)}, \quad i=1,2,\dots,M \quad (3)$$

sendo $\phi_i(n)$ uma função de proporcionalidade dada por

$$\phi_i(n) = \max[f_i(n), |w_i(n)|] \quad (4)$$

com

$$f_i(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} |w_i(n)| + \frac{1}{2} \phi_i(n-1), & n = mM, m=1,2,\dots \\ f_i(n-1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

representando um fator de ativação individual.

III. ABORDAGEM PROPOSTA

Agora, tendo em vista o algoritmo IAF-PNLMS, uma expressão de modelo que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes para esse algoritmo pode ser determinada. Para tal, as seguintes hipóteses simplificativas são primeiramente estabelecidas [11], [12], [14]:

H1) O sinal de entrada é obtido a partir de um processo gaussiano estacionário de média zero, variância σ_x^2 e matriz de autocorrelação \mathbf{R} .

H2) O parâmetro ε é uma constante positiva de valor muito pequeno.

H3) O ruído de medição $z(n)$ é independente de qualquer outro sinal envolvido no processo, tendo média nula e variância σ_z^2 .

H3) Para uma condição de adaptação lenta (passo de adaptação pequeno), $\mathbf{w}(n)$ e $\mathbf{x}(n)$ são estatisticamente independentes.

H4) Os vetores $\mathbf{g}(n) = [g_1(n) \cdots g_M(n)]^T$ e $\mathbf{x}(n)$ são assumidos não-correlacionados sob a condição de adaptação lenta.

H5) Devido à natureza invariante por partes da matriz de distribuição de ganhos [veja (3)-(5)], assume-se que $\mathbf{g}(n)$ e $\mathbf{w}(n)$ são fracamente correlacionados.

A. Comportamento Médio do Vetor de Coeficientes

Substituindo (2) em (1) e tomando o valor esperado de ambos os lados da expressão resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(n+1)] &= E[\mathbf{w}(n)] + \mu E \left[\frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right] \mathbf{w}^0 \\ &\quad - \mu E \left[\frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\mathbf{w}(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right] + \mu E \left[\frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)z^*(n)}{\varepsilon + \mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Agora, levando em consideração as Hipóteses H2)-H5), os termos do lado direito de (6) podem ser simplificados para

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = [\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_1(n)]E[\mathbf{w}(n)] + \mu\mathbf{R}_1(n)\mathbf{w}^0 \quad (7)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade e

$$\mathbf{R}_1(n) = E \left[\frac{\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\mathbf{G}(n)\mathbf{x}(n)} \right]. \quad (8)$$

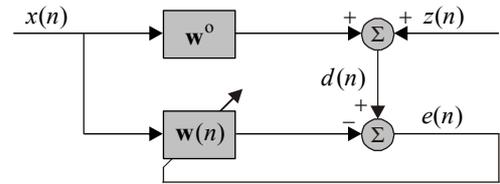


Fig. 1. Diagrama de blocos de um problema de identificação de sistema.

De (8), observa-se que a determinação de $\mathbf{R}_1(n)$ requer o conhecimento de $\mathbf{G}(n)$. No entanto, visto que $\mathbf{G}(n)$ é uma variável do algoritmo, ela não está prontamente disponível para ser usada no modelo. Assim, uma estimativa de $\mathbf{G}(n)$ obtida conforme indicado em [12, Seção III-A] e denotada $\bar{\mathbf{G}}(n)$ é considerada. Então, utilizando $\bar{\mathbf{G}}(n)$ no lugar de $\mathbf{G}(n)$, o valor esperado $\mathbf{R}_1(n)$ é agora expresso como

$$\mathbf{R}_1(n) \equiv E \left[\frac{\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)} \right]. \quad (9)$$

O procedimento para determinar $\mathbf{R}_1(n)$ constitui um dos maiores desafios para a modelagem de algoritmos da família PNLMS, requerendo tanto o conhecimento das características do sinal de entrada quanto da matriz de distribuição de ganhos. Aqui, um procedimento para o cálculo de tal matriz é apresentado levando em conta tanto sinal de entrada gaussiano complexo quanto real (veja Hipótese H1), o que dá origem a duas soluções distintas para $\mathbf{R}_1(n)$ devido à forma como a função densidade de probabilidade é definida [15]. Especificamente, a abordagem proposta se baseia na decomposição *contragredient* [16] de $\bar{\mathbf{G}}(n)$, \mathbf{R} e $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$, a qual é apresentada como segue.

B. Decomposição de $\bar{\mathbf{G}}(n)$, \mathbf{R} e $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$

A decomposição *contragredient* [16] permite diagonalizar simultaneamente um par de matrizes hermitianas usando a mesma matriz de transformação. Assim, considerando que $\bar{\mathbf{G}}(n)$ seja uma matriz positiva definida [7] e assumindo que \mathbf{R} também seja positiva definida [14], pode-se escrever

$$\bar{\mathbf{G}}(n) = \mathbf{Q}(n)\mathbf{\Lambda}^{1/2}(n)\mathbf{Q}^H(n) \quad (10)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-H}(n)\mathbf{\Lambda}^{1/2}(n)\mathbf{Q}^{-1}(n) \quad (11)$$

e, como consequência,

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} = \mathbf{Q}(n)\mathbf{\Lambda}(n)\mathbf{Q}^{-1}(n) \quad (12)$$

onde $\mathbf{Q}(n)$ representa a matriz de transformação e $\mathbf{\Lambda}(n)$ denota uma matriz diagonal contendo os autovalores de $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$, os quais são reais e positivos [16].

Agora, no intuito de estabilizar a solução de $\mathbf{R}_1(n)$, adota-se uma abordagem baseada em ordenar os autovalores de $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ (matriz essa, geralmente mal condicionada) visando descartar os menos significativos [12]. Para tal, os autovalores de $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ são inicialmente ordenados, i.e.,

$$\lambda_1(n) > \cdots > \lambda_L(n) > \lambda_{L+1}(n) > \cdots > \lambda_M(n). \quad (13)$$

Dessa forma, a matriz $\mathbf{\Lambda}(n)$ pode ser expressa como

$$\mathbf{\Lambda}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_A(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_B(n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

com

$$\mathbf{\Lambda}_A(n) = \text{diag}[\lambda_1(n) \cdots \lambda_L(n)] \quad (15)$$

contendo os autovalores mais significativos de $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$ e

$$\mathbf{\Lambda}_B(n) = \text{diag}[\lambda_{L+1}(n) \cdots \lambda_M(n)]. \quad (16)$$

Em (15), $\lambda_L(n)$ denota o autovalor menos significativo de $\Lambda_A(n)$, obtido através do limiar de magnitude $\lambda_L(n) \geq \gamma \lambda_1(n)$ com γ sendo uma constante positiva de valor muito pequeno.

Levando em conta (14)-(16), a matriz de transformação $\mathbf{Q}(n)$ de dimensão $M \times M$ pode ser expressa como

$$\mathbf{Q}(n) = [\mathbf{Q}_A(n) \ \mathbf{Q}_B(n)] \quad (17)$$

onde $\mathbf{Q}_A(n)$ representa uma matriz contendo as primeiras L colunas de $\mathbf{Q}(n)$. Analogamente, usando a mesma estratégia em $\mathbf{Q}^{-1}(n)$, tem-se

$$\mathbf{Q}^{-1}(n) = \mathbf{U}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A(n) \\ \mathbf{U}_B(n) \end{bmatrix} \quad (18)$$

com $\mathbf{U}_A(n)$ contendo as primeiras L linhas de $\mathbf{Q}^{-1}(n)$.

Finalmente, a partir de (14), (17) e (18), (12) pode ser reescrita como

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} = [\mathbf{Q}_A(n) \ \mathbf{Q}_B(n)] \begin{bmatrix} \Lambda_A(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_B(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_A(n) \\ \mathbf{U}_B(n) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Então, assumindo $\gamma \ll 1$, obtém-se

$$\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R} \cong \mathbf{Q}_A(n)\Lambda_A(n)\mathbf{U}_A(n) \quad (20)$$

assegurando dessa forma a estabilidade da solução obtida para $\mathbf{R}_1(n)$ (veja Apêndice).

C. Cálculo de $\mathbf{R}_1(n)$

Baseado nos resultados descritos no Apêndice e no procedimento de decomposição apresentado anteriormente, $\mathbf{R}_1(n)$ pode ser escrita como

$$\mathbf{R}_1(n) \cong \mathbf{Q}_A(n)\mathbf{H}(n)\mathbf{U}_A(n) \quad (21)$$

onde $\mathbf{Q}_A(n)$ e $\mathbf{U}_A(n)$ são matrizes oriundas da decomposição de $\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{R}$, e $\mathbf{H}(n)$ é uma matriz diagonal cujos elementos são determinados dependendo do tipo do sinal de entrada (complexo ou real).

Para o caso de sinal de entrada gaussiano complexo e correlacionado, os elementos de $\mathbf{H}(n)$ são dados por (para detalhes, veja Apêndice)

$$h_{i,i}^C(n) = -\frac{1}{a^C(n)} \left\{ \frac{A_{1,i}^C(n)}{\omega_i^C(n)} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^L B_{l,i}^C(n) \log \left[\frac{\omega_l^C(n)}{\omega_i^C(n)} \right] \right\} \quad (22)$$

com

$$\omega_k^C(n) = -1/\lambda_k(n), \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (23)$$

$$a^C(n) = \prod_{k=1}^L \lambda_k(n), \quad (24)$$

$$A_{1,i}^C(n) = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^L [\omega_i^C(n) - \omega_k^C(n)]} \quad (25)$$

e

$$B_{l,i}^C(n) = \frac{A_{1,l}^C(n)}{[\omega_l^C(n) - \omega_i^C(n)]}. \quad (26)$$

Por outro lado, para o caso de sinal de entrada gaussiano real e correlacionado, os elementos de $\mathbf{H}(n)$ são determinados através de (similarmente à [11] e [12])

$$h_{i,i}^R(n) \cong \frac{-1}{2\sqrt{a^R(n)}} \left\{ A_{1,i}^R(n) \log[-\omega_i^R(n)] + \sum_{l=1}^{L/2} B_{l,i}^R(n) \log[-\tilde{\omega}_l^R(n)] \right\} \quad (27)$$

com

$$\omega_k^R(n) = -1/[2\lambda_k(n)], \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (28)$$

$$\tilde{\omega}_q^R(n) = -\sqrt{\omega_{(2q-1)}^R(n)\omega_{(2q)}^R(n)}, \quad q = 1, 2, \dots, L/2, \quad (29)$$

$$a^R(n) = 2^L \prod_{k=1}^L \lambda_k(n), \quad (30)$$

$$A_{1,i}^R(n) = \frac{1}{\prod_{q=1}^{L/2} [\omega_i^R(n) - \tilde{\omega}_q^R(n)]} \quad (31)$$

e

$$B_{l,i}^R(n) = \frac{1}{[\tilde{\omega}_l^R(n) - \omega_i^R(n)] \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq l}}^{L/2} [\tilde{\omega}_q^R(n) - \tilde{\omega}_q^R(n)]} \quad (32)$$

para L par.

Portanto, considerando o vetor de coeficientes ótimo \mathbf{w}^o e a condição inicial $\mathbf{w}(0)$, a partir da expressão de modelo (7) e da matriz de autocorrelação normalizada $\mathbf{R}_1(n)$ [dada por (21)], pode-se prever o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo IAF-PNLMS tanto na fase transiente quanto em regime permanente.

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, a fim de verificar a precisão do modelo proposto tanto para sinal de entrada complexo quanto real, dois exemplos são apresentados considerando um problema de identificação de sistema. Em tais exemplos, o comportamento médio previsto através de (7) é comparado com os resultados obtidos via simulação de MC (média de 200 realizações independentes). O sinal de entrada é obtido de um processo auto-regressivo de segunda ordem AR(2), com equação de diferenças [17]

$$x(n) = -a_1x(n-1) - a_2x(n-2) + v(n) \quad (33)$$

onde a_1 e a_2 são os coeficientes do processo e $v(n)$, um ruído branco gaussiano cuja variância é ajustada de modo que $\sigma_x^2 = 1$. O ruído de medição inerente ao ambiente de operação do sistema tem variância $\sigma_z^2 = 10^{-3}$ (SNR de 30 dB). Nas simulações apresentadas, os parâmetros do algoritmo IAF-PNLMS são $f_i(0) = 10^{-3}$ e $\mu = 0.01$, sendo o vetor de coeficientes do filtro adaptativo inicializado com zero [i.e., $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$]. Com respeito ao parâmetro γ utilizado no modelo, um valor típico para os cenários aqui descritos é $\gamma = 10^{-4}$.

A. Exemplo 1

Neste exemplo, considerando sinal de entrada gaussiano complexo, avalia-se a precisão do modelo proposto para diferentes dispersões de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Para tal, é usada uma planta (artificial) esparsa com $M = 32$ coeficientes, sendo os elementos não nulos dados por

$$(\mathbf{w}_A^o)_i = \begin{cases} 0,1 + j0,2, & i = 1 \\ 0,7 - j0,1, & i = 10 \\ -0,3 - j0,2, & i = 15 \\ -0,2 + j0,7 & i = 24. \end{cases} \quad (34)$$

A partir de [8, (1)], tem-se que o grau de esparsidade dessa planta é $\xi(\mathbf{w}_A^o) = 0,8205$. Aqui, as dispersões de autovalores consideradas são $\chi = 57,59$ [obtida a partir de (33) para $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,7$] e 1211,85 (alterando a_2 para 0,96).

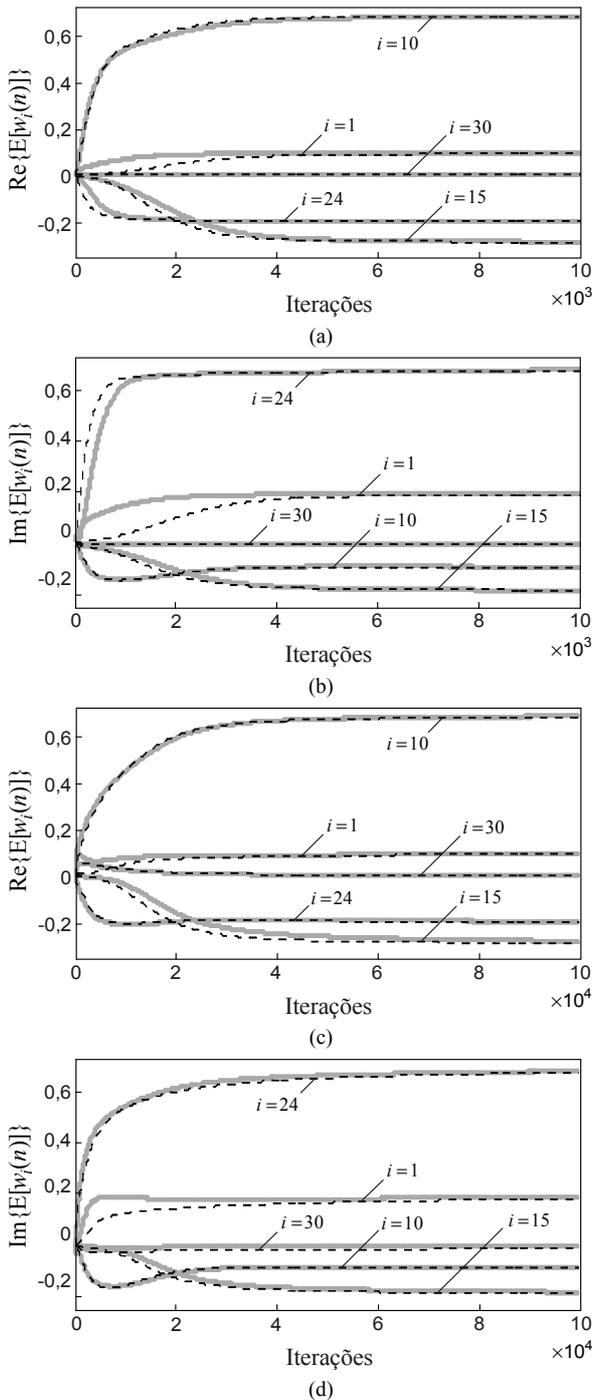


Fig. 2. Exemplo 1. Comportamento médio das partes real e imaginária de cinco coeficientes do filtro adaptativo. (Linhas cinzas) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto. (a)-(b) $\chi = 57, 59$. (c)-(d) $\chi = 1211, 85$.

B. Exemplo 2

No intuito de avaliar a robustez do modelo proposto frente a um cenário de operação mais realista, são utilizadas aqui duas plantas \mathbf{w}_B^0 e \mathbf{w}_C^0 (ambas com $M = 256$ coeficientes) obtidas a partir de modelos de caminho de eco dados na Recomendação G.168 da ITU-T [17, Modelos 1 e 4]. A partir de [8, (1)], verifica-se que tais plantas exibem esparsidades $\xi(\mathbf{w}_B^0) = 0,8515$ e $\xi(\mathbf{w}_C^0) = 0,6039$, respectivamente. Para esse cenário, considera-se um sinal de entrada gaussiano real obtido de (33) com $a_1 = -0,6$ e $a_2 = 0,85$, resultando em uma dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada de $\chi = 292,81$.

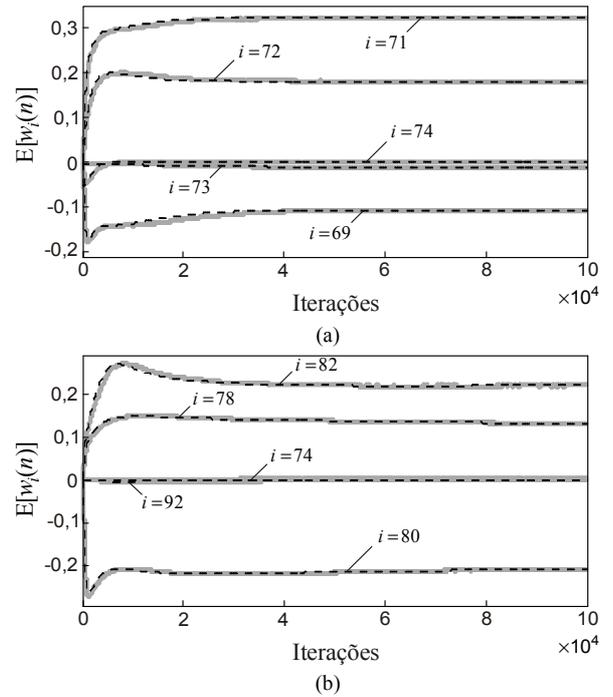


Fig. 3. Exemplo 2. Comportamento médio de cinco coeficientes do filtro adaptativo. (Linhas cinzas) simulações de MC. (Linhas escuras tracejadas) modelo proposto. (a) Planta \mathbf{w}_B^0 . (c) Planta \mathbf{w}_C^0 .

As Figs. 2 e 3 mostram os resultados obtidos para os cenários descritos nos Exemplos 1 e 2, respectivamente. Observe que o modelo proposto (7) descreve adequadamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo, exibindo uma muito boa precisão (casamento com os resultados de simulação de MC) tanto na fase transitente quanto em regime permanente. Note que essa precisão é verificada independentemente do tipo do sinal de entrada (complexo ou real), da ordem do filtro adaptativo, do nível de correlação do sinal de entrada e do tipo de planta considerada.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, foi derivada uma expressão de modelo que descreve o comportamento médio do vetor de coeficientes para o algoritmo IAF-PNLMS, levando em conta tanto sinal de entrada gaussiano complexo quanto real. Para tal, uma decomposição alternativa visando estabilizar o cálculo da matriz de autocorrelação normalizada (surgida na derivação do modelo) foi utilizada. Além disso, a matriz de distribuição de ganho foi considerada variante no tempo (condição realista de operação do algoritmo), o que resulta em um modelo predizendo adequadamente o comportamento médio dos coeficientes do filtro adaptativo tanto na fase transitente quanto em regime permanente. Os resultados obtidos através de simulação numérica ratificam a precisão das expressões propostas para uma ampla faixa de condições de operação. Destaca-se ainda que a metodologia discutida no presente trabalho de pesquisa pode também ser aplicada a outros algoritmos da família PNLMS, bastando modificar a forma como a matriz de ganho é calculada.

APÊNDICE DETERMINAÇÃO DE $\mathbf{R}_1(n)$

Neste apêndice, assumindo sinal de entrada gaussiano, é apresentado um procedimento para determinar $\mathbf{R}_1(n)$. Inicialmente, usando a definição de valor esperado [15], (9) é reescrita como

$$\mathbf{R}_1(n) = \underbrace{\int \dots \int}_{M \text{ vezes}} \frac{\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)}{[\mathbf{x}^H(n)\bar{\mathbf{G}}(n)\mathbf{x}(n)]^2} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (35)$$

onde $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ denota a função densidade de probabilidade do sinal de entrada [15]. Agora, definindo uma função auxiliar $F_1(n, \omega)$, tal que $\mathbf{R}_1(n) = F_1(n, \omega)|_{\omega=0}$, e diferenciando-a com respeito à ω , obtém-se

$$\frac{\partial F_1(n, \omega)}{\partial \omega} = - \underbrace{\int \dots \int}_{M \text{ vezes}} \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) e^{-\omega[\mathbf{x}^H(n) \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{x}(n)]} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (36)$$

Desse ponto em diante, a derivação requer o conhecimento de $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$; assim, soluções distintas são obtidas dependendo do tipo do sinal de entrada (complexo ou real).

1) *Sinal de entrada complexo*: Substituindo em (36) a função densidade de probabilidade gaussiana complexa, tem-se

$$\frac{\partial F_1(n, \omega)}{\partial \omega} = \frac{-\bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{A}_1^C(n, \omega)}{\det[\mathbf{L}_C^{-1}(n, \omega) \mathbf{R}]} \quad (37)$$

com

$$\mathbf{L}_C^{-1}(n, \omega) = [\mathbf{I} + \omega \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{R}] \mathbf{R}^{-1} \quad (38)$$

e

$$\mathbf{A}_1^C(n, \omega) = \frac{1}{\pi^M \det[\mathbf{L}_C(n, \omega)]} \underbrace{\int \dots \int}_{M \text{ vezes}} \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^H(n) e^{-[\mathbf{x}^H(n) \mathbf{L}_C^{-1}(n, \omega) \mathbf{x}(n)]} d\mathbf{x}. \quad (39)$$

Observe então que os elementos de $\mathbf{A}_1^C(n, \omega)$ são por definição a correlação cruzada entre $x_i(n)$ e $x_j^*(n)$, sendo $\mathbf{L}_C(n, \omega)$ a matriz de autocorrelação [10], [15]. Dessa forma, considerando $\mathbf{A}_1^C(n, \omega) = \mathbf{L}_C(n, \omega)$, integrando ambos os lados de (37) com respeito à ω e usando a decomposição apresentada na Seção III-B, obtém-se

$$\mathbf{F}_1^C(n, \omega) \equiv \mathbf{Q}_A(n) \mathbf{H}(n, \omega) \mathbf{U}_A(n) \quad (40)$$

onde $\mathbf{H}(n, \omega)$ é uma matriz diagonal cujos elementos são

$$h_{i,i}^C(n, \omega) = - \int \frac{\lambda_i(n)}{[1 + \omega \lambda_i(n)] \prod_{k=1}^L [1 + \omega \lambda_k(n)]} d\omega + C_1^C \quad (41)$$

para $i=1, 2, \dots, L$ e $C_1^C = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mathbf{F}_1^C(n, \omega) = 0$. Finalmente,

assumindo que todos os autovalores de (20) são distintos, usando expansão em frações parciais em (41) e resolvendo a expressão resultante para $\omega = 0$, segue (22) como uma solução analítica para essa integral.

2) *Sinal de entrada real*: Nesse caso, soluções para $\mathbf{R}_1(n)$ têm sido primeiramente apresentadas em [11] e [12]; no entanto, tais soluções não consideram a decomposição descrita na Seção III-B. Assim, tendo em vista essa decomposição alternativa, uma solução mais compacta pode ser obtida substituindo a função densidade de probabilidade gaussiana real em (36). Dessa forma,

$$\frac{\partial \mathbf{F}_1^R(n, \omega)}{\partial \omega} = \frac{-\bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{A}_1^R(n, \omega)}{\sqrt{\det[\mathbf{L}_R^{-1}(n, \omega) \mathbf{R}]}} \quad (42)$$

com

$$\mathbf{L}_R^{-1}(n, \omega) = [\mathbf{I} + 2\omega \bar{\mathbf{G}}(n) \mathbf{R}] \mathbf{R}^{-1} \quad (43)$$

e

$$\mathbf{A}_1^R(n, \omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M \det[\mathbf{L}_R(n, \omega)]}} \underbrace{\int \dots \int}_{M \text{ fold}} \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{x}^T(n) \mathbf{L}_R^{-1}(n, \omega) \mathbf{x}(n)]} d\mathbf{x}. \quad (44)$$

Note que os elementos de $\mathbf{A}_1^R(n, \omega)$ caracterizam a correlação cruzada entre $x_i(n)$ e $x_j(n)$ quando essas variáveis são conjuntamente gaussianas com matriz de autocorrelação dada por (43) [9], [15]. Então, fazendo $\mathbf{A}_1^R(n, \omega) = \mathbf{L}_R(n, \omega)$, integrando ambos os lados de (42) com respeito à ω e usando a decomposição dada na Seção III-B, obtém-se

$$\mathbf{F}_1^R(n, \omega) \equiv \mathbf{Q}_A(n) \mathbf{H}(n, \omega) \mathbf{U}_A(n) \quad (45)$$

sendo os elementos de $\mathbf{H}(n, \omega)$ dados agora por

$$h_{i,i}^R(n, \omega) = - \int \frac{\lambda_i(n)}{[1 + 2\omega \lambda_i(n)] \prod_{k=1}^L [1 + 2\omega \lambda_k(n)]} d\omega + C_1^R \quad (46)$$

para $C_1^R = 0$. Finalmente, considerando que (20) tem apenas autovalores distintos e usando a abordagem apresentada em [12], obtém-se (27) como uma solução aproximada para essa integral.

REFERÊNCIAS

- [1] Y. Huang, J. Benesty, and J. Chen, *Acoustic MIMO Signal Processing*, 1st ed. New York, NY: Springer-Verlag, 2006.
- [2] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochina, *Sparse Adaptive Filters for Echo Cancellation*. San Rafael: Morgan and Claypool Publishers, 2010.
- [3] Y. Selén and E. G. Larsson, "RAKE receiver for channels with a sparse impulse response," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 6, no. 9, pp. 3175-3180, Sept. 2007.
- [4] C. R. Berger, S. Zhou, J. C. Preisig, and P. Willett, "Sparse channel estimation for multicarrier underwater acoustic communication: From subspace methods to compressed sensing," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 3, pp. 1708-1721, Mar. 2010.
- [5] D. L. Duttweiler, "Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers," *IEEE Trans. Speech Audio Process.*, vol. 8, no. 5, pp. 508-518, Sept. 2000.
- [6] J. Benesty and S. L. Gay, "An improved PNLMS algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1881-1884.
- [7] H. Deng and M. I. Doroslovacki, "Proportionate adaptive algorithms for network echo cancellation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 5, pp. 1794-1803, May 2006.
- [8] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "A PNLMS algorithm with individual activation factors," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 4, pp. 2036-2047, Apr. 2010.
- [9] M. Rupp, "The behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 3, pp. 1149-1160, Mar. 1993.
- [10] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "On the constrained stochastic gradient algorithm: Model, performance, and improved version," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 57, no. 4, pp. 1304-1315, Apr. 2009.
- [11] F. C. de Souza, O. J. Tobias, R. Seara, and D. R. Morgan, "Stochastic model for the mean weight evolution of the IAF-PNLMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 11, pp. 5895-5901, Nov. 2010.
- [12] F. C. de Souza, and R. Seara, "Considerações sobre a Modelagem Estocástica dos Coeficientes do Algoritmo Adaptativo IAF-PNLMS," in *Anais do XXIX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBTr)*, Curitiba, PR, Brasil, Out. 2011, pp. 1-5.
- [13] S. Werner, J. A. Apolinário Jr., and P. S. R. Diniz, "Set-membership proportionate affine projection algorithms," *EURASIP J. Audio, Speech, Music Process.*, Article ID 34242, pp. 1-10, Jan. 2007.
- [14] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- [15] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.
- [16] A. J. Laub, M. T. Heath, C. C. Paige, and R. C. Ward, "Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 32, no. 2, pp. 115-122, Feb. 1987.
- [17] *ITU-T Recommendation G.168, Digital Network Echo Cancellers*. Geneva, Switzerland: Int. Telecomm. Union, 2009.